1.- Conceptos sobre el orden del Polinomio de Taylor.

Objetivos: Observar cómo, a medida que aumenta "n",

- si x es fijo, la aproximación $f(x) \approx T_n[f(x), a]$ va siendo cada vez mejor
- si x varía, la aproximación anterior es buena cada vez para más valores de x.

a) Calcular los Polinomios de Maclaurin de grado 1,3,4, de la función ln(1+x) y sus restos.

Indicación: Utilizar la función **vector(Taylor(ln(1+x),x,0,n),n,1,4)** para calcular conjuntamente los polinomios de Taylor de grados 1 a 4. Con la función: **vector(dif(ln(1+x),x,n),n,2,5)** =
obtener conjuntamente las derivadas de órdenes 2 a 5 de f(x) y, a partir de ellas, los restos de Lagrange: $R_n(x) = f^{n+1)}(c)\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, 0<c<x, o bien, x<c<0

Grado	Polinomio de Maclaurin	Resto de Lagrange
1		
3		
4		

b) Representar la función ln(1+x) y sucesivamente, los polinomios hallados, observando las gráficas. ¿Cuáles de los polinomios calculados pueden dar un valor fiable de ln(1.5), (x = 0.5)? *(Trabajando gráficamente, se considera que el polinomio de Taylor T_n da una **aproximación fiable de $f(x_0)$** si las gráficas de f y T_n se superponen en x_0 . Este concepto no es riguroso pues depende de la resolución de la pantalla y la escala con la que se trabaje. Para este apartado se sugiere la escala x=0.5, y=0.5).*

Grado	1	3	4
Si/No			

c) ¿Cual es el menor grado del Polinomio de Taylor de ln(1+ x) en a=0 para obtener una aproximación fiable de ln(1.5) a escala x = 0.5, y = 0.5?

d) Dibujando de nuevo, una a una y borrando las anteriores, las gráficas de los polinomios de Taylor hallados, indicar para cada grado, el intervalo donde es fiable la aproximación por el correspondiente polinomio de Taylor.

orden n	**1**	**3**	**4**
Intervalo			

e) Utilizando la función **vector(dif(ln(1+x),x,n),n,1,5)**, obtener

$$f^{n)}(x) =$$

Luego, el valor absoluto del resto de Lagrange de la Fórmula de MacLaurin es:

¿Para qué grado se obtiene una aproximación de ln 1.5 con un error menor que 0.005? , ya que:

$|R_n(0.5)| \leq$ < 0.005 y **vector(,n,1,6)** =

Luego,

Aproximación: $\ln 1.5 \approx P_n(0.5) \approx$

Por tanto, -0.005 $\leq$ ln(1.5) $\leq$ +0.005

Es decir, $\leq$ ln(1.5) $\leq$

f) Calcular con DERIVE ln1.5 - P_n (0.5) $\approx$

¿Está este error dentro de los límites permitidos en el apartado **e)** para la cota del error?

2.-Conceptos sobre la proximidad al punto del desarrollo.

Objetivo: Observar cómo, cuanto más próximo está el valor de x al punto a, mejor es la aproximación $f(x) \approx T_n[f(x), a]$

a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 2, en a=0, de la función $\sqrt[3]{1+x}$: y representar gráficamente ambas funciones.

$$T_2\left[\sqrt[3]{1+x}, 0\right] =$$

Observar gráficamente la fiabilidad de la aproximación $f(x) \approx T_2\left[\sqrt[3]{1+x},0\right]$ para los valores $\sqrt[3]{5}$ (x =), $\sqrt[3]{0.1}$ (x =), $\sqrt[3]{0.5}$ (x =), $\sqrt[3]{1,5}$ (x =). Ordenarlos de mayor a menor fiabilidad).

Más fiable					**Menos fiable**

b) ¿Cómo influye el valor de x en la fiabilidad de una aproximación?

c) Estimar los valores y los errores cometidos al aproximar el valor de $\sqrt[3]{1,5}$ (x =) y $\sqrt[3]{0,5}$ (x=) con el polinomio de grado dos obtenido en el apartado a).

Aproximar el valor de:	**Valor aproximado**	**Error estimado, menor que:**
$\sqrt[3]{1,5}$		
$\sqrt[3]{0,5}$		

Sustituimos x por en $T_2\left[\sqrt[3]{1+x},0\right] = 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$, obteniéndose

$f^{3)}(x) =$ y su gráfica es

$\underset{[0,0.5]}{\text{Máx}}\left| f^{3)}(x)\right| = f^{3)}(\quad) =$

$\left| R_3(x)\right| = \left|\frac{x^3}{3!} f^{3)}(c)\right| \le \frac{x^3}{3!}\underset{[0,0.5]}{\text{máx}}\left| f^{3)}(x)\right|$; así: $\left| R_3(0.5)\right| = \qquad \approx$

Análogamente se procede para el segundo caso.

d) Aproximar los valores de $\sqrt[3]{1,5}$ (x =) y de $\sqrt[3]{0,5}$ (x =) con un error menor que 0.001, mediante el polinomio de MacLaurin de $\sqrt[3]{1+x}$.

Valor exacto	Orden del polinomio utilizado	Valor aproximado
$\sqrt[3]{1,5}$		
$\sqrt[3]{0,5}$		

En efecto:

- Para el primero de los valores:

<u>Primer método</u>: El utilizado en el apartado 1.-e)

$f^{n)}(x) =$

$\left| R_n(0.5)\right| \le \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)!}\underset{[0,0.5]}{\text{máx}}\left| f^{n+1)}(x)\right| \le \qquad \le$

vector(g(n), n, 1, 4) = Luego .

<u>Segundo método</u>: Utilizando la función

vector(Taylor($\sqrt[3]{1+x}$ **, x, 0, n), n, 1,6)** y sustituyendo x por 0.5 se obtiene:

Luego

- Análogamente para $\sqrt[3]{0,5}$ (x =) :

<u>Segundo método</u>: Utilizando la función

vector(Taylor($\sqrt[3]{1+x}$ **, x, 0, n), n, 1,6)** y sustituyendo x por se obtiene:

f) Calcular, aplicando Taylor, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\text{tg}x}-e^x+x^2}{\text{arcsen}x-\text{sen}x}$.

- Primer polinomio no nulo de $\sqrt{1+2\text{tg}x}-e^x+x^2 = \frac{2x^3}{3} = p(x)$
- Primer polinomio no nulo de $\text{arcsen}x-\text{sen}x = \frac{x^3}{3} = q(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\text{tg}x}-e^x+x^2}{\text{arcsen}x-\text{sen}x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} =$