

1.- Conceptos sobre el orden del Polinomio de Taylor.

Objetivos: Observar cómo, a medida que aumenta “n”,

- si x es fijo, la aproximación $f(x) \approx T_n[f(x), a]$ va siendo cada vez mejor
- si x varía, la aproximación anterior es buena cada vez para más valores de x.

a) Calcular los Polinomios de Maclaurin de grado 1,3,4, de la función $\ln(1+x)$ y sus restos.

Indicación: Utilizar la función **vector(Taylor(ln(1+x),x,0,n),n,1,4)** para calcular conjuntamente los polinomios de Taylor de grados 1 a 4. Con la función:

vector(dif(ln(1+x),x,n),n,2,5) = [x, $x - x^2/2$, $x^3/3 - x^2/2 + x$, $-x^4/4 + x^3/3 - x^2/2 + x$]

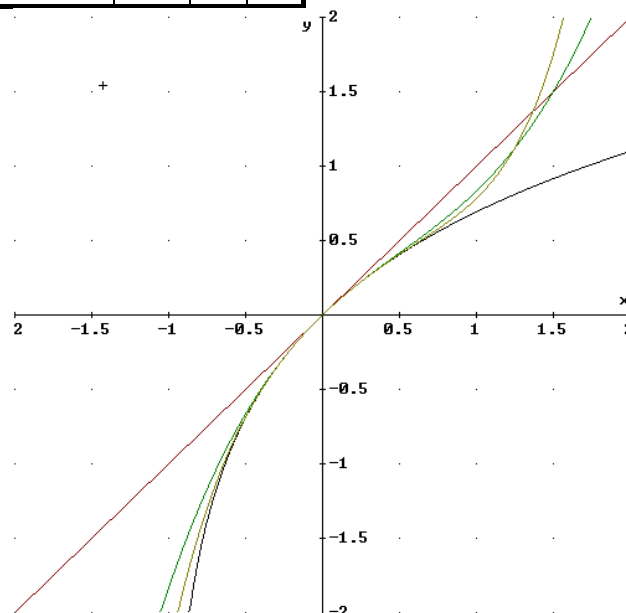
obtener conjuntamente las derivadas de órdenes 2 a 5 de f(x) y, a partir de ellas, los restos

de Lagrange: $R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0 < c < x$, o bien, $x < c < 0$

Grado	Polinomio de Maclaurin	Resto de Lagrange
1	x	$-\frac{1}{(c+1)^2} \frac{x^2}{2!}$, $0 < c < x$
3	$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$	$-\frac{6}{(1+c)^4} \frac{x^4}{4!} = -\frac{x^4}{4(1+c)^4}$, $0 < c < x$
4	$-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$	$\frac{24}{(1+c)^5} \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{5(1+c)^5}$, $0 < c < x$

b) Representar la función $\ln(1+x)$ y sucesivamente, los polinomios hallados, observando las gráficas. ¿Cuáles de los polinomios calculados pueden dar un valor fiable de $\ln(1.5)$, ($x = 0.5$)? (*Trabajando gráficamente, se considera que el polinomio de Taylor T_n da una aproximación fiable de $f(x_0)$ si las gráficas de f y T_n se superponen en x_0 . Este concepto no es riguroso pues depende de la resolución de la pantalla y la escala con la que se trabaje. Para este apartado se sugiere la escala $x=0.5$, $y=0.5$).*

Grado	1	3	4
Si/No	no	sí	sí



c) ¿Cual es el menor grado del Polinomio de Taylor de $\ln(1+x)$ en $a=0$ para obtener una aproximación fiable de $\ln(1.5)$ a escala $x = 0.5$, $y = 0.5$? **$n = 3$**

d) Dibujando de nuevo, una a una y borrando las anteriores, las gráficas de los polinomios de Taylor hallados, indicar para cada grado, el intervalo donde es fiable la aproximación por el correspondiente polinomio de Taylor.

orden n	1	3	4
Intervalo	(-0.14,0.15)	(-0.42,0.50)	(-0.56,0.58)

e) Utilizando la función **vector(dif(ln(1+x),x,n),n,1,5)**, obtener

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{(n+1)}$$

Luego, el valor absoluto del resto de Lagrange de la Fórmula de MacLaurin es:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)! (1+c)^{n+1}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right| \max_{[0,x]} \frac{1}{(1+z)^{n+1}}$$

$$\left(\text{ó bien } |R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)! (1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right| \max_{0<\theta<1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \right)$$

¿Para qué grado se obtiene una aproximación de $\ln 1.5$ con un error menor que 0.005? **$n = 5$** , ya que:

$$|R_n(0.5)| \leq \frac{(0.5)^{n+1}}{n+1} \cdot 1 = g(n) < 0.005 \text{ y } \text{vector}(g(n),n,1,6) = [0.125, 0.041666666666, 0.015625, 0.00625, 0.002604166666, 0.001116071428]$$

Luego, **$n = 5$** .

$$\text{Aproximación: } \ln 1.5 \approx P_n(0.5) \approx \frac{391}{960} \approx 0.4072916666$$

Por tanto, $0.4072916666 - 0.005 \leq \ln(1.5) \leq 0.4072916666 + 0.005$

Es decir, $0.4022916666 \leq \ln(1.5) \leq 0.4122916666$

f) Calcular con DERIVE $\ln 1.5 - P_n(0.5) \approx -0.001826558559$

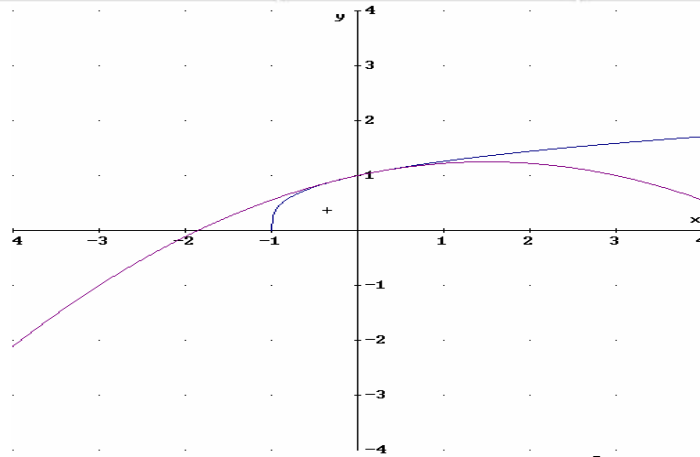
¿Está este error dentro de los límites permitidos en el apartado e) para la cota del error? **Sí**

2.-Conceptos sobre la proximidad al punto del desarrollo.

Objetivo: Observar cómo, cuanto más próximo está el valor de x al punto a , mejor es la aproximación $f(x) \approx T_n[f(x), a]$

a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 2, en $a=0$, de la función $\sqrt[3]{1+x}$:
y representar gráficamente ambas funciones.

$$T_2[\sqrt[3]{1+x}, 0] = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$



Observar gráficamente la fiabilidad de la aproximación $f(x) \approx T_2[\sqrt[3]{1+x}, 0]$ para los valores $\sqrt[3]{5}$ ($x = 4$), $\sqrt[3]{0.1}$ ($x = -0.9$), $\sqrt[3]{0.5}$ ($x = -0.5$), $\sqrt[3]{1.5}$ ($x = 0.5$). Ordenarlos de mayor a menor fiabilidad).

Más fiable	$\sqrt[3]{1,5}$	$\sqrt[3]{0,5}$	$\sqrt[3]{0,1}$	$\sqrt[3]{5}$	Menos fiable
-------------------	-----------------	-----------------	-----------------	---------------	---------------------

b) ¿Cómo influye el valor de x en la fiabilidad de una aproximación?

Cuanto más próximo está x al origen (punto del desarrollo) mejor es la aproximación.

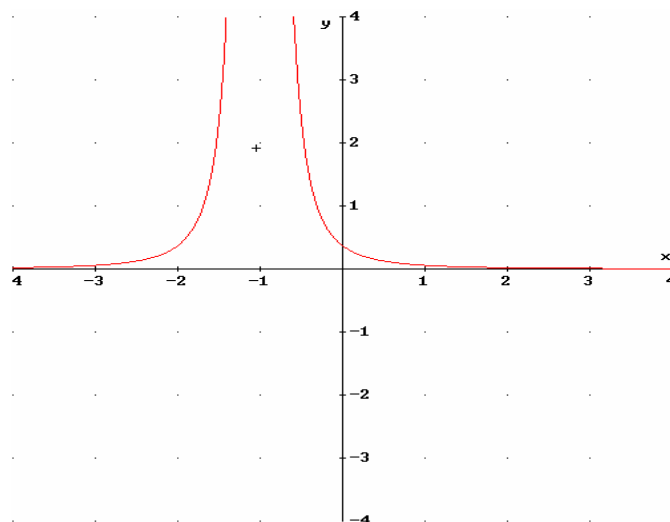
c) Estimar los valores y los errores cometidos al aproximar el valor de $\sqrt[3]{1,5}$ ($x = 0.5$) y $\sqrt[3]{0,5}$ ($x = -0.5$) con el polinomio de grado dos obtenido en el apartado a).

Aproximar el valor de:	Valor aproximado	Error estimado, menor que:
$\sqrt[3]{1,5}$	1.13888888	0.007716049
$\sqrt[3]{0,5}$	0.80555555	0.04899385

Sustituimos x por 0.5 en $T_2[\sqrt[3]{1+x}, 0] = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, obteniéndose **1.13888888**

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27(1+x)^{\frac{8}{3}}}$$

y su gráfica es



$$\text{Máx}_{[0,0.5]} |f^{(3)}(x)| = f^{(3)}(0) = \frac{10}{27}$$

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(c) \right| \leq \frac{x^3}{3!} \text{máx}_{[0,0.5]} |f^{(3)}(x)|; \text{ así: } |R_3(0.5)| = \frac{0.5^3}{3!} \cdot \frac{10}{27} \approx 0.007716049$$

Análogamente se procede para el segundo caso.

d) Aproximar los valores de $\sqrt[3]{1.5}$ ($x = 0.5$) y de $\sqrt[3]{0.5}$ ($x = -0.5$) con un error menor que 0.001, mediante el polinomio de MacLaurin de $\sqrt[3]{1+x}$.

Valor exacto	Orden del polinomio utilizado	Valor aproximado
$\sqrt[3]{1.5}$	4	1.144032921
$\sqrt[3]{0.5}$	6	0.7939576665

En efecto:

- Para el primero de los valores:

Primer método: El utilizado en el apartado 1.-e)

$$f^{(n)}(x) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n (x+1)^{\frac{3n-1}{3}}}$$

$$|R_n(0.5)| \leq \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)!} \text{máx}_{[0,0.5]} |f^{(n+1)}(x)| \leq g(n) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{2^{n+1} (n+1) 3^{n+1}} \leq \frac{1}{10^3}$$

vector(g(n), n, 1, 4) = (0.027777, 0.007716, 0.002572, 0.000943) Luego **n = 4**.

Segundo método: Utilizando la función

vector(Taylor($\sqrt[3]{1+x}$, x, 0, n), n, 1, 6) y sustituyendo x por 0.5 se obtiene:

[1.1666666666, 1.1388888888, 1.146604938, 1.144032921, 1.144975994, 1.144609244]

Luego **n = 4**.

- Análogamente para $\sqrt[3]{0.5}$ ($x = -0.5$) :

Segundo método: Utilizando la función

vector(Taylor($\sqrt[3]{1+x}$, x, 0, n), n, 1, 6) y sustituyendo x por -0.5 se obtiene:

[0.8333333333, 0.8055555555, 0.7978395061, 0.7952674897, 0.7943244170, 0.7939576665]

f) Calcular, aplicando Taylor, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\text{tg}x} - e^x + x^2}{\text{arcsen}x - \text{sen}x}$.

- Primer polinomio no nulo de $\sqrt{1+2\text{tg}x} - e^x + x^2 = \frac{2x^3}{3} = p(x)$

- Primer polinomio no nulo de $\text{arcsen}x - \text{sen}x = \frac{x^3}{3} = q(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\text{tg}x} - e^x + x^2}{\text{arcsen}x - \text{sen}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} = 2$$