

1.- ¿Qué funciones son primitivas de la función **cosx**: Tachar lo que no proceda

2sen(x)	2+sen(x)	sen(x+2)	sen(x)
NO	SI	NO	SI

2.- Hallar

$$\int \cos(x)dx = \text{sen}x + C$$

3.- Sean $f(x) = \begin{cases} 2 + \text{sen}(x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2 \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcular una primitiva

continua de:

f(x)	g(x)	f(x)+g(x)	f(x)•g(x)
2x-cosx si x<0 -1 si x>0	2senx si x<0 0 si x>0	2x-cosx+2senx si x<0 -1 si x>0	sen ² x+4senx si x<0 0 si x>0

4.- Hallar usando DERIVE una primitiva de $x^n \forall n \in \mathbb{R} - \{0\}$. ¿Cómo considera DERIVE el resto de las variables que no son propiamente la variable de integración?:.....**COMO CONSTANTES**.....

Observe que DERIVE ofrece como primitiva $\frac{x^{n+1}-1}{n+1}$ en vez de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ¿Tiene alguna ventaja la primera opción frente a la segunda?

SÍ, QUE INCLUYE LA OPCIÓN n=-1

¿Podríamos indicarle algo a DERIVE acerca de la variable n para que la primitiva sea $\frac{x^{n+1}}{n+1}$?

.....**DEFINIR DOMINIO DE LA VARIABLE NÚMERO REAL POSITIVO**

Cuando DERIVE al simplificar una integral, responde con la misma expresión, la mayoría de las veces, es debido a que no existe una función primitiva, o aún existiendo, no es expresable mediante un número finito de operaciones entre funciones elementales, por ejemplo, $\int \frac{dx}{\ln x}$

5.- Mediante el método de descomposición en fracciones simples, calcula en cada caso ,A, B, C, y D. Calcula la primitiva.

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{A}{(x-3)} dx + \int \frac{B}{(x-1)} dx = \frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + C = \ln \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} + C$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+4} dx = \int \frac{A}{(x+2)} dx + \int \frac{B}{(x+2)^2} dx = \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C$$

$$\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13} dx = \int (x-4) dx + \int \frac{Ax+B}{(x^2+4x+13)} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 16 \arctg \frac{x+2}{3} + \ln|x^2+4x+13| + C$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+4)} dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+1)} dx = \frac{1}{3} \arctg x - \frac{1}{6} \arctg \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2+4}{x^2+1} \right| + C$$

6.- Calcular $\int x \arcsen(x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \arcsen x^2 + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} \arcsen x - \frac{x^2}{4} + C$

7.- Dadas las integrales siguientes: rellenar el siguiente cuadro.

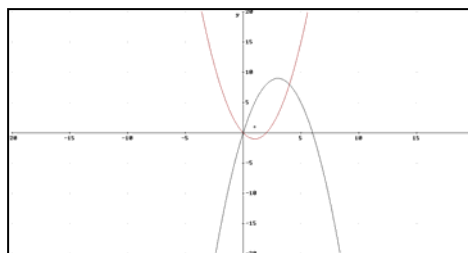
	Primitiva	Valor de la integral	Área del recinto limitado por la curva, el eje OX para los valores de x correspondientes. Hallar el valor de dicha área.
$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}}$	$\frac{1}{3} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} + C$	1/6	1/6
$\int_{-1}^1 x \ln(x+3) dx$	$\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\right) \ln x+3 + C$	3-4ln2	$-\frac{1}{2} + 9 \ln 3 - 12 \ln 2$
$\int_0^\pi x \cos(3x) dx$	$\frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{3} x \sin 3x + C$	-2/9	π
$\int_{-1}^1 \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	0	$-2 \ln \cos 1 $
$\int_0^1 \frac{1}{(x-0.5)} dx$	$\ln 2x-1 + C$?	∞ (véase integrales impropias)

8.- Calcular el área encerrada por :

a) $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$

Representación Gráfica:

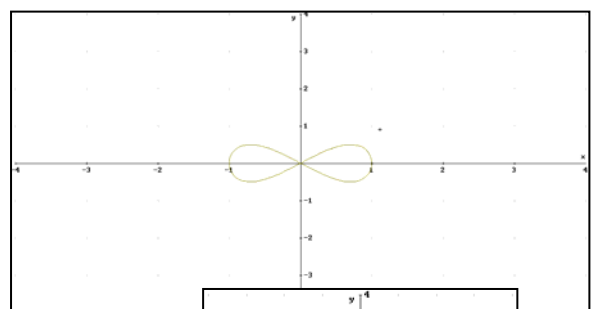
$$\int_0^4 |6x - x^2 - (x^2 - 2x)| dx = \frac{64}{3} u^2$$



b) $y^2 = x^2 - x^4$

Representación Gráfica:

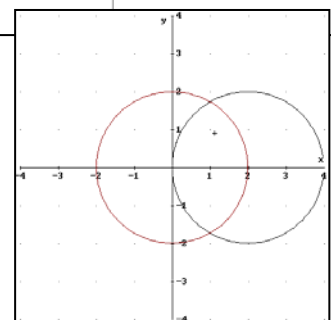
$$4 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{3} u^2$$



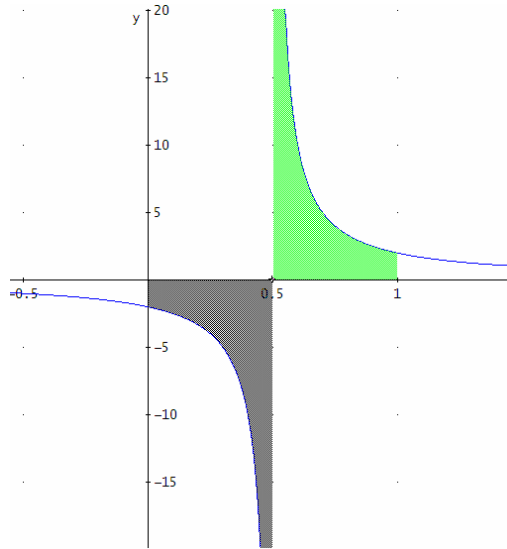
c) Común a los círculos $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$

Representación Gráfica:

$$4 \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} u^2$$



1.- Calcula $\int_0^1 \frac{1}{x-0.5} dx = ?$. Dibuja la gráfica



Teniendo en cuenta que $\frac{1}{x-0.5} > 0$ para $x > 0.5$ y $\frac{1}{x-0.5} < 0$ para $x < 0.5$

¿Encuentras sorprendente el resultado? **NO**

¿Se ha equivocado DERIVE? **NO** ¿Porqué?

Infinito menos infinito es una indeterminación

¿Qué le ocurre a esta integral?

La función $1/(x-0.5)$ no está acotada en $x=0.5$ luego la integral dada es impropia de segunda especie y es divergente por ser ∞ el valor de la integral en $[0.5, 1]$

¿Cuál sería el valor del área?: $\int_0^1 \left| \frac{1}{(x-0.5)} \right| dx = \infty$

2.- a) Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{e^{px}} dx$ con DERIVE. ¿Qué se obtiene? **?**

¿Porqué? $\frac{1}{e^{px}}$ depende de dos variables p y x. Hay que definir el intervalo de p.

b) Con **Definir, Dominio de la Variable, p, Real**, considerar sucesivamente $p < 0$, $p = 0$ y $p > 0$ y determinar si es convergente o divergente, en cada caso, la integral $\int_0^\infty \frac{1}{e^{px}} dx$

	$p < 0$	$p = 0$	$p > 0$
Carácter	DIVERGENTE	DIVERGENTE	CONVERGENTE
Valor	∞	∞	$1/p$

3.- Al ser $\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\text{sen} b)$ y no existir dicho límite, pues la función $\text{sen} x$ oscila indefinidamente entre -1 y 1, decimos que $\int_0^\infty \cos x dx$ no existe o diverge por oscilación ¿Qué dice DERIVE acerca de $\int_0^\infty \cos x dx$? **?**

4.- ¿Es impropia la integral $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} dx$? **NO** ¿Porqué?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ y en } (0, 1] \text{ es continua.}$$

5.- Analiza, sin calcularla, el carácter de $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$. **CONVERGENTE**

6.- Analizar el carácter de las siguientes integrales utilizando el criterio de comparación con ayuda de sus gráficas:

Integral dada	\leq ó \geq	Integral de referencia	Carácter	GRÁFICAS
$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^3} dx$	\leq	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$	CONVERGENTE	
$\int_{\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx$	\geq	$\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x}$	DIVERGENTE	
$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$	\leq	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$	CONVERGENTE	
$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$	\leq	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	CONVERGENTE	

7.- Analizar el carácter de las siguientes integrales utilizando el criterio de comparación en el límite y/o con ayuda de sus gráficas:

Integral dada	integral de referencia	Límite del cociente de funciones.	GRAFICAS	Carácter
$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 2^x} dx$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2^x}{e^x} = 1$		CONVERGENTE
$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 / (e^x - 1)}{1/x^2} = 0$		CONVERGENTE
$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2/3}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt[3]{1+x^2}}{1/x^{2/3}} = 1$		DIVERGENTE

8.- Aplicando la definición de integral impropia y con ayuda de la gráfica, calcular el área del recinto limitado por la función y el eje x en el intervalo propuesto

f(x)	[a,b]	GRÁFICA	Integral I que da S	Cálculo mediante límite	Carácter de I. Valor de S
$\frac{1}{(x-0.5)^2}$	[0,1]		$S = \int_0^1 \frac{dx}{(x-0.5)^2}$	$2 \int_{0.5}^1 \frac{dx}{(x-0.5)^2}$	Divergente hacia $+\infty$. S es infinita.
$\frac{1}{x^2+2x+2}$	\mathbf{R}		$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	CONVERGENTE S = π
$\text{sen}^2 x$	[0, ∞)		$\int_0^{\infty} \text{sen}^2 x dx$	$\int_0^{\infty} \text{sen}^2 x dx$	DIVERGENTE
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	(1, ∞)		$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	CONVERGENTE S = $\frac{\pi}{2}$
$\ln x$	(0,1]		$-\int_0^1 \ln x dx$	$-\int_0^1 \ln x dx$	CONVERGENTE S=1

9.- Si la función $y = \frac{1}{x}$ gira alrededor del eje x para $x \geq 1$, engendra un sólido de revolución, llamado a veces Horno de Gabriel, cuyo volumen V nos lo proporciona la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx \cdot$$

La superficie de revolución de dicho sólido viene dada por $S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \cdot \text{Calcula con DERIVE. } \begin{cases} V = \pi \\ S = \infty \end{cases}$$

¿Cuánta pintura cabe en el Horno de Gabriel, si la unidad de longitud en la recta real es el dm?

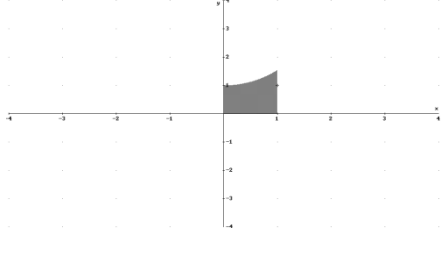
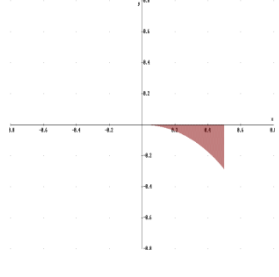
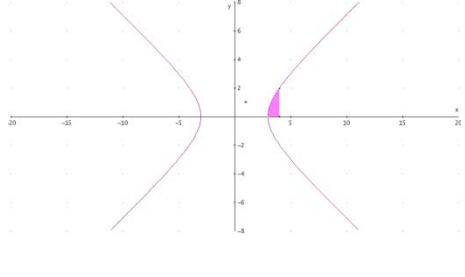
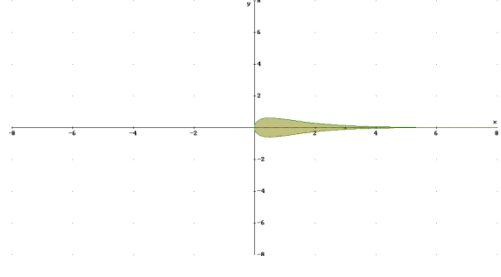
π litros

¿Qué cantidad de pintura se necesita para pintar el exterior del Horno?

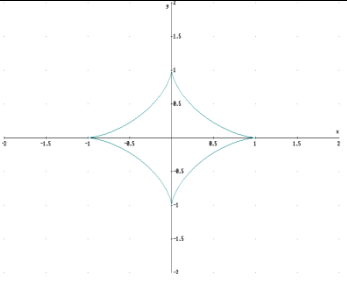
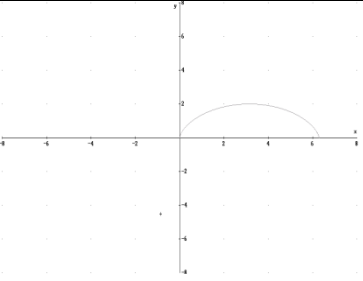
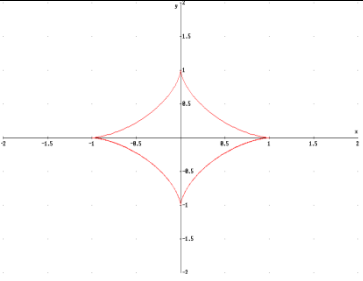
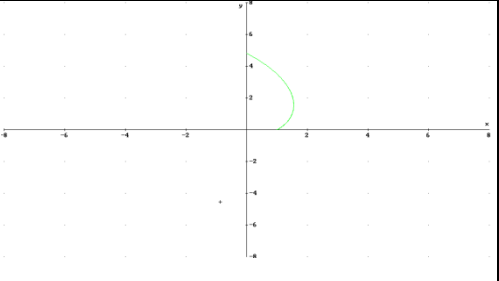
NO EXISTE CANTIDAD SUFICIENTE DE PINTURA EN EL MUNDO

Una vez repuesto/a de la sorpresa intenta dar una explicación.

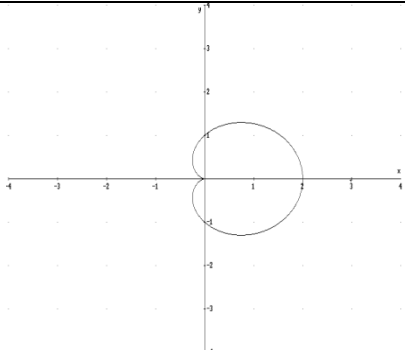
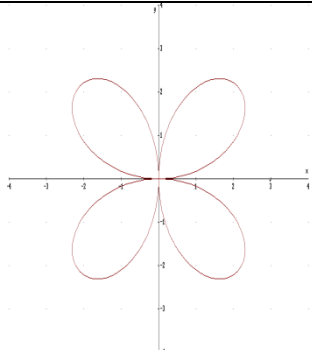
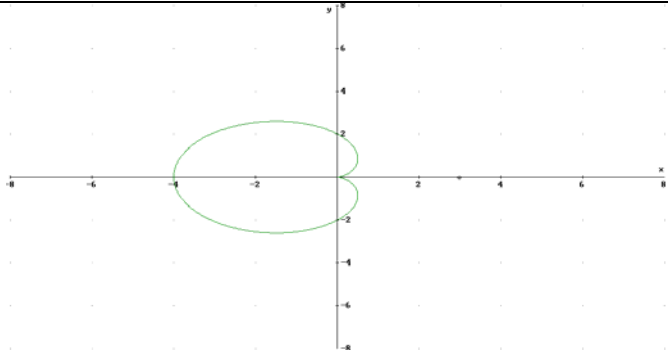
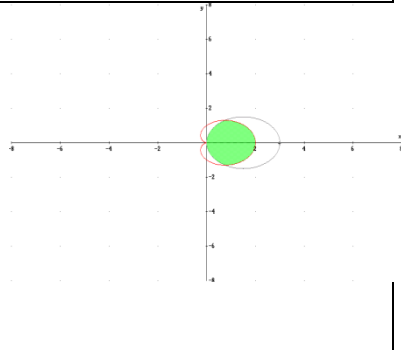
1.- Con funciones dadas por su ecuación cartesiana:

Función	$y = \cosh x$	$y = \ln(1 - x^2)$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$	$y^2 = 2xe^{-2x}$
Aplicación pedida	Superficie engendrada al girar la función alrededor del eje de abscisas en [0,1]	Longitud del arco de curva desde $x=0$ hasta $x=1/2$	Área del triángulo curvilíneo determinado por los puntos $V(3,0)$, $P(4, \frac{\sqrt{35}}{3})$, $Q(4,0)$.	Volumen del sólido engendrado al girar la curva alrededor de su asíntota.
Gráfica aproximada				
Planteamiento del problema	$\int_0^1 2\pi \cosh x \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx$	$\int_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)^2} dx$	$\int_3^4 \frac{\sqrt{5} \sqrt{x^2 - 9}}{3} dx$	$\int_0^1 \pi 2xe^{-2x} dx$
Resultado	$\frac{\pi}{4} (e^2 - e^{-2}) + \pi$	$\ln 3 - 1/2$	$-\frac{3\sqrt{5}}{2} \ln(1 + \sqrt{7}) + \frac{3\sqrt{5}}{4} \ln 6 + \frac{2\sqrt{35}}{6}$	$\pi/2$

2.- Con funciones dadas por sus ecuaciones paramétricas:

Función	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	$\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
Aplicación pedida	Área encerrada por la curva.	Volumen engendrado por la rotación del área encerrada por un arco de la cicloide y el eje X alrededor del eje Y	Perímetro de la curva.	Superficie de revolución engendrada al girar la curva alrededor del eje de abscisas.
Gráfica aproximada				
Planteamiento del problema	$-4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin^4 t \cos^2 t dt$	$\pi \int_{2\pi}^0 (t - \operatorname{sen} t)^2 \operatorname{sen} t dt$	$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3 \cos t \sin^2 t)^2 + (3 \cos^2 t \sin t)^2} dt$	$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \operatorname{sen} t \sqrt{(e^t (\cos t - \operatorname{sen} t))^2 + (e^t (\operatorname{sen} t + \cos t))^2} dt$
Resultado	$\frac{3}{8} \pi$	$6\pi^3$	6	$2\sqrt{2}\pi \left(\frac{2e^\pi + 1}{5} \right)$

3.- Con funciones dadas en forma polar:

Función	$r = 1 + \cos \alpha$	$r = 3 \operatorname{sen}(2\alpha)$	$r = 2(1 - \cos \alpha)$	$\begin{cases} r_1 = 3 \cos \alpha \\ r_2 = 1 + \cos \alpha \end{cases}$
Aplicación pedida	Longitud de la curva.	Volumen engendrado por la rotación de la curva alrededor del eje polar.	Superficie que engendra al girar alrededor del eje de simetría (polar).	Área común a ambas curvas.
Gráfica aproximada				
Planteamiento del problema	$2 \left(\int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + (-\sin \alpha)^2} d\alpha \right)$	$2 \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \operatorname{sen} 2\alpha)^3 \sin \alpha d\alpha$	$2\pi \int_0^\pi 2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha \sqrt{2^2(1 - \cos \alpha)^2 + 2^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$	$2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos \alpha)^2 d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \alpha)^2 d\alpha \right)$
Resultado	8	$\frac{576}{35} \pi$	$\frac{128}{5} \pi$	$\frac{5}{4} \pi$