



FÓRMULA DE TAYLOR



- 1.- a) Obtener la *fórmula de Taylor* de la función $\ln x$ en un entorno de $a=1$.
 b) Calcular $\ln(1,1)$ con el *polinomio de Taylor* de grado 5 y estimar el *error* cometido.
 c) Calcular $\ln(1,1)$ con un *error* menor que una diezmilésima.

Solución

2.- Hallar una aproximación del valor numérico de $\ln 2$, dando una cota del *error* cometido, utilizando los *polinomios de Maclaurin* de grado 5 de las funciones:

a) $f(x)=\ln(1+x)$

b) $g(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Escribir las *fórmulas de Maclaurin* de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución

- 3.- Escribir la *fórmula de Maclaurin* de la función $f(x)=e^x$.
 b) Calcular de forma aproximada \sqrt{e} tomando el *polinomio de Maclaurin* de grado 5.
 c) Acotar el *error* cometido en dicha aproximación.
 d) Calcular n en la *fórmula de Maclaurin* para obtener un valor aproximado de \sqrt{e} con un *error* menor de 10^{-6} .
 e) Dado el *polinomio de Maclaurin* $T_n(e^x, 0)$ obtenido en el apartado a) se pide calcular:

i) $T_n(e^{2x}, 0)$

ii) $T_n(e^{2x+3}, 0)$

iii) $T_n(e^{x^2}, 0)$.

Solución

- 4.- a) Escribir la *fórmula de Maclaurin* de la función $y=\cos x$.
 b) Calcular $\cos 1$ con un *error* menor de 10^{-7} .
 c) Deducir a partir de a) el polinomio $T_n(\cos x^2, 0)$.
 d) Usar c) para estimar $\int_0^{1/2} \cos(x^2) dx$ con tres cifras decimales exactas.

Solución

- 5.- a) Demostrar que si $y=f(x)$ es una *función impar*, entonces $T_n(f(x), 0)$ solo tiene potencias impares. Análogamente si $f(x)$ es una *función par*, entonces $T_n(f(x), 0)$ solo tiene potencias pares.
 b) Desarrollar $\operatorname{tg} x$ en potencias de x hasta el término de grado 5, empleando la igualdad $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$.

Solución

- 6.- a) Hallar la *fórmula de Taylor* de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $a=1$.
 b) La aproximación $\sqrt[3]{x} \approx \frac{5x^3 - 24x^2 + 60x + 40}{81}$ se utiliza cuando $|x - 1|$ es pequeño, es decir, para x próximos a 1. Acotar el *error* cometido en dicha aproximación cuando $|x - 1| \leq 0,01$.



FÓRMULA DE TAYLOR



Solución

7.- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Solución

8.- Para cada una de las funciones siguientes y para los valores de a y n indicados se pide:

a) Hallar el *polinomio de Taylor*.

b) El *resto de Lagrange* correspondiente al polinomio obtenido en a)

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{para } a = 4 \text{ y } n = 3.$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{para } a = 0 \text{ y } n = 4.$$

$$f(x) = \ln(\cos x) \quad \text{para } a = 0 \text{ y } n = 3.$$

$$f(x) = \cos x \quad \text{para } a = \frac{\pi}{3} \text{ y } n = 4.$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{para } a = \frac{\pi}{4} \text{ y } n = 4.$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{para } a = 1 \text{ y } n = 3.$$

Solución

9.- Utilizando los polinomios y los *restos de Lagrange* correspondientes obtenidos en el ejercicio anterior, se pide hallar el valor aproximado y una estimación del *error* cometido para: $\sqrt{5}$ $\cos 1$ $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$

Solución

10.- Explicar la procedencia de las siguientes igualdades aproximadas, válidas para valores pequeños de $x > 0$ y acotar el *error* cometido en las mismas

$$\ln(\cos x) \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

$$\operatorname{arcsen} x \approx x + \frac{x^3}{6}$$

$$\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

Solución

11.- Sea $f(x) = xe^x + \operatorname{tg}(x)$

a) Hallar la *fórmula de Maclaurin* de orden 3 de f .

b) Hallar una aproximación del valor $f(0,01)$ con el *polinomio de Maclaurin* de orden 3

c) Acotar el *error* cometido en el cálculo de $f(0,01)$ en el apartado b)

Solución

12.- Hallar el *polinomio de Maclaurin* de la función $f(x) = \cos x$, de grado mínimo, que aproxime $\cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ con un *error* menor que 0.0005. A continuación



FÓRMULA DE TAYLOR



calcular el valor aproximado de $\cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ (con las cifras decimales que delimita el **error** permitido).

Solución

13.-

- Escribir la **fórmula de Maclaurin** de grado 3 de la función $y = \arctg x$
- Calcular el valor aproximado de $\arctg(0,1)$, utilizando el **polinomio de Maclaurin** del apartado a) y acotar el **error** cometido.
- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) - x}{4x^3}$

Solución

14.- Dada la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, calcular el **polinomio de Maclaurin** de grado 4 y hallar el valor aproximado de $f(0,1)$ utilizando dicho polinomio.

Solución

15.- ¿Para qué valores de x podemos tomar $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ por $\sin x$ con un **error** menor de 0,0001?

Solución

16.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}$, se pide:

- Hallar el **polinomio de Maclaurin** de grado 4 de la función f .
- Utilizando el polinomio de Maclaurin de grado 2, hallar $\frac{1}{\sqrt{0,9^5}}$, dando una estimación del **error** cometido.
- ¿Es desarrollable la función f en serie de **Taylor** en $a=2$? Justifica la respuesta.

Solución

17.- a) Obtener el **polinomio de Maclaurin** de grado 2, de la función

$$f(x) = \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

- Utilizando el polinomio anterior, hallar $f(0,1)$.
- Acotar el **error** cometido en la aproximación anterior.

Solución

18.- Usando Derive y aplicando la **fórmula de Taylor**, calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{arcsen} x^2}{\sqrt{1+x^2} - \cos x - \frac{5}{6} \ln(1-x)}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}.$$



FÓRMULA DE TAYLOR



$$c) \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x]^{\cot gx^3} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}.$$

Solución

19.- Usando Derive resolver el siguiente problema: Dada la función $f(x)=\ln(1+x)$, se pide:

- Obtener la expresión de la *derivada* n -ésima de la función.
- Obtener la expresión de $f^{(n)}(0)$.
- Obtener los *polinomios de Maclaurin* de grado 3,4,5,6,7,8,9,10.
- Representarlos gráficamente junto con la propia función.
- Escribir la expresión de las *fórmulas de Maclaurin* de f de grado 3,4 y 5.
- Utilizar cada uno de los desarrollos del apartado e) para obtener una aproximación de $\ln(1.1)$.
- Acotar el *error* cometido en cada caso.
- Si se quiere obtener el valor aproximado de $\ln(1.1)$ con diez cifras decimales exactas ¿cuál es el menor orden del desarrollo de *Maclaurin* de f que habrá que usar?
- ¿Es posible utilizar Maclaurin para calcular una aproximación de $\ln(2.5)$?

Solución

20.- a) Desarrollar en serie de *Maclaurin* la función la función $f(x)=(1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$.

- Usando el apartado a) para el valor de " a " adecuado, calcular $\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$,

tomando los cuatro primeros términos del desarrollo ¿Cuántas cifras exactas se obtienen con este método?

Solución

21.- Hallar el grado mínimo del *polinomio de Maclaurin* para calcular con un *error* menor que 0.001.

- $f(0.5)$ siendo $f(x) = \ln(1+x)$
- $f(0.6)$ siendo $f(x) = \cos(\pi x^2)$.

Solución

22.- Dada la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$, se pide:

- Escribir la *fórmula de Maclaurin*.
- Hallar el grado del polinomio que aproxima el valor de $\frac{1}{e}$ con un *error* $|R_n| < 0.00005$.

Con el polinomio obtenido en b, hallar el valor aproximado de $\frac{1}{e}$ con el número de cifras decimales que delimita el *error* permitido.

Solución



FÓRMULA DE TAYLOR



23.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, se pide:

- Calcular el *polinomio de Maclaurin* para $n = 5$.
- Hallar el valor aproximado de $f(0.1)$ que se obtiene con el polinomio anterior.
- Estimar el *error* cometido en la aproximación anterior y corregir la misma.
- Si tomamos *polinomios de Maclaurin* de grado cada vez mayor ($n \rightarrow \infty$), el *error* al aproximar $f(0,1)$ ¿aumenta o disminuye? ¿y para $f(1)$?

Solución

24.- Dada la función $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x+1}{2}\right)$, se pide:

- Escribir la *fórmula de Taylor* en el punto $a=1$.
- Acotar el *error* cometido en el cálculo de $\log_{10}(1,1)$ utilizando el *polinomio* de grado 3.
- Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $\log_{10}(1,1)$ con un *error* menor a 10^{-6}

Solución

25.- Dada la función $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

- Utilizar el *polinomio de Maclaurin* de grado 10 para calcular $f(1)$.
- Estimar el *error* cometido en la aproximación anterior y dar $f(1)$ con las cifras exactas.
- Obtener la aproximación de la integral de la función $f(x)$ entre 0 y 1 utilizando el polinomio del apartado a).

Solución

26.- Obtener $\sqrt[5]{1.5}$ con una aproximación inferior a una diezmilésima utilizando el *polinomio de Maclaurin* de la función $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$.

Solución

27.- Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}$, se pide:

- Fórmula de Maclaurin* de grado 4 de $f(x)$.
- Dar un valor aproximado de $\sqrt{1.5}$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* obtenido en el apartado anterior.
- Acotar el *error* cometido en dicha aproximación.

Solución



FÓRMULA DE TAYLOR



28.- Dada la función $f(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$ Se pide:

a) *Polinomio de Maclaurin* de grado 5 de $f(x)$ y *resto de Lagrange* correspondiente a dicho polinomio.

b) Calcular el valore aproximados de $\cos\left(\ln\left(\frac{1}{0.9}\right)\right)$ mediante el polinomio de Maclaurin anterior y acotar el *error* cometido

Solución

29.- Dada la función $y = e^{\cos x}$, se pide:

a) Calcular y' , y'' , y'''

b) Escribir el *polinomio de segundo grado de Maclaurin* de la función dada

c) Usando el polinomio anterior calcular aproximadamente $\sqrt{e} = e^{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ y acotar el *error* cometido en dicha aproximación

d) Hallar los extremos relativos de la función $y = e^{\cos x}$

Solución

30.-Sea la función $f(x) = xe^{-x^2}$, se pide:

a) Hallar una aproximación de $f(1/2)$ y estimar el *error* cometido al usar el *polinomio de Taylor* de f para $a=1$, $n=7$.

b) Lo mismo que en el apartado a) tomando el *polinomio de Maclaurin* de grado 7 de f .

c) Argumentar cuál de ambos polinomios es el más adecuado para aproximar $f(1/2)$.

d) Obtener el *polinomio de Maclaurin* de grado n de la función $f(x)$ a partir del polinomio de grado n de e^{-x} que es el que sigue:

$$T_n[e^{-x}, a = 0,] = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Solución

31.- Dada la función $f(x) = (x+1)e^{\frac{x-1}{x+1}}$, se pide:

a) Comprobar si se verifica la identidad: $(x+1)^2 f'(x) - (x+3)f(x) - 1 = 0$

b) Escribir el *polinomio de Maclaurin* de grado 5 de la función $f(x)$.

c) Calcular un valor aproximado de $f(0.1)$ con el polinomio anterior.

d) Estimar el *error* cometido en dicha aproximación.

e) ¿Existe algún valor de x ($x = a$) para el cuál no se cumplan las hipótesis de la *fórmula de Taylor*?

Solución

32.- Dada la función $f(x) = 4 \operatorname{arctg}(x)$, se pide:

a) Hallar una aproximación del valor de $f(1)$ utilizando el *polinomio de Maclaurin*, de grado 10, de la función $f(x)$.



FÓRMULA DE TAYLOR



b) Estimar el **error** cometido en la aproximación anterior.

Solución

33.- a) Calcular aproximadamente $\cosh 1$ utilizando el **polinomio de Maclaurin** de grado 10 de la función $\cosh x$.

b) Acotar el **error** cometido en la aproximación anterior usando el **resto de Lagrange**.

Solución

34.- a) Calcular aproximadamente $\arg \sinh 1$ utilizando el **polinomio de Maclaurin** de grado 10 de la función $\arg \sinh x$.

b) Acotar el **error** cometido en la aproximación anterior usando el **resto de Lagrange**.

Solución

35.- Dada la función $\sqrt[3]{1+2x}$, se pide:

a) Calcular el **polinomio de Maclaurin** de grado 5 de dicha función.

b) Utilizar el polinomio anterior para obtener un valor aproximado de $\sqrt[3]{3}$ estimando una cota máxima del **error** cometido.

c) Utilizar el polinomio anterior para obtener un valor aproximado

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+2x} \, dx$$

Solución

36.- a) Obtener el **polinomio de Maclaurin** de grado n de la función:

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

b) Tomando en particular $n=3$ calcular aproximadamente $\ln \sqrt{11/9}$ y acotar el **error** en la aproximación.

Solución

37.- Dada la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ se pide:

a) **Fórmula de Taylor** de grado 5 en el punto $a = 1$

b) Dar un valor aproximado de $\operatorname{arctg} (0.8)$ utilizando el **polinomio de Taylor** de grado 5 obtenido en el apartado anterior.

c) Acotar el **error** cometido en dicha aproximación.

Solución

38.- Sea $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Obtener $f(1.005)$ usando el **polinomio de Taylor** de grado 2 de f en potencias de $(x-1)$.

Solución

39.- Obtener el **polinomio de Taylor** de orden dos de la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$ en el punto de abscisa 1.



FÓRMULA DE TAYLOR



Solución

40.- ¿Qué **error** se comete al tomar como valor del número e la fracción 65/24?

Solución

41.- Calcular $\sin 20^\circ$ tomando $n = 3$ en el desarrollo de **Maclaurin**. Hallar una cota del **error** cometido en dicho cálculo.

Solución

42.- Calcular los **polinomios de Maclaurin** de grado tres de las funciones $\cos x$ y $\sin(2x)$, con sus correspondientes **restos de Lagrange**. Acotar el **error** cometido en el cálculo de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ y de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ con los dos polinomios anteriores.

Solución

43.- Sea la función continua definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x=0 \end{cases}$. Se pide:

- Hallar α para que efectivamente la función sea continua en $x=0$.
- Obtener el **polinomio de Maclaurin** de $f(x)$ de grado 4.
- Aproximar $f(1)$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y estimar el **error** cometido.

Solución

44.- Dada la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

- Escribir la **fórmula de Maclaurin** de f .
- Hallar el valor aproximado de $\sqrt{1.1}$, tomando hasta el término de grado 3 en el desarrollo del apartado a).
- Acotar el **error** cometido en el apartado anterior.

Solución

45.- Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$. a) Escribir la **fórmula de Taylor** de f para $a=1$. b) Hallar el valor aproximado de $\sqrt{1.1}$, tomando hasta el término de grado 5 en el desarrollo del apartado a). c) Acotar el **error** cometido en el apartado anterior.

Solución

46.- Dada la función $f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

- Hallar el valor aproximado de $f(0.5)$, tomando hasta el término de grado 5 en el desarrollo del **polinomio de Maclaurin** de la función $f(x)$.
- Acotar el **error** cometido en el apartado anterior.

Solución

47.- Hallar el grado mínimo del **polinomio de Maclaurin** para calcular $f(0.5)$, con un **error** menor que 0.001, siendo $f(x) = 1+x^3 \operatorname{sen} x$.



FÓRMULA DE TAYLOR



Solución

48.- a) Hallar el **polinomio de Taylor** de grado 4 de la función $f(x) = \cos(\pi \ln(x))$ en $a = e$.

b) Acotar el **error** cometido si utilizamos el polinomio anterior para evaluar $f(2)$.

c) Calcular, SIN USAR DERIVE, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 + \cos(\pi \ln(x))}{e - x}$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado a).

Solución

49.- Obtener $\sqrt[3]{e}$ con un **error** menor que 10^{-4} .

Solución

50.- Para valores de x entre 40° y 50° , obtener una cota del **error** que se comete al efectuar la aproximación siguiente:

$$\sin x \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right].$$

Solución

51.- Dada la función $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$, se pide:

a) **Dominio** de f .

b) **Polinomio de Maclaurin** de f de grado 3.

c) Calcular de forma aproximada $f(1)$ utilizando el polinomio anterior.

d) Dar una acotación del **error** cometido en el apartado anterior y expresar $f(1)$ sólo con cifras decimales exactas.

e) ¿Existe la **fórmula de Taylor** de f de algún orden en $a = -1$?

Solución

52.- Si $p_3(x) = 5 - 3(x - 4)^2 + 9(x - 4)^3$, es el **polinomio de Taylor** de grado 3 de una función $f(x)$ en el punto $a = 4$, se pide:

a) $f(4)$, $f'(4)$, $f''(4)$

b) ¿Tiene la función $f(x)$ un **máximo** o un **mínimo** relativo en $a = 4$?

c) ¿Es f **cóncava** o **convexa** en un entorno de $a = 4$?

Solución

53.- Dada la función $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$, se pide:

a) **Dominio** de f .

b) **Polinomio de Maclaurin** de f de grado 3.

c) Calcular de forma aproximada $f(-1)$ utilizando el polinomio anterior.

d) Dar una acotación del **error** cometido en el apartado anterior y expresar $f(-1)$ sólo con cifras decimales exactas.

e) ¿Existe la **fórmula de Taylor** de f de algún orden en $a = 1$?

Solución



FÓRMULA DE TAYLOR



54.- Si $p_3(x) = 4 + (x - 2)^2 + 6(x - 2)^3$, es el *polinomio de Taylor* de grado 3 de una función $f(x)$ en el punto $a = 2$, se pide:

- $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$
- ¿Tiene la función $f(x)$ un *máximo* o un *mínimo* relativo en $a = 2$?
- ¿Es f *cóncava* o *convexa* en un entorno de $a = 2$?

Solución

55.- Dada la función $f(x) = x^2 \ln(x + 1)$, se pide:

- Hallar una aproximación de $f(0,5)$ usando el *polinomio de Maclaurin* de grado 5.
- Acotar el *error* cometido en el apartado anterior.

Solución

56.- Sea la función $f(x) = \ln(x + 2)$. Se pide:

- Dominio* de $f(x)$.
- Aproximación lineal de $f(x)$ en un entorno de $a = -1$.
- Polinomio de Taylor* de orden 3 de f en $a = -1$.
- Calcular de forma aproximada $\ln(0.9)$ utilizando el polinomio anterior.
- Acotar el *error* cometido en dicha aproximación y dar $\ln(0.9)$ con cifras decimales exactas.
- ¿De qué grado debería ser el polinomio de aproximación para que el *error* fuera menor que una cienmilésima?

Solución

57.- Dada la función $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x}$, se pide:

- Hallar los *polinomios* de aproximación de *Taylor* de grado 5 en los puntos $a=0$ y $a=1$
- Hallar el valor aproximado de $f(x)$ en $x=1/2$ con cada uno de los polinomios obtenidos en a).
- Calcular la cota de *error* cometido en las aproximadas obtenidas en b)
- Razonar cuál de las dos aproximaciones es más precisa.

Solución

58.- Dada la función $y = \ln(x + 1)$, averiguar el grado que hay que tomar en el *polinomio de Maclaurin* para aproximar $\ln(1,5)$ con un *error* menor que 0,0001.

Solución

- Hallar el *polinomio de Taylor* de la función: $f(x) = \operatorname{tg}x$ en $a = 0$ y $n = 2$
- Sea la función $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$, hallar una aproximación del valor $\operatorname{tg}(0.5)$ con el *polinomio de Maclaurin* de grado 5 y acotar el *error* cometido.

Solución

- Hallar el *polinomio de Taylor* de la función: $f(x) = xe^x$ en $a = 0$ y $n = 2$.
- Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $f(x)=e$ con un *error* menor que 10^{-4}



FÓRMULA DE TAYLOR



Solución

- 61.- a) Hallar el *polinomio de Taylor* de la función: $f(x) = \arcsen(x)$ en $a=0$ y $n=2$.
b) Hallar una aproximación del valor $\arcsen(0.1)$ con el *polinomio de Maclaurin* de grado 5 y acotar el *error* cometido.

Solución

- 62.- Sea $f(x) = \arcsen(2x)$
a) Teoría: Escribir la definición del *polinomio de Maclaurin* de grado n .
b) Hallar una aproximación del valor $\arcsen(0.1)$ con el *polinomio de Maclaurin* de grado 5 y acotar el *error* cometido.

Solución

- 63.- Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:
a) Escribir la *fórmula de Maclaurin*.
b) Acotar el *error* cometido en el cálculo de $f\left(\frac{1}{5}\right)$ utilizando el polinomio de grado 5.
c) Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $f\left(\frac{1}{5}\right)$ con un *error* menor a 10^{-6}

Solución

- 64.- Dada la función $f(x) = \arctg\sqrt{x}$, se pide:
a. Escribir la *fórmula de Taylor* de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$
b. Hallar el valor aproximado de $\arctg\sqrt{0.5}$, con el polinomio obtenido en a) y una cota del *error* cometido.

Solución

- 65.- Dada la función $f(x) = e^{-3x}$, se pide hallar el grado n del *polinomio de Maclaurin* que se necesita utilizar para aproximar e^{-3} con un *error* menor que 0.001

Solución

- 66.- Dada la función $f(x) = \ln\sqrt{x}$ se pide:
a. Escribir la *fórmula de Taylor* de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$
b. Hallar el valor aproximado de $\ln\sqrt{2}$ con el polinomio obtenido en a) y una cota del *error* cometido

Solución

- 67.- Dada la función $f(x) = \ln(1+x)$, se pide hallar el grado n del *polinomio de Maclaurin* que se necesita utilizar para aproximar $\ln 1.5$ con un *error* menor que 0.001

Solución

- 68.- Dada la función $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, se pide:



FÓRMULA DE TAYLOR



- a) Escribir la **fórmula de Taylor** de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$
b) Hallar el valor aproximado de $e^{\sqrt{2}}$, con el polinomio obtenido en a) y una cota del **error** cometido.

Solución

69.- Dada la función $f(x) = \ln(1-x)$, se pide hallar el grado n del **polinomio** que se necesita utilizar para aproximar $f(0.5)$ con un **error** menor que 0.001.

Solución

70.- Dada la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ se pide:

- a. Escribir la **fórmula de Taylor** de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$
b. Hallar el valor aproximado de $1/\sqrt{1.5}$, con el polinomio obtenido en a) y una cota del **error** cometido

Solución

71.- Dada la función $f(x) = e^{-5x}$, se pide hallar el grado n del **polinomio de Maclaurin** que se necesita utilizar para aproximar e^{-5} con un **error** menor que 0.001.

Solución

72.- a) Calcular el **polinomio de Taylor** de orden 4 de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, en

$$a = -\frac{\pi}{6}.$$

b) Utilizando el polinomio del apartado anterior calcular $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

c) Estimar el **error** cometido al calcular $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ con el polinomio del apartado a).

Solución

73.- Dada la función $f(x) = \ln(1+2x)$, se pide:

- a) Obtener, el **polinomio de Maclaurin** de grado 5 de la función $f(x)$, así como la **fórmula de Maclaurin** para $n=5$.
b) Calcular un valor aproximado de $\ln(3/2)$ y una cota del **error** cometido utilizando los resultados del apartado anterior.
c) Usando el procedimiento que consideres más adecuado, calcula el grado de **polinomio** que se necesita aplicar para obtener una aproximación de $\ln(3/2)$ que tenga las 3 primeras cifras decimales exactas.

Solución

74.- Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, se pide:

- a) **Polinomio de Maclaurin** de grado 5 de f
b) Calcular de forma aproximada \sqrt{e} , utilizando el polinomio anterior.
c) Acotar el **error** cometido en la aproximación anterior.



FÓRMULA DE TAYLOR



Solución

75.- Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x+\pi)}$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se pide:

- Polinomio de Maclaurin* de grado 5 de f
- Calcular de forma aproximada \sqrt{e} , utilizando el polinomio anterior.
- Acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.

Solución

76.- La medida del radio R de una *esfera* ha dado 6 cm con una cota de error de 0.02cm.

- Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el *volumen* de la *esfera*.
- Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de R para que el error cometido al calcular el volumen no supere el 0.6%.

Solución

77.- Sea la función $f(x)=\operatorname{arcsen}x$

- Comprobar que verifica las condiciones del *teorema de Taylor* en $a=0$ y $n=3$.
- Calcular la *fórmula de Maclaurin* de $f(x)$ para $n=3$.
- Calcular $\operatorname{arc} \operatorname{sen}(0,1)$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* de grado 3 y acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.
- Dar $\operatorname{arc} \operatorname{sen}(0,1)$ con las cifras decimales exactas que los cálculos de c) te permitan asegurar.

Solución

78.- Dada la función $f(x) = x \ln(x+1)$, hallar el grado del *polinomio de Maclaurin* de la función $f(x)$ necesario para aproximar $f(0.1)$ con un *error* menor que 10^{-4} .

Solución

79.- Hallar, utilizando *polinomios de Taylor*, el valor de los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg}x}{4x^3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x) - x}{-\operatorname{sen}(x^2)} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{arcsen} x + 2x)^2}{1 - \cos x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen}x}$$

Solución

80.- Un topógrafo está a 30m de la base de un árbol y mide el ángulo de elevación (a la copa) obteniendo $\alpha=71^\circ$ con una cota de error de 0,5.

- Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular la altura h del árbol (pasar α a radianes).
- Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de α para que el error cometido al calcular la altura del árbol no supere el 1%.

Solución

81.- Sea la función $f(x)=x\operatorname{sen}x$



FÓRMULA DE TAYLOR



- Comprobar que verifica las condiciones del *teorema de Taylor* en $a=0$ y $n=3$.
- Calcular la *fórmula de Maclaurin* de $f(x)$ para $n=3$.
- Calcular $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* de grado 3 y acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.
- Dar $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ con las cifras decimales exactas que los cálculos de c) te permitan asegurar.

Solución

82.- Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, hallar el *grado del polinomio* de Maclaurin de la función $f(x)$ necesario para aproximar $1/e$ con un *error* menor que 10^{-4} .

Solución

83.- La medida del radio R de la base de un mástil ha dado 14 cm con una cota de error de 0.25cm.

- Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el *área* de la base del mástil.
- Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de R para que el error cometido al calcular el *área* no supere el 1%.

Solución

84.- a) Hallar el *polinomio de Taylor* de grado 3 de la función $f(x) = \cos^2 x$ en el punto $a = \frac{\pi}{4}$ y utilizar el polinomio anterior para calcular un valor aproximado de $\cos^2\left(1.1 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.

Solución

85.- Obtener un valor del número e con un *error* inferior a una millonésima.

Solución

86.- Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Obtener la expresión del *polinomio de Maclaurin* de grado 3. Calcular $\ln(3)$ con dicho polinomio y acotar el *error* cometido.

Solución

87.- Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$, se pide:

- Calcular la derivada n -ésima de $f(x)$.
- Escribir la *fórmula de Taylor* en el punto $a=1$.



FÓRMULA DE TAYLOR



- c) Acotar el *error* cometido en el cálculo de $\ln(1,1)$ utilizando el polinomio de grado 3.
- d) Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $\ln(1,1)$ con un *error* menor a 10^{-6}

Solución

88.- Dada la función $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$.

- a) Hallar el *polinomio de Maclaurin* de grado 1 de la función $f(x)$.
- b) Utilizar el polinomio del apartado a) para calcular un valor aproximado de $f(18^\circ)$ Nota: Utilizar $\pi = 3.1416$

Solución

89.- Dada la función $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ se pide:

- a) Escribir la *fórmula de Taylor* de la función $f(x)$ para $n = 3$ y $a=1$.
- b) Hallar el valor aproximado de $e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$, con el polinomio obtenido en a)
- c) Hallar una cota del *error* cometido en b).

Solución

90.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ se pide:

- a) Escribir la *fórmula de Taylor* de la función $f(x)$ para $n = 3$ y $a=1$.
- b) Hallar el valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, con el polinomio obtenido en a)
- c) Hallar una cota del *error* cometido en b).

Solución

91.- La medida del lado L , de un cristal cuadrado es de 28 cm con una cota de error de 0.5 cm.

- a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el área del cristal.
- b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de L , para que el error cometido al calcular el área no supere el 1%.

Solución

92.- La medida del lado L de un cubo o exaedro regular ha sido 14 cm con una cota de error de 0.25 cm.

- a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el volumen del cubo.
- b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de L para que el error cometido al calcular el volumen no supere el 1%.

Solución

93.- La medida del área de una pieza circular ha sido 25 cm^2 con una cota de error de 0.3 cm^2 .



FÓRMULA DE TAYLOR



- a) Aproximar, mediante diferenciales, el porcentaje del **error** propagado (cota) cuando calculamos el radio de la pieza.
- b) Estimar el máximo error porcentual admisible en la medida del área para que error cometido al calcular el radio no supere el 1%

Solución

94.- Calcular con 3 cifras decimales (exactas) las siguientes integrales utilizando **polinomios de Maclaurin** de la función integrando como infinitésimos equivalentes e indica el menor grado del polinomio necesario

$$\int_0^{0,1} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx; \quad \int_0^{0,1} e^{-x^2} dx$$

Solución

95.- La **clotoide** es una curva (plana) de enlace de vías de comunicación cuyas

ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2} ds \\ y = \int_0^s \text{sen} \frac{s^2}{2a^2} ds \end{cases}, \text{ donde } a \text{ es el parámetro de la}$$

clotoide y s es la longitud del arco.

Las integrales que las definen no admiten primitiva por lo que se aproximan utilizando **polinomios de Maclaurin** para las funciones integrando. Se pide obtener unas ecuaciones para $a=1/2$ con cuatro términos no nulos.

Solución

96.- Construido un depósito esférico para almacenamiento de líquidos, se le pide a un topógrafo que estime con la mayor precisión posible el volumen que puede contener. El topógrafo mide el radio R de la esfera que resulta ser de 11,35 m. con una cota de error estimado $dR < 20$ cm.

- a) Aplique el concepto de **diferencial** para aproximar el error propagado (porcentual) cometido al calcular el volumen V del depósito.
- b) Estimar el máximo error en la medida de R , para que el error propagado al calcular el volumen no supere el 3%.

Solución

97.- Para el control de calidad de una pieza cilíndrica de un cohete, con la medida de la altura igual al diámetro de la base, se le pide a un topógrafo que mida el radio R de la base con alta precisión y el resultado es de 6,14m. con una cota de error $dR < 6$ cm.

- a) Usar **diferenciales** para aproximar el máximo **error** propagado cometido, en términos porcentuales, al calcular el volumen del cilindro.
- b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de R para que el **error** cometido al calcular el volumen no supere el 1%.

Solución



FÓRMULA DE TAYLOR



98.- Dada la función $f(x) = e^x + 4\arctg(x)$. Se pide:

- Si es posible, hallar el *polinomio de Maclaurin* de f de grado 3.
- Calcular de manera aproximada el valor de $e + \pi$ utilizando el polinomio anterior.
- Calcular una cota del *error* cometido en la aproximación del apartado anterior.
- ¿De qué grado deber ser el *polinomio de Taylor* en $a = 0$ utilizado para calcular $f(0,1)$ y poder asegurar que el error sea menor de una cienmilésima?

Solución

99.- Un balón se infla de tal forma que su volumen crece a razón $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Hallar la variación del radio $r = 10 \text{ cm}$.

Solución



FÓRMULA DE TAYLOR



- 1.- a) Obtener la **fórmula de Taylor** de la función $\ln x$ en un entorno de $a=1$.
 b) Calcular $\ln(1,1)$ con el **polinomio de Taylor** de grado 5 y estimar el **error** cometido.
 c) Calcular $\ln(1,1)$ con un **error** menor que una diezmilésima

Solución:

a) Se calculan las sucesivas derivadas

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln x$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$2x^{-3}$	2
4	$-6x^{-4}$	-6

Supongamos que sea $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

Derivando $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ la cual es la expresión del término general, para el término $n+1$

Calculada la derivada n -ésima se puede escribir la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + R_n(x)$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} c^{-(n+1)}$$

$c \in (x,1)$, o bien, $c \in (1,x)$

$$b) T[\ln x, a=1, n=5] = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

sustituyendo $x=1,1$; resulta $\ln(1,1) \approx 0,095310333$. Acotamos el error con la formula del resto:

$$R_{n=5}(x) = f^{(6)}(c) \frac{(x-1)^6}{6!} = (-1)^5 \frac{(x-1)^6}{6c^6} \quad \text{con } c \in [1,x]$$

$$R_5(1.1) \leq \max_{c \in [1,1.1]} \left| (-1)^5 \frac{(1.1-1)^6}{6c^6} \right| \quad \text{cuyo máximo se da en } c=1, \text{ por ser la función decreciente.}$$

$$|R_5(1.1)| \leq \left| \frac{0.1^6}{6} \right| = 0.16 \cdot 10^{-6} < 0.0000002 \Rightarrow \ln(1,1) = 0,095310$$

c) Ahora el dato es el error $E(x) < 10^{-4}$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)c^{n+1}} \right| < 10^{-4} \quad \text{con } c \in [1,x]$$

con $n=3$ ya se cumple $E(1,1) < 0.1^{-4}/4$

$$T[\ln x, a=1, n=3] = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \Rightarrow \ln(1,1) = 0,095$$



FÓRMULA DE TAYLOR



2.- Hallar una aproximación del valor numérico de $\ln 2$, dando una cota del **error** cometido, utilizando los **polinomios de Maclaurin** de grado 5 de las funciones:

a) $f(x) = \ln(1+x)$

b) $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Escribir las **fórmulas de Maclaurin** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) Calculando la derivada n-ésima, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+c)^{-(n+1)}$$

$$c \in (0, x)$$

$$T[\ln(1+x), a=0, n=5] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

sustituyendo $x=1$; resulta $\ln(2) \approx 0,783333$. Acotamos el error con la fórmula del resto:

$$R_{n=5}(x) = f^{(6)}(c) \frac{x^6}{6!} = (-1)^5 \frac{x^6}{6(1+c)^6} \quad \text{con } c \in (0, x)$$

$$R_5(1) \leq \max_{c \in [0,1]} \left| (-1)^5 \frac{(2-1)^6}{6(1+c)^6} \right| \quad \text{cuyo máximo se da en } c=0.$$

$$|R_5(1)| \leq 0,167 \quad \text{cota del error}$$

b) Utilizando la expresión anterior:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+c)^{-(n+1)}$$

$$c \in (0, x)$$

se obtiene

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} (1-c)^{-(n+1)}$$

$$c \in (0, x)$$

que juntas dan:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \dots + ((-1)^{n-1} + 1) \frac{x^n}{n} +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[(-1)^n (1+c)^{-(n+1)} + (1-c)^{-(n+1)} \right] \quad \text{con } c \in (0, x)$$

ahora $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ y con $T\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), a=0, n=5\right] = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ resulta

$$T[\ln(2), a=0, n=5] = 2\frac{1}{3} + \frac{2(1/3)^3}{3} + \frac{(1/3)^5}{5} \Rightarrow \ln 2 \approx 0,69300411$$

Cota del error: $|R_5(1/3)| \leq 0,0004 \Rightarrow \ln(2) = 0,69$

- 3.- a) Escribir la **fórmula de Maclaurin** de la función $f(x)=e^x$.
- b) Calcular de forma aproximada \sqrt{e} tomando el **polinomio de Maclaurin** de grado 5.
- c) Acotar el **error** cometido en dicha aproximación.
- d) Calcular n en la fórmula de Maclaurin para obtener un valor aproximado de \sqrt{e} con un error menor de 10^{-6} .
- e) Dado el polinomio de Maclaurin $T_n(e^x, 0)$ obtenido en el apartado a) se pide calcular: i) $T_n(e^{2x}, 0)$ ii) $T_n(e^{2x+3}, 0)$ iii) $T_n(e^{x^2}, 0)$.

Solución:

a) Las sucesivas derivadas de la función exponencial coinciden con ella, por lo tanto, la fórmula de Maclaurin es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \text{ con } \theta \in (0,1)$$

b) $T[e^x, a=0, n=5] = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ para $e^x = \sqrt{e} \Rightarrow$ con $x=1/2$, obtenemos

$$\sqrt{e} \approx 1,648697917$$

c) Para acotar el error utilizamos el término complementario o resto:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \text{ con } \theta \in (0,1) \text{ Siendo } x=1/2 \text{ y } n=5$$

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \left| R_{n=5}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} e^{\theta\left(\frac{1}{2}\right)} \right| <_{\theta < 1} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} \sqrt{e} \right| <_{\sqrt{e} < e} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} e \right| <_{e < 3} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} 3 \right| = \mathbf{0,000065} \Rightarrow \sqrt{e} \approx 1,648$$

$$d) E\left(\frac{1}{2}\right) = \left| R_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta\left(\frac{1}{2}\right)} \right| <_{\theta < 1} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \sqrt{e} \right| <_{\sqrt{e} < e} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} e \right| <_{e < 3} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} 3 \right| < 10^{-6} \Rightarrow \mathbf{n=7}$$

e) Basta con sustituir en el apartado a) x por 2x, puesto que si $x \rightarrow 0$, entonces $2x \rightarrow 0$:

i) $T[e^{2x}, a=0] = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2\theta x} \text{ con } \theta \in (0,1)$

ii) $T[e^{2x+3}, 0] = e^3 T[e^{2x}, 0] = e^3 \left[1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2\theta x} \right] \theta \in (0,1)$ iii)

$$T[e^{x^2}, a=0] = \begin{cases} \text{si } n \text{ es par: } T_n(e^{x^2}, 0) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \\ \text{si } n \text{ es impar: } T_n(e^{x^2}, 0) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \end{cases}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



- 4.- a) Escribir la **fórmula de Maclaurin** de la función $y = \cos x$.
 b) Calcular $\cos 1$ con un **error** menor de 10^{-7} .
 c) Deducir a partir de a) el **polinomio** $T_n(\cos x^2, 0)$.
 d) Usar c) para estimar $\int_0^{1/2} \cos(x^2) dx$ con tres cifras decimales exactas.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\cos x$	1
1	$-\text{sen} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0
2	$-\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$	-1
3	$\text{sen} x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$	0
4	$\cos x = \cos\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$	1
.....
n	$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\theta \in (0,1)$

O bien,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } 0 < c < x$$

b) Conocido el error debemos calcular el valor de n

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 10^{-7} \text{ y aplicamos que el coseno se acota}$$

en valor absoluto por 1. Para $x=1$ queda: $\left| \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 10^{-7} = \frac{1}{10^7} \Leftrightarrow 10^7 < (n+1)! \Rightarrow n \geq 10$

También podemos usar directamente la expresión:

$$E(1) = |R_n(1)| = \max_{[0,1]} \left| \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-7}$$

$$\cos(1) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \approx \mathbf{0,5403023} \quad (\text{para } n=10)$$



FÓRMULA DE TAYLOR



c) Consideramos el polinomio $T_n[\cos z, 0]$ y sustituimos directamente z por x^2 , puesto que si $x \rightarrow 0$, entonces $x^2 \rightarrow 0$, y el polinomio resultante es de grado $2n$ por lo que hay que quitarle los términos de grado $>n$.

Ahora bien, también observamos que, en los términos del polinomio, las potencias de x son múltiplos de 4, por lo que:

si $n = 4k$, es decir, el grado del polinomio de Maclaurin es múltiplo de 4, entonces:

$$T_{n=4k}(\cos(x^2), 0) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$$

pero si $n = 4k+1, 4k+2, 4k+3$, entonces: $T_n(\cos(x^2), 0) = T_{4k}(\cos(x^2), 0)$

d)

$$T_{n=4}(\cos(x^2), 0) = 1 - \frac{x^4}{2!} \Rightarrow \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{x^4}{2!}\right) dx \approx 0.496875$$

$$T_{n=4}(\cos(x^2), 0) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} \Rightarrow \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}\right) dx \approx 0.4968840422$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x^2) dx \approx 0,496$$

5.- a) Demostrar que si $y=f(x)$ es una **función impar**, entonces $T_n(f(x), 0)$ solo tiene potencias impares. Análogamente si $f(x)$ es una **función par**, entonces $T_n(f(x), 0)$ solo tiene potencias pares.
b) Desarrollar $\operatorname{tg} x$ en potencias de x hasta el término de grado 5, empleando la igualdad $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$.

Solución:

a) Si $f(x)$ es una función impar se cumple que: $f(-x)=-f(x)$ y el polinomio de

$$\text{Maclaurin: } T_n(f(x), 0) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n =$$

$$= -T_n(f(-x), 0) = -a_0 + a_1x - a_2x^2 + \dots + (-1)^{n-1}a_nx^n \text{ resultando } a_k = 0 \text{ si } k \text{ es par o cero, por tanto}$$

$$T_n(f(x), 0) = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2k+1}x^{2k+1}$$

Si $f(x)$ es una función par se cumple que: $f(-x)=f(x)$ y el polinomio de

$$\text{Maclaurin: } T_n(f(x), 0) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n =$$

$$= T_n(f(-x), 0) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + \dots + (-1)^n a_nx^n \text{ resultando } a_k = 0 \text{ si } k \text{ es impar, por tanto}$$

$$T_n(f(x), 0) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2k}x^{2k}$$

b) Conocidos los desarrollos del seno $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ (ejercicio 15) y coseno

$$\operatorname{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ (ejercicio 4) y sabiendo que } \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{cos}x = \operatorname{sen}x:$$

$$T_5(\operatorname{tg}(x), 0)T_5(\operatorname{cos}(x), 0) = T_5(\operatorname{sen}(x), 0) \text{ excepto los términos de grado superior a 5}$$

Por ser $\operatorname{tg}x$ una función impar el polinomio de Maclaurin correspondiente tiene solamente potencias impares, luego $T_5(\operatorname{tg}(x), 0) = ax + bx^3 + cx^5$

$$\text{Luego } T_5(\operatorname{tg}(x), 0)T_5(\operatorname{cos}(x), 0) = (ax + bx^3 + cx^5) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) = T_5(\operatorname{sen}(x), 0)$$

$$T_5(\operatorname{tg}(x), 0) = ax + bx^3 + cx^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



6.- a) Hallar la **fórmula de Taylor** de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $a=1$.
 b) La aproximación $\sqrt[3]{x} \approx \frac{5x^3 - 24x^2 + 60x + 40}{81}$ se utiliza cuando $|x - 1|$ es pequeño, es decir, para x próximos a 1. Acotar el **error** cometido en dicha aproximación cuando $|x - 1| \leq 0,01$.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Taylor:

n	$f^n(x)$	$f^n(1)$
0	$x^{1/3}$	1
1	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$\frac{1}{3}$
2	$-\frac{2}{3^2}x^{-5/3}$	$-\frac{2}{3^2}$
3	$\frac{10}{3^3}x^{-8/3}$	$\frac{10}{3^3}$
.....
n	$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)\right)x^{-\frac{2+5\cdot(n-1)}{3}}$	$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)\right)$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + R_n(x)$$

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{(x-1)}{3} - \frac{(x-1)^2}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)\right)\frac{(x-1)^n}{n!} + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)\right)\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} c^{\frac{1}{3}-(n+1)}$$

$c \in (1, x)$

b) La aproximación es de grado 3: $\sqrt[3]{x} \approx \frac{5x^3 - 24x^2 + 60x + 40}{81} = T_n[\sqrt[3]{x}, a=1, n=3]$ y acotando el

$$\text{resto: } E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{8}{3} \frac{(x-1)^4}{4!} c^{-\frac{11}{3}} \right| \leq \left| \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{8}{3} \frac{(x-1)^4}{4!} \right|_{|x-1|<0,01} \leq \frac{5}{3^5} (0,01)^4 \leq \mathbf{10^{-9}}$$

La acotación de la expresión $c^{-\frac{11}{3}} = \frac{1}{c^{\frac{11}{3}}}$ puede ser 1, puesto que $1 < c < x$

$$7.- \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Solución:

A partir de los polinomios de Taylor de cada función trigonométrica en $a=0$ (Maclaurin) **ejercicio 5**, se resuelve:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_n[\operatorname{tg} x, a = 0] - T_n[\operatorname{sen} x, a = 0]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



8.- Para cada una de las funciones siguientes y para los valores de a y n indicados se pide:

a) Hallar el **polinomio de Taylor**.

b) El **resto de Lagrange** correspondiente al polinomio obtenido en a)

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{para } a = 4 \text{ y } n = 3.$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{para } a = 0 \text{ y } n = 4.$$

$$f(x) = \ln(\cos x) \quad \text{para } a = 0 \text{ y } n = 3.$$

$$f(x) = \cos x \quad \text{para } a = \frac{\pi}{3} \text{ y } n = 4.$$

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{para } a = \frac{\pi}{4} \text{ y } n = 4.$$

$$f(x) = \text{arctg } x \quad \text{para } a = 1 \text{ y } n = 3.$$

Solución:

$$T_n[f(x), a] = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = T_n[f(x), a] + R_n(x) = T_n[f(x), a] + f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } a < c < x \text{ ó } x < c < a$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=3}[f(x) = \sqrt{x}, a = 4] &= f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 = \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32} \frac{1}{2!}(x-4)^2 + \frac{3}{256} \frac{1}{3!}(x-4)^3 = \frac{x^3 - 20x^2 + 240x + 320}{512} \end{aligned}$$

b) El resto de Lagrange correspondiente es

$$R_{n=3}(x) = f^{(4)}(c) \frac{(x-4)^4}{4!} = \frac{15}{16c^{7/2}} \frac{(x-4)^4}{4!} \quad \text{con } 4 < c < x \text{ ó } x < c < 4$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=4}[f(x) = \sqrt{1+x}, a = 0] &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{8} \frac{1}{3!}x^3 - \frac{15}{16} \frac{1}{4!}x^4 = -\frac{5x^4}{128} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

b) El resto de Lagrange correspondiente es

$$R_{n=5}(x) = f^{(5)}(c) \frac{x^5}{5!} = \frac{105}{32(1+c)^{9/2}} \frac{x^5}{5!} \quad \text{con } 0 < c < x \text{ ó } x < c < 0$$

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=3}[f(x) = \ln(\cos x), a = 0] &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = \\ &= 0 + 0x - \frac{1}{2!}x^2 + 0 \frac{1}{3!}x^3 = -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

b) El resto de Lagrange correspondiente es



FÓRMULA DE TAYLOR



$$R_{n=3}(x) = f^{IV}(c) \frac{x^4}{4!} = \left(\frac{4}{\cos^2 c} - \frac{6}{\cos^4 c} \right) \frac{x^4}{4!} \text{ con } 0 < c < x \text{ ó } x < c < 0$$

$$f(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=4} \left[f(x) = \cos x, a = \frac{\pi}{3} \right] &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \\ &+ \frac{f^{IV}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 = \end{aligned}$$

$$\frac{81x^4 + 108x^3(3\sqrt{3} - \pi) + 54x^2(\pi^2 - 6\sqrt{3}\pi - 18) - 12x(\pi^3 - 9\sqrt{3}\pi^2 - 54\pi + 161\sqrt{3}) + \pi^4 - 12\sqrt{3}\pi^3 - 108\pi^2 + 648\sqrt{3}\pi + 1944}{3888}$$

b) El resto de Lagrange correspondiente es

$$R_{n=4}(x) = f^V(c) \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5}{5!} = -\sin(c) \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5}{5!} \text{ con } \left(\frac{\pi}{3}\right) < c < x \text{ ó } x < c < \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f(x) = \text{sen} x$$

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=4} \left[f(x) = \text{sen} x, a = \frac{\pi}{4} \right] &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \\ &+ \frac{f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 = \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}x^4}{48} - x^3 \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{48} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right) + x^2 \left(\frac{\sqrt{2}\pi^2}{128} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) - x \left(\frac{\sqrt{2}\pi^3}{768} + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{64} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}\pi^4}{12288} + \frac{\sqrt{2}\pi^3}{768} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{64} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) El resto de Lagrange correspondiente es

$$R_{n=4}(x) = f^V(c) \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} = \cos(c) \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} \text{ con } \left(\frac{\pi}{4}\right) < c < x \text{ ó } x < c < \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = \text{arctg} x$$

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=3} \left[f(x) = \text{arctg} x, a = 1 \right] &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x-1)^3 = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (x-1) - \frac{1}{2} \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3!} (x-1)^3 = \frac{x^3 - 6x^2 + 15x + 3\pi - 10}{12} \end{aligned}$$

b) El resto de Lagrange correspondiente es

$$R_{n=3}(x) = f^{IV}(c) \frac{(x-1)^4}{4!} = \frac{24c(1-c)^2 (x-1)^4}{(c^2+1)^4 4!} \text{ con } 1 < c < x \text{ ó } x < c < 1$$



FÓRMULA DE TAYLOR



9.- Utilizando los *polinomios* y los *restos de Lagrange* correspondientes obtenidos en el ejercicio anterior, se pide hallar el valor aproximado y una estimación del *error* cometido para:

$\sqrt{5}$

$\cos 1$

$\arctg \sqrt{2}$

Solución:

Para dar un valor aproximado de $\sqrt{5}$, y una estimación del error, usaremos el polinomio y resto obtenido para $f(x) = \sqrt{x}$ en el **ejercicio 8**.

Hallaremos primero una estimación del error.

Para ello hacemos $x=5$ y consideraremos una cota del valor absoluto de la derivada cuarta en $[4,5]$, es decir:

$$E(x=5) = |R_{n=3}(5)| \leq \max_{c \in [4,5]} \left| -\frac{15}{16c^{7/2}} \right| \frac{(5-4)^4}{4!} = \frac{15}{164^{7/2}} \frac{1}{4!} = 0.0003051757812$$

El máximo se alcanza en $c=4$ por ser decreciente.

Hallamos ahora el valor aproximado de $\sqrt{5}$ teniendo en cuenta el error

$$\sqrt{5} \approx \frac{5^3 - 20 \cdot 5^2 + 240 \cdot 5 + 320}{512} = \frac{1145}{512} \approx 2.236328125$$

$$2.236328125 - 0.0003051757812 < \sqrt{5} < 2.236328125 + 0.0003051757812$$

$$\text{Operando } 2.2360 < \sqrt{5} < 2.2366$$

Luego una aproximación de $\sqrt{5}$ con todas las cifras exactas es **2.236**

Para dar un valor aproximado de $\cos 1$, y una estimación del error, usaremos polinomio y resto obtenido para $f(x)=\cos x$ en el **ejercicio 8**.

Hallaremos primero una estimación del error.

Para ello hacemos $x=1$ y consideraremos una cota del valor absoluto de la derivada quinta en $[1,\pi/3]$, es decir:

$$E(x=1) = |R_{n=4}(1)| \leq \max_{c \in [1,\pi/3]} \left| \frac{\sin c}{5!} \right| \frac{(1-\pi/3)^5}{5!} = \frac{(1-\pi/3)^5}{5!} \approx 1.951713585 \cdot 10^{-9} < 0.000000002$$

Hallamos ahora el valor aproximado de $\cos 1$ teniendo en cuenta el error

$$\cos 1 \approx \frac{81 + 108(3\sqrt{3} - \pi) + 54(\pi^2 - 6\sqrt{3}\pi - 18) - 12(\pi^3 - 9\sqrt{3}\pi^2 - 54\pi + 161\sqrt{3}) + \pi^4 - 12\sqrt{3}\pi^3 - 108\pi^2 + 648\sqrt{3}\pi + 1944}{3888} \approx$$

$$0.5403023041$$

$$0.5403023041 - 0.000000002 < \cos(1) < 0.5403023041 + 0.000000002$$

$$0.540302302 < \cos(1) < 0.5403023061$$

Luego una aproximación de $\cos 1$ con todas las cifras exactas es **0.54030230**

Para hallar un valor aproximado de $\arctg \sqrt{2}$, y una estimación del error, usaremos polinomio y resto obtenido para $f(x)=\arctg \sqrt{x}$ en el **ejercicio 8**.

Hallaremos primero una estimación del error.

Para ello hacemos $x=\sqrt{2}$ y consideraremos una cota del valor absoluto de la derivada cuarta en $[1,\sqrt{2}]$, es decir:

$$E(x=\sqrt{2}) = |R_{n=3}(\sqrt{2})| \leq \max_{c \in [1,\sqrt{2}]} \left| \frac{24c(1-c)^2}{(c^2+1)^4} \right| \frac{(\sqrt{2}-1)^4}{4!}$$

Hallando el máximo formalmente se obtiene:



FÓRMULA DE TAYLOR



$$g(c) = \frac{24c(1-c)^2}{(c^2+1)^4} \Rightarrow g'(c) = \frac{24(5c^4 - 10c^2 + 1)}{(c^2+1)^5} = 0 \Rightarrow c = \begin{cases} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} \\ \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} \end{cases}$$

Entre 1 y $\sqrt{2}$ está $x = \sqrt{1 + 2 \cdot \sqrt{5}/5}$ y en dicho punto

$$g\left(\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}\right) = \frac{24 \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} \left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}\right)^2}{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1\right)^4} \approx 0.420963728, \text{ luego:}$$

$$E(x = \sqrt{2}) = |R_{n=3}(\sqrt{2})| \leq 0.420963728 \frac{(\sqrt{2}-1)^4}{4!} \leq 0.0005163339642 < \mathbf{0.0006}$$

Hallamos ahora el valor aproximado de $\arctg \sqrt{2}$ teniendo en cuenta el error

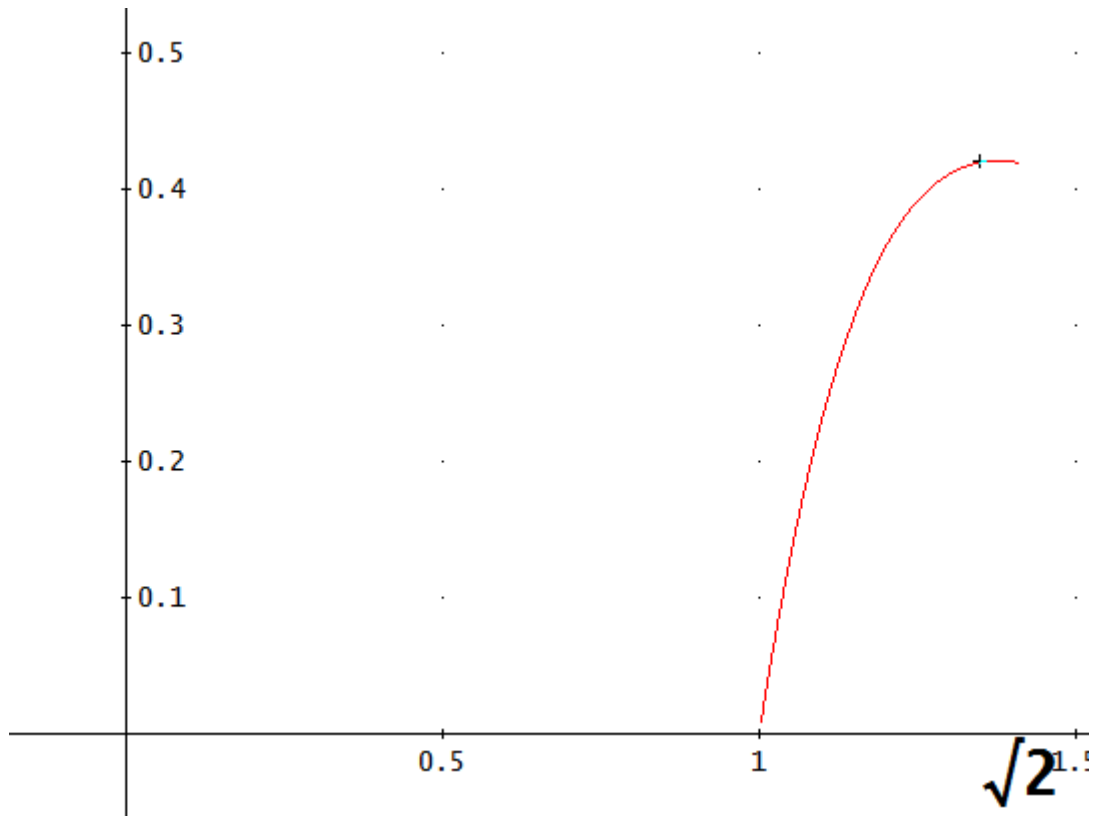
$$\arctg(\sqrt{2}) \approx \frac{\sqrt{2}^3 - 6\sqrt{2}^2 + 15\sqrt{2} + 3\pi - 10}{12} \approx 0.9555340434$$

$$0.9555 - 0.0006 < \arctg(\sqrt{2}) < 0.9555 + 0.0006$$

$$0.9549 < \arctg(\sqrt{2}) < 0.9561$$

Luego una aproximación de $\arctg \sqrt{2}$ con todas las cifras exactas es **0.95**

Geoméricamente observamos que 0.5 es una cota superior del máximo buscado en el intervalo $[1, \sqrt{2}]$





FÓRMULA DE TAYLOR



10.- Explicar la procedencia de las siguientes igualdades aproximadas, válidas para valores pequeños de $x > 0$ y acotar el **error** cometido en las mismas:

$$\ln(\cos x) \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

$$\operatorname{arcsen} x \approx x + \frac{x^3}{6}$$

$$\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$$

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

Solución:

Son los desarrollos de Maclaurin de las funciones correspondientes:

$$\ln(\cos x) \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} = T_{n=4}[\ln(\cos x), a = 0]$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_{n=4}(x)| = \left| f^{(5)}(c) \frac{x^5}{5!} \right| \quad \text{con } c \in (0, x)$$

Como $|f^{(5)}(c)| = \left| \frac{8\operatorname{senc} c}{\cos^3 c} - \frac{24\operatorname{senc} c}{\cos^5 c} \right|$ es una función monótona para $0 < c < x$, o bien $x < c < 0$ resulta:

$$E(x) = \left| f^{(5)}(c) \frac{x^5}{5!} \right| \leq \max_{0 < c < x} \left| \left(\frac{8\operatorname{senc} c}{\cos^3 c} - \frac{24\operatorname{senc} c}{\cos^5 c} \right) \frac{x^5}{5!} \right| \leq \left| \left(\frac{8\operatorname{senc} x}{\cos^3 x} - \frac{24\operatorname{senc} x}{\cos^5 x} \right) \frac{x^5}{5!} \right|$$

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} = T_{n=5}[\operatorname{tg} x, a = 0]$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_{n=5}(x)| = \left| f^{(6)}(c) \frac{x^6}{6!} \right| \quad \text{con } c \in (0, x)$$

Como $|f^{(6)}(c)| = \left| \frac{32\operatorname{senc} c}{\cos^3 c} - \frac{480\operatorname{senc} c}{\cos^5 c} + \frac{720\operatorname{senc} c}{\cos^7 c} \right|$ es una función monótona para $0 < c < x$, o bien $x < c < 0$ resulta:

$$E(x) = \left| f^{(6)}(c) \frac{x^6}{6!} \right| \leq \max_{0 < c < x} \left| \left(-\frac{32\operatorname{senc} c}{\cos^3 c} - \frac{480\operatorname{senc} c}{\cos^5 c} + \frac{720\operatorname{senc} c}{\cos^7 c} \right) \frac{x^6}{6!} \right| \leq \left| \left(-\frac{32\operatorname{senc} x}{\cos^3 x} - \frac{480\operatorname{senc} x}{\cos^5 x} + \frac{720\operatorname{senc} x}{\cos^7 x} \right) \frac{x^6}{6!} \right|$$

$$\operatorname{arcsen} x \approx x + \frac{x^3}{6} = T_{n=3}[\operatorname{arcsen} x, a = 0]$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| \quad \text{con } c \in (0, x)$$

Como $\left| f^{(4)}(c) \right| = \frac{3c(3+2c^2)}{\sqrt{(1-c^2)^7}}$ es una función monótona para $0 < c < x$, o bien $x < c < 0$ resulta:

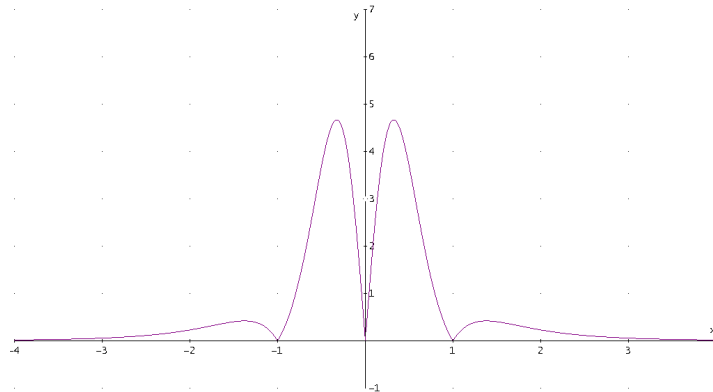
$$E(x) = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| \leq \max_{0 < c < x} \left| \frac{3c(3+2c^2)}{\sqrt{(1-c^2)^7}} \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{3x(3+2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^7}} \frac{x^4}{4!}$$

$$\arctg x \approx x - \frac{x^3}{3} = T_{n=3}[\arctg x, a = 0]$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| \quad \text{con } c \in (0, x)$$

Como $\left| f^{(4)}(c) \right| = \frac{24c(1-c^2)}{(1+c^2)^4}$ es una función acotada y una cota superior puede ser 5 resulta:



$$E(x) = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| \leq \max_{0 < c < x} \left| \frac{24c(1-c^2)}{(1+c^2)^4} \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{5x^4}{4!}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = T_{n=4}[\cosh x, a = 0]$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_{n=4}(x)| = \left| f^{(5)}(c) \frac{x^5}{5!} \right| \quad \text{con } c \in (0, x)$$

Como $\left| f^{(5)}(c) \right| = |\sinh(c)|$ es una función monótona para $0 < c < x$, o bien $x < c < 0$ resulta:

$$E(x) = \left| f^{(5)}(c) \frac{x^5}{5!} \right| \leq \max_{0 < c < x} \left| \sinh(c) \frac{x^5}{5!} \right| \leq \frac{\sinh(x) x^5}{5!}$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \approx x - \frac{x^3}{3!} = T_{n=3}[\ln(x + \sqrt{1+x^2}), a = 0]$$

Acotación del error:

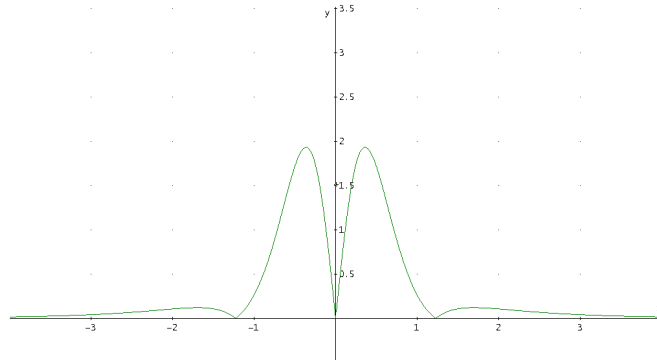


FÓRMULA DE TAYLOR



$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| \quad \text{con } c \in (0, x)$$

Como $\left| f^{(4)}(c) \right| = \frac{3c(3-2c^2)}{\sqrt{(1+c^2)^7}}$ es una función acotada y una cota superior puede ser 2 resulta:



$$E(x) = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| \leq \max_{0 < c < x} \left| \frac{3c(3-2c^2)}{\sqrt{(1+c^2)^7}} \frac{x^4}{4!} \right| \leq \boxed{2 \frac{x^4}{4!}}$$

11.- Sea $f(x) = xe^x + \operatorname{tg}(x)$

a) Hallar la *fórmula de Maclaurin* de orden 3 de f .

b) Hallar una aproximación del valor $f(0,01)$ con el *polinomio de Maclaurin* de orden 3

c) Acotar el *error* cometido en el cálculo de $f(0,01)$ en el apartado b)

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$xe^x + \operatorname{tg}(x)$	0
1	$e^x(x+1) + \frac{1}{\cos^2 x}$	2
2	$e^x(x+2) + \frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}$	2
3	$e^x(x+3) - \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{6}{\cos^4 x}$	5
4	$e^x(x+4) - \frac{8\operatorname{sen}x}{\cos^3 x} + \frac{24\operatorname{sen}x}{\cos^5 x}$	

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_{n=3}(x)$$

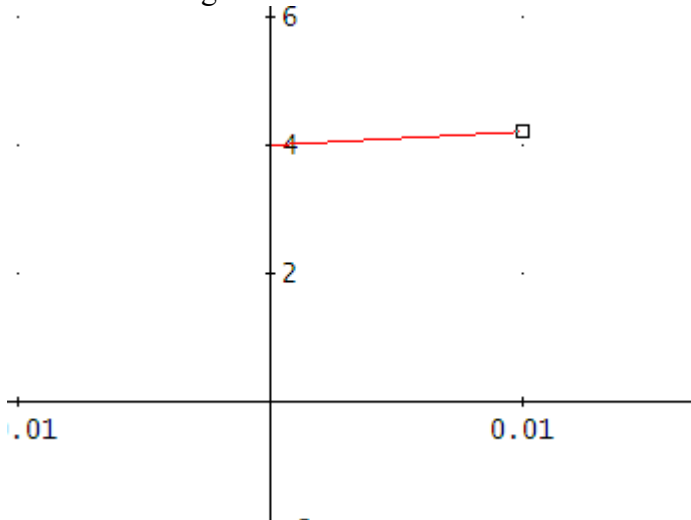
a) $f(x) = 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + \left| (c+4)e^c - \frac{8\operatorname{sen}c}{\cos^3 c} + \frac{24\operatorname{sen}c}{\cos^5 c} \right| \frac{x^4}{4!}$ donde c es algún número comprendido entre 0 y x .

b) $f(0.01) \approx 2(0.01) + \frac{2}{2!}(0.01)^2 + \frac{5}{3!}(0.01)^3 \approx \mathbf{0.020100833}$

c) El error que se comete es

$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f(x) - \left(2x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 \right) \right| < \left| (c+4)e^c - \frac{8\operatorname{sen}c}{\cos^3 c} + \frac{24\operatorname{sen}c}{\cos^5 c} \right| \frac{(0.01)^4}{4!} \leq [*]$$

Observando la gráfica de la función del numerador se tiene:



$$\left| (c+4)e^c - \frac{8\operatorname{sen}c}{\cos^3 c} + \frac{24\operatorname{sen}c}{\cos^5 c} \right| < 5$$

por tanto

$$[*] \leq \frac{5}{4! \cdot 10^8} = \frac{1}{480\,000\,000} \leq 10^{-8}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



12.- Hallar el **polinomio de Maclaurin** de la función $f(x) = \cos x$, de grado mínimo, que aproxime $\cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ con un **error** menor que 0.0005. A continuación calcular el valor aproximado de $\cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ (con las cifras decimales que delimita el error permitido).

Solución:

El desarrollo del coseno es:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{Véase ejercicio 4})$$

$$\theta \in (0,1)$$

Independientemente del valor de θ que elijamos el coseno siempre se acota por 1, nos proporciona la inecuación:

$$E\left(\frac{\pi}{30}\right) = \left| R_n\left(\frac{\pi}{30}\right) \right| = \left| \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0.0005$$

Como es imposible despejar n , vamos probando para distintos valores hasta $n=2$ que es el primer valor de n que lo cumple. Luego necesitamos el polinomio de grado 2 para obtener una aproximación de $\cos(\pi/30)$ con un error menor que 0.0005

$$T_{n=2}[f(x) = \cos x, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{30}\right) \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2}{2} \approx 0.9945168864$$

$$0.9945168864 - 0.005 < \cos\left(\frac{\pi}{30}\right) < 0.9945168864 + 0.005$$

$$0.994 < \cos\left(\frac{\pi}{30}\right) < 0.995$$

Una aproximación de $\cos(\pi/30)$ con todas las cifras exactas es **0.99**

13.-

- a) Escribir la **fórmula de Maclaurin** de grado 3 de la función $y = \arctg x$
 b) Calcular el valor aproximado de $\arctg(0,1)$, utilizando el **polinomio de Maclaurin** del apartado a) y acotar el **error** cometido.

c) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) - x}{4x^3}$

Solución:

a) La **fórmula** de Maclaurin de $f(x) = \arctg x$ para $n=3$ y $a=0$ es:

$$f(x) = T_{n=3}(f(x), a=0) + R_{n=3}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-0)^4$$

$0 < c < x$ ó $x < c < 0$

Calculamos el polinomio de grado 3 en $a=0$ y el resto de Lagrange correspondiente

$$f(x) = \arctg(x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -1 \cdot (1+x^2)^{-2} \cdot 2x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \dots = 8x^2(1+x^2)^{-3} - 2(1+x^2)^{-2} \qquad f'''(0) = -2$$

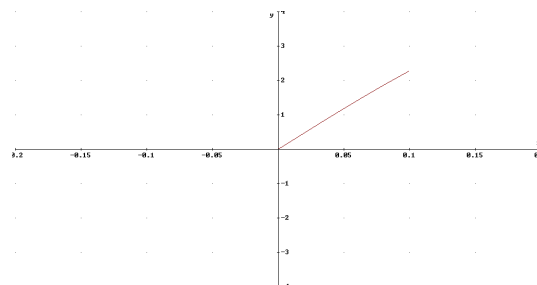
$$f^{IV}(x) = \dots = \frac{24x - 24x^3}{(1+x^2)^4} \qquad f^{IV}(t) = \frac{24t - 24t^3}{(1+t^2)^4}$$

a) $\arctg(x) = 0 + 1x + 0 - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24t - 24t^3}{(1+t^2)^4} \frac{x^4}{4!}$ con $0 < t < x$

b) $\arctg(0,1) = 0,1 - \frac{1}{3}(0,1)^3 = 0,099667$

La función derivada cuarta es monótona se acota por 3:

$$E(0,1) = \frac{(0,1)^4}{4!} \left| \frac{24t - 24t^3}{(1+t^2)^4} \right| < \frac{(0,1)^4 \cdot 3}{4!} = 0,00001$$



c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) - x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x}{4x^3} = -\frac{1}{12}$, o bien,

$$\frac{0}{0} \text{ Ind} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{x^3}{3}}{4x^3} \right) = \text{L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3x^2}{12x^2} \right) = \dots = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$$



FÓRMULA DE TAYLOR

14.- Dada la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, calcular el *polinomio de Maclaurin* de grado 4 y hallar el valor aproximado de $f(0,1)$ utilizando dicho polinomio.

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	1
1	$\operatorname{senh} x$	0
2	$\cosh x$	1
3	$\operatorname{senh} x$	0
4	$\cosh x$	1

$$T_{n=4}[\cosh x, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

sustituyendo el valor de x por 0,1, resulta $f(0,1) \approx 1,00500$.



FÓRMULA DE TAYLOR



15. - ¿Para qué valores de x podemos tomar $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ por $\text{sen}x$ con un **error** menor de 0,0001.

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

n	fⁿ(x)	fⁿ(0)
0	senx	0
1	cosx = sen $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	1
2	-senx = sen $\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$	0
3	-cosx = sen $\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$	-1
4	senx = sen $\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$	0
.....
n	sen $\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$	sen $\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta \in (0,1)$$

Entonces $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = T_{n=5}[\text{sen}x, a = 0]$

Conocido el error 0,0001 y el valor de $n=5$

$$E(x) = |R_{n=5}(x)| = \left| \frac{x^6}{6!} \text{sen}\left(\theta x + 6\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \left| \frac{x^6}{6!} \right| < 10^{-4} \text{ puesto que el seno se acota en valor}$$

absoluto por 1. Queda:

$$\left| \frac{x^6}{6!} \right| < 10^{-4} \Leftrightarrow -6! \cdot 10^{-4} < x^6 < 6! \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow -\frac{9}{125} < x^6 < \frac{9}{125} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{5}} < x < \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{5}}$$

FÓRMULA DE TAYLOR

16.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}$, se pide:

- Hallar el **polinomio de Maclaurin** de grado 4 de la función f.
- Utilizando el polinomio de Maclaurin de grado 2, hallar $\frac{1}{\sqrt{0,9^5}}$, dando una estimación del **error** cometido.
- ¿Es desarrollable la función f en serie de **Taylor** en $a=2$? Justifica la respuesta.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}} = (1-x)^{-\frac{5}{2}}$	1
1	$\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}$	$\frac{5}{2}$
2	$\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 2}(1-x)^{-\frac{9}{2}}$	$\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 2}$
3	$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 2}(1-x)^{-\frac{11}{2}}$	$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 2}$
4	$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}(1-x)^{-\frac{13}{2}}$	$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

$$T_{n=4} \left[f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}, a=0 \right] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 =$$

$$= 1 + \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2^2} \frac{x^2}{2!} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2^3} \frac{x^3}{3!} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2^4} \frac{x^4}{4!}$$

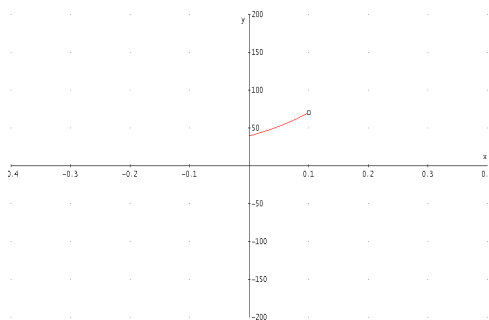
b) $\frac{1}{\sqrt{0,9^5}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}} \Rightarrow x = 0,1$ sustituyendo en el polinomio de Taylor de grado $n=2$

$$T_{n=2} \left[\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}, 0 \right] = 1 + \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2^2} \frac{x^2}{2!} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{0,9^5}} \approx 1 + \frac{5}{2} \cdot 0,1 + \frac{5 \cdot 7}{2^2} \frac{0,1^2}{2!} \approx \mathbf{1.29375}$$

Estimación del error: $E(x) = |R_{n=2}(x)| = \left| f'''(c) \frac{x^3}{3!} \right| = \left| \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 2} (1-c)^{-\frac{11}{2}} \frac{x^3}{3!} \right|_{0 < c < 0,1} \leq (*)$

$$(*) |f'''(c)| < 71 \Rightarrow |R_{n=2}(0,1)| < \left| 71 \frac{0,1^3}{3!} \right| <$$

$$< \mathbf{0,01183} \Rightarrow 1.281916 < \frac{1}{\sqrt{0,9^5}} < 1.305583.$$





FÓRMULA DE TAYLOR



c) **No**, porque no existe $f(2)$ pues $f(2) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \notin \mathbb{R}$.



FÓRMULA DE TAYLOR



17.- a) Obtener el *polinomio de Maclaurin* de grado 2, de la función

$$f(x) = \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

b) Utilizando el polinomio anterior, hallar $f(0,1)$.

c) Acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$	0
1	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	1
2	$-\frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$	0
3	$\frac{2x^2 - 1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$	

$$T_4[f, 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x$$

b) $f(0,1) \approx 0,1$

c) Estimación del error: $E(x) = |R_{n=2}(x)| = \left| f'''(\theta x) \frac{x^3}{3!} \right| = \left| \frac{2(\theta x)^2 - 1}{(1 + (\theta x)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{x^3}{3!} \right|_{0 < \theta < 1} \leq \left| \frac{x^3}{3!} \right|$

Ya que $|f'''(c)| = \left| \frac{2c^2 - 1}{\sqrt{(1 + c^2)^3}} \right|$ es una función acotada y una cota superior puede ser 1 resulta:

$$|R_{n=2}(0,1)| < \left| \frac{0,1^3}{3!} \right| < 0,00016$$

18. - Usando Derive y aplicando la *fórmula de Taylor*, calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \arcsen x^2}{\sqrt{1+x^2} - \cos x - \frac{5}{6} \ln(1-x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]^{\cot gx^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \arcsen x^2}{\sqrt{1+x^2} - \cos x - \frac{5}{6} \ln(1-x)}$

$$T_{n=4} [f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \arcsen x^2, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 = \frac{2x^4}{3}$$

$$T_{n=4} [f(x) = \sqrt{1+x^2} - \cos x - \frac{5}{6} \ln(1-x), a = 0] = \frac{x^4}{24} + \frac{5x^3}{18} + \frac{17x^2}{12} + \frac{5x}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \arcsen x^2}{\sqrt{1+x^2} - \cos x - \frac{5}{6} \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^4}{3}}{\frac{x^4}{24} + \frac{5x^3}{18} + \frac{17x^2}{12} + \frac{5x}{5}} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

$$T_{n=3} [f(x) = x - \operatorname{sen} x, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{6}$$

$$T_{n=3} [f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{6}} = 1$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]^{\cot gx^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]^{\cot gx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]^{\cot gx^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cot gx^3 \ln \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]}{\operatorname{tg} x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]}{\operatorname{tg} x^3}}$$

$$T_{n=3} [f(x) = \ln \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right], a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = -\frac{2x^3}{3}$$

$$T_{n=3} [f(x) = \operatorname{tg} x^3, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]^{\cot gx^3} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x \right]}{\operatorname{tg} x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x^3}{3}}{x^3}} = e^{-\frac{2}{3}}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}$$

$$T_{n=3} [f(x) = \ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = -x^3$$

$$T_{n=3} [f(x) = 1 - e^{-x^2}, a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{x^2} = 0.$$

19.- Usando Derive resolver el siguiente problema: Dada la función $f(x)=\ln(1+x)$, se pide:

- a) Obtener la expresión de la *derivada* n-ésima de la función.
- b) Obtener la expresión de $f^{(n)}(0)$.
- c) Obtener los *polinomio de Maclaurin* de grado 3,4,5,6,7,8,9,10.
- d) Representarlos gráficamente junto con la propia función.
- e) Escribir la expresión de las *fórmulas de Maclaurin* de f de grado 3,4 y 5.
- f) Utilizar cada uno de los desarrollos del apartado e) para obtener una aproximación de $\ln(1.1)$.
- g) Acotar el *error* cometido en cada caso.
- h) Si se quiere obtener el valor aproximado de $\ln(1.1)$ con diez cifras decimales exactas ¿cuál es el menor orden del desarrollo de *Maclaurin* de f que habrá que usar?
- i) ¿Es posible utilizar Maclaurin para calcular una aproximación de $\ln(2.5)$?

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)}; f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}; f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}; f^{IV}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$a) f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$b) f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$c) T_n[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$T_{n=3}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$T_{n=4}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$T_{n=5}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$T_{n=6}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

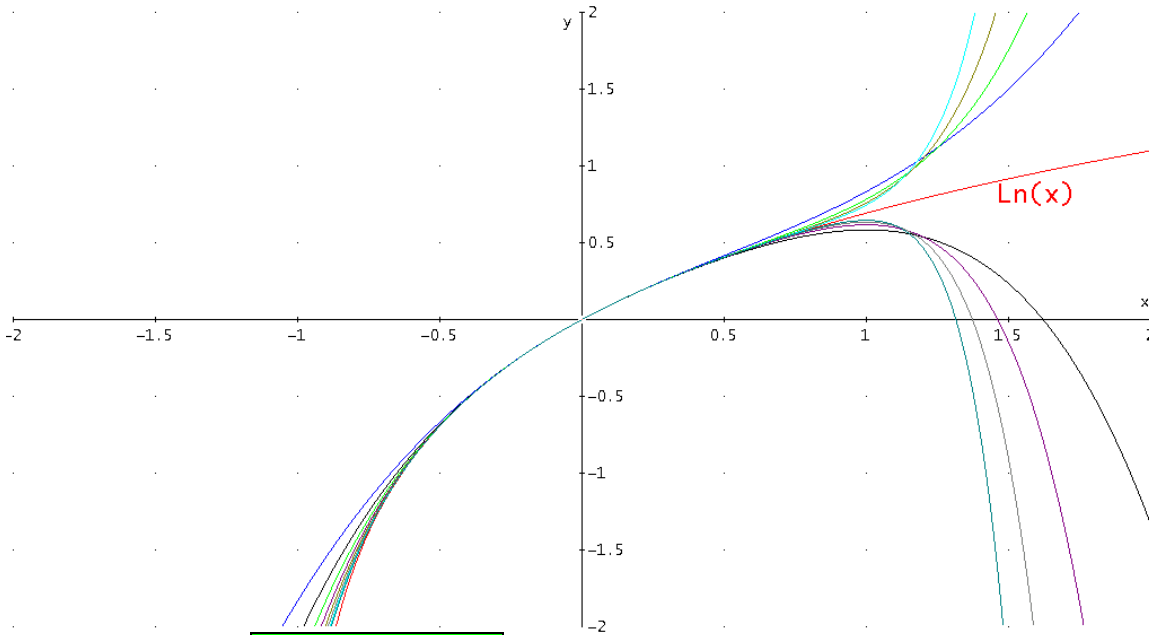
$$T_{n=7}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}$$

$$T_{n=8}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8}$$

$$T_{n=9}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9}$$

$$T_{n=10}[\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10}$$

FÓRMULA DE TAYLOR



e) $n = 3 \Rightarrow \ln(1+x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^4}{4(c+1)^4}$

$n = 4 \Rightarrow \ln(1+x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^5}{5(c+1)^5}$

$n = 5 \Rightarrow \ln(1+x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^6}{6(c+1)^6}$

f) $\ln(1.1) \approx 0.0953333333333333$ $\ln(1.1) \approx 0.0953083333333333$ $\ln(1.1) \approx 0.0953103333333333$

g) $E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \right|$ con $c \in [0, x]$

$n = 3 \Rightarrow E(0.1) = |R_{n=3}(0.1)| = \left| -\frac{0.1^4}{4(1+c)^4} \right| < \frac{0.1^4}{4}$

$n = 4 \Rightarrow E(0.1) = |R_{n=4}(0.1)| = \left| \frac{0.1^5}{5(1+c)^5} \right| < \frac{0.1^5}{5}$

$n = 5 \Rightarrow E(0.1) = |R_{n=5}(0.1)| = \left| -\frac{0.1^6}{6(1+c)^6} \right| < \frac{0.1^6}{6}$

h) $E(0.1) = |R_n(0.1)| < \frac{0.1^{n+1}}{n+1} < 10^{-11}$. El primer n que lo cumple es: $n=10$

i) **Si**, pero no debe utilizarse ya que el error que se comete es relativamente grande (ver gráfica)



FÓRMULA DE TAYLOR



20.- a) Desarrollar en serie de **Maclaurin** la función la función $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Usando el apartado a) para el valor de "a" adecuado, calcular $\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$, tomando los cuatro primeros términos del desarrollo ¿Cuántas cifras exactas se obtienen con este método?

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1+x)^\alpha$	1
1	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	α
2	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)$
....
n	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$

$$a) f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!}\alpha + \frac{x^2}{2!}\alpha(\alpha-1) + \frac{x^3}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \dots + \frac{x^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1} \text{ con } x < c < 0, \text{ o bien, } 0 < c < x$$

$$b) \frac{1}{\sqrt[3]{1.1}} = (1+x)^\alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ x = 0.1 \end{cases} \text{ y los cuatro primeros términos nos indica que } n=3, \text{ luego}$$

$$T_{n=3}[f(x), a=0] = 1 + \frac{x}{1!}\alpha + \frac{x^2}{2!}\alpha(\alpha-1) + \frac{x^3}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \text{ sustituyendo los valores de } x=0.1 \text{ y}$$

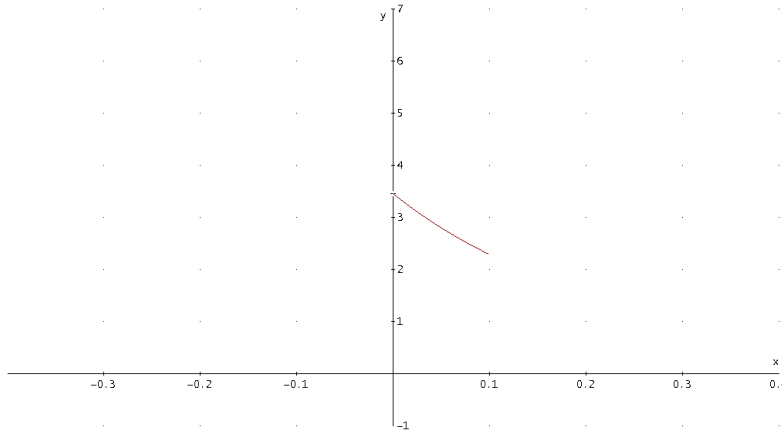
$$\alpha = -1/3 \text{ obtenemos } \frac{1}{\sqrt[3]{1.1}} \approx 0.9687160$$

$$\text{Estimación del error: } E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f^{(iv)}(c) \frac{x^4}{4!} \right| = \left| \frac{280}{81(1+c)^{\frac{13}{3}}} \frac{x^4}{4!} \right|_{0 < c < 0.1} \leq \left| \frac{280}{81} \frac{x^4}{4!} \right|$$

$$\text{Ya que } |f^{(iv)}(c)| = \left| \frac{280}{81(1+c)^{\frac{13}{3}}} \right| \text{ es una función monótona y una cota superior puede ser}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



para $c=0$ resulta

$$|R_{n=3}(0.1)| < \left| \frac{280 \cdot 0.1^4}{81 \cdot 4!} \right| < 1.4 \cdot 10^{-5}, \text{ es decir, podemos asegurar } \mathbf{cuatro\ cifras\ decimales} \text{ exactas.}$$

21.- Hallar el grado mínimo del *polinomio de Maclaurin* para calcular con un *error* menor que 0.001.

a) $f(0.5)$ siendo $f(x) = \ln(1 + x)$

b) $f(0.6)$ siendo $f(x) = \cos(\pi x^2)$.

Solución:

a) Del **ejercicio 2** obtenemos el desarrollo de la función $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+c)^{-(n+1)}$$

$c \in (x,0)$, o bien, $c \in (0,x)$

Ahora el dato es el error $E(x) < 10^{-3}$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \right| < 10^{-3} \quad \text{con } c \in [0,x]$$

para $x=0.5 \Rightarrow E(0.5) = |R_n(0.5)| = \left| (-1)^n \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \right|_{0 < c < 0.5} < \left| \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)} \right| < 10^{-3} \quad \text{con } c \in [0,0.5]$

Vamos a probar dando valores y el primer valor que se cumple es para $n=7$

$$T[\ln(1+x), a=0, n=7] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \Rightarrow f(0.5) = \ln(1.5) = \mathbf{0.405}$$

b) Del **ejercicio 4** obtenemos el desarrollo de la función $f(x) = \cos(\pi x^2)$:

si n es par $T_n(\cos(\pi x^2), 0) = 1 - \frac{\pi^2 x^4}{2!} + \frac{\pi^4 x^8}{4!} + \dots + \frac{\pi^{\frac{n}{2}} x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \cos\left(\frac{n}{2} \frac{\pi}{2}\right)$

si n es impar $T_n(\cos(\pi x^2), 0) = 1 - \frac{\pi^2 x^4}{2!} + \frac{\pi^4 x^8}{4!} + \dots + \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \cos\left(\frac{(n-1)}{2} \frac{\pi}{2}\right)$

Vamos calculando los sucesivos polinomios hasta conseguir la aproximación deseada:

$$T_{n=4}(\cos(\pi x^2), 0) = 1 - \frac{\pi^2 x^4}{2!} \Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 0.6^4}{2!} \approx 0.3604496348$$

$$T_{n=8}(\cos(\pi x^2), 0) = 1 - \frac{\pi^2 x^4}{2!} + \frac{\pi^4 x^8}{4!} \Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 0.6^4}{2!} + \frac{\pi^4 0.6^8}{4!} \approx 0.4286204130$$

$$T_{n=12}(\cos(\pi x^2), 0) = 1 - \frac{\pi^2 x^4}{2!} + \frac{\pi^4 x^8}{4!} - \frac{\pi^6 x^{12}}{6!} \Rightarrow 1 - \frac{\pi^2 0.6^4}{2!} + \frac{\pi^4 0.6^8}{4!} - \frac{\pi^6 0.6^{12}}{6!} \approx$$

0.4257138366. Coinciden las centésimas.

$$T_{n=16}(\cos(\pi x^2), 0) = 1 - \frac{\pi^2 x^4}{2!} + \frac{\pi^4 x^8}{4!} - \frac{\pi^6 x^{12}}{6!} + \frac{\pi^8 x^{16}}{8!} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{\pi^2 0.6^4}{2!} + \frac{\pi^4 0.6^8}{4!} - \frac{\pi^6 0.6^{12}}{6!} + \frac{\pi^8 0.6^{16}}{8!} \approx \mathbf{0.4257802260}$$

Coinciden las milésimas.

$$f(0.6) = \cos(\pi 0.6^2) = \mathbf{0.425}$$

22.- Dada la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$, se pide:

a) Escribir la **fórmula de Maclaurin**.

b) Hallar el grado del **polinomio** que aproxima el valor de $\frac{1}{e}$ con un **error** $|R_n| < 0.00005$.

c) Con el polinomio obtenido en b, hallar el valor aproximado de $\frac{1}{e}$ con el número de cifras decimales que delimita el error permitido.

Solución:

a) Buscamos previamente una expresión general para la derivada de orden n

$$f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}; f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}; f''(x) = (x-2)e^{-x}; f'''(x) = (3-x)e^{-x};$$

La derivada de orden n viene dada por $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n)e^{-x}$

Probamos la veracidad de la expresión aplicando el principio de inducción completa

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n)e^{-x} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (e^{-x} - (x-n)e^{-x}) = (-1)^{n+1} (x-n-1)e^{-x}$$

Sustituyendo n por (n+1) en la derivada n-ésima: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (x-(n+1))e^{-x}$

Las dos expresiones son idénticas, luego la expresión de la derivada n-ésima es cierta.

Hallamos el valor de, por ejemplo, las tres primeras derivadas en 0:

$$f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1; f''(0) = (0-2)e^{-0} = -2; f'''(0) = (3-0)e^{-0} = 3;$$

y, en consecuencia, la fórmula de Maclaurin es:

$$\frac{x}{e^{-x}} = 0 + x - \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{((0-n)e^{-0})x^n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{(c-n-1)e^{-c}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Simplificando

$$\frac{x}{e^{-x}} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)!} + (-1)^{n+1} \frac{(c-n-1)e^{-c}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c \in (x, 0)$, o bien, $c \in (0, x)$

b) $\frac{1}{e} = \frac{x}{e^x} \Rightarrow x = 1$, luego se trata de aproximar $f(1)$ con un error menor que 0.00005

$$E(1) = |R_n(1)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{((c-n-1)e^{-c})1^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{0 < c < 1=x} < \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} < \frac{1}{20000} = 0.00005$$

La derivada es estrictamente decreciente en $[0,1]$ luego el máximo se alcanza en $c = 0$ y vale $n+1$.

Vamos probando para distintos valores de n, así para $n=8$ resulta $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} < \frac{1}{20000} = 0.00005$

Luego para **$n=8$** el polinomio de Maclaurin aproxima $1/e$ con un error menor que 0.00005

c)

$$\frac{1}{e} \approx 1 - 1^2 + \frac{1^3}{2} - \frac{1^4}{6} + \frac{1^5}{24} - \frac{1^6}{120} + \frac{1^7}{720} - \frac{1^8}{5040} \pm 0.00005 = 0.36785 \pm 0.00005$$

Una aproximación de $1/e$ con todas las cifras exactas es $1/e = \mathbf{0.367}$

FÓRMULA DE TAYLOR

23.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, se pide:

- Calcular el **polinomio de Maclaurin** para $n = 5$.
- Hallar el valor aproximado de $f(0.1)$ que se obtiene con el polinomio anterior.
- Estimar el **error** cometido en la aproximación anterior y corregir la misma.
- Si tomamos **polinomios de Maclaurin** de grado cada vez mayor ($n \rightarrow \infty$), el error al aproximar $f(0,1)$ ¿aumenta o disminuye? ¿y para $f(1)$?

Solución:

a)

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1+x^2)^{-1}$	1
1	$-2x(1+x^2)^{-2}$	0
2	$2(3x^2-1)(1+x^2)^{-3}$	-2
3	$24x(1-x^2)(1+x^2)^{-4}$	0
4	$24(5x^4-10x^2+1)(1+x^2)^{-5}$	24
5	$-240x(3x^4-10x^2+3)(1+x^2)^{-6}$	0

$$a) T_n[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

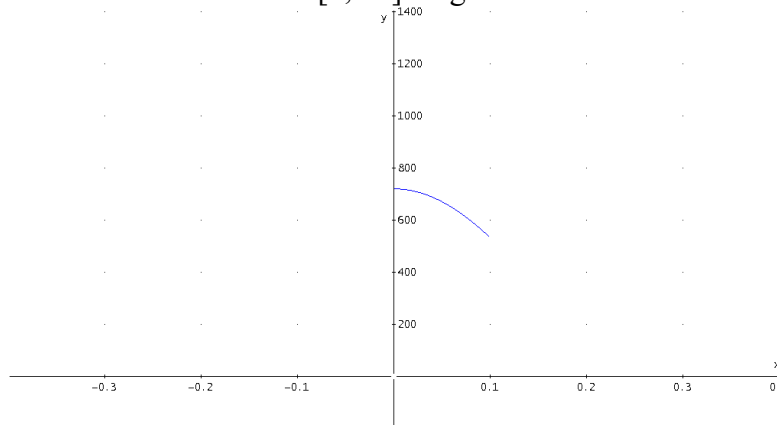
$$T_{n=4}\left[\frac{1}{1+x^2}, a=0\right] = 1 - x^2 + x^4$$

b) Sustituyendo x por 0.1: $1 - 0.1^2 + 0.1^4 = 0.9901$

c) Hallamos la derivada de orden 6

$$f^{(6)}(c) = 720(7c^6 - 35c^4 + 21c^2 - 1)(1+c^2)^{-7} \quad \text{con } 0 < c < 0.1$$

La derivada es estrictamente decreciente en $[0, 0.1]$ luego el máximo se alcanza en $c = 0$ y vale 720



$$E(0.1) = |R_{n=5}(0.1)| = \left| f^{(6)}(c) \frac{0.1^6}{6!} \right|_{0 < c < 0.1=x} < 720 \frac{0.1^6}{6!} = 10^{-6}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



Hallamos ahora el valor aproximado de $f(0.1)$ teniendo en cuenta el error

$$0.9901 - 10^{-6} < f(0.1) < 0.9901 + 10^{-6}$$

$$0.990099 < f(0.1) < 0.990101$$

Luego una aproximación de $f(0.1)$ con todas las cifras exactas es $f(0.1) = \mathbf{0.990}$

d)

Al estudiar este apartado nos encontramos con la dificultad de que el cálculo de la expresión de la derivada n -ésima no es trivial, por ello se va a dar una explicación menos rigurosa (léela hasta el final).

Si hallamos el valor de $f(0.1)$ en los polinomios de Maclaurin (para $n = 5 \dots 10$) por ejemplo

$$T_{n=5} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 \Rightarrow 1 - 0.1^2 + 0.1^4 = 0.9901$$

$$T_{n=6} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \Rightarrow 1 - 0.1^2 + 0.1^4 - 0.1^6 = 0.990099$$

$$T_{n=7} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \Rightarrow 1 - 0.1^2 + 0.1^4 - 0.1^6 = 0.990099$$

$$T_{n=8} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \Rightarrow 1 - 0.1^2 + 0.1^4 - 0.1^6 + 0.1^8 = 0.9900990099$$

$$T_{n=9} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \Rightarrow 1 - 0.1^2 + 0.1^4 - 0.1^6 + 0.1^8 = 0.9900990099$$

$$T_{n=10} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \Rightarrow 1 - 0.1^2 + 0.1^4 - 0.1^6 + 0.1^8 - 0.1^{10} = 0.9900990099$$

Observamos que conforme n aumente se va estabilizando el valor de más cifras decimales.

Dada la forma de dichos polinomios las aproximaciones en $x=1$ tienen un error significativo

Por otro lado, el error estimado, al evaluar $f(0.1)$ cuando tomamos un polinomio de grado n viene dado por

$$E(0.1) = |R_n(0.1)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{0.1^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{0 < c < 0.1=x} < \max |f^{(n+1)}(c)| \frac{1}{10^{n+1}(n+1)!}$$

Cuando $n \rightarrow \infty \cdot \frac{1}{10^{n+1}(n+1)!} \rightarrow 0$ con mucha rapidez mientras que $|f^{(n+1)}(c)|$ es una función acotada

en $[0, 0.1]$

¿y para $f(1)$?

Hallando $f(1)$ en los polinomios de Maclaurin calculados anteriormente:

$$T_{n=5} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 \Rightarrow 1 - 1^2 + 1^4 = 1$$

$$T_{n=6} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \Rightarrow 1 - 1^2 + 1^4 - 1^6 = 0$$

$$T_{n=7} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \Rightarrow 1 - 1^2 + 1^4 - 1^6 = 0$$

$$T_{n=8} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \Rightarrow 1 - 1^2 + 1^4 - 1^6 + 1^8 = 1$$

$$T_{n=9} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \Rightarrow 1 - 1^2 + 1^4 - 1^6 + 1^8 = 1$$

$$T_{n=10} \left[\frac{1}{1+x^2}, a=0 \right] = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \Rightarrow 1 - 1^2 + 1^4 - 1^6 + 1^8 - 1^{10} = 0$$

Dada la forma de dichos polinomios las aproximaciones en $x=1$ tienen un error significativo.



FÓRMULA DE TAYLOR



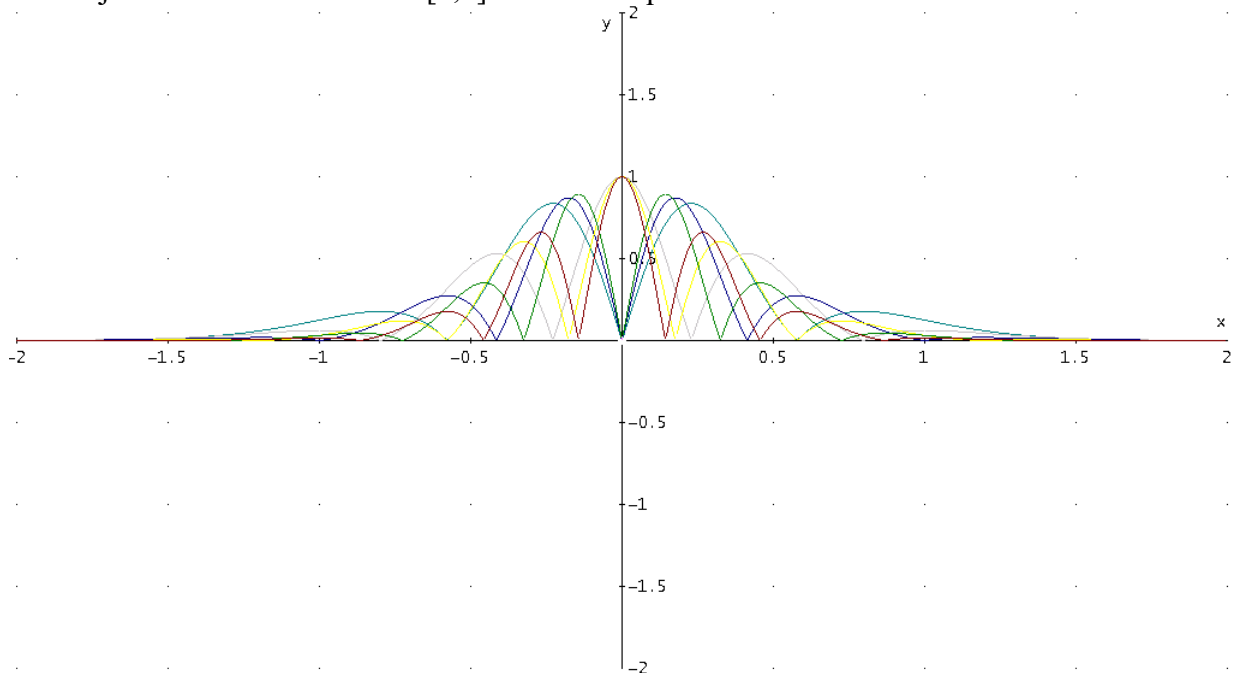
$$E(1) = |R_n(1)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \max_{0 < c < 1=x} |f^{(n+1)}(c)| \frac{1}{(n+1)!}$$

$$E(1) = |R_n(1)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \max_{0 < c < 1=x} |f^{(n+1)}(c)| \frac{1}{(n+1)!}$$

Cuando $n \rightarrow \infty \cdot \frac{1}{10^{n+1}(n+1)!} \rightarrow 0$ pero no con la rapidez del caso anterior y aunque $|f^{(n+1)}(c)|$ es una función acotada en $[0,1]$ su máximo va aumentando cuando $n \rightarrow \infty$.

Para estudiar el comportamiento del resto con ayuda de DERIVE, vamos a considerar en $[0,1]$ las funciones $|f^{(n+1)}(c)| \frac{1}{(n+1)!}$ con n variando de 4 a 9

Si dibujamos estas funciones en $[0,1]$ se observa que el máximo se mantiene en 1.





FÓRMULA DE TAYLOR



24.- Dada la función $f(x) = \log_{10} \left(\frac{x+1}{2} \right)$, se pide:

- Escribir la **fórmula de Taylor** en el punto $a=1$.
- Acotar el error cometido en el cálculo de $\log_{10}(1,1)$ utilizando el polinomio de grado 3.
- Calcular el grado del **polinomio** mínimo necesario para obtener un valor de $\log_{10}(1,1)$ con un **error** menor a 10^{-6}

Solución:

a) CÁLCULO DEL POLINOMIO DE TAYLOR

$$f(x) = \log_{10} \left(\frac{1+x}{2} \right)$$

Se calculan las sucesivas derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 10}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2 \ln 10}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3 \ln 10}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3 \cdot 2}{(1+x)^4 \ln 10}$$

....

$$\text{Supongamos que sea } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n \ln 10}$$

$$\text{Derivando } f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1} (-1) \frac{n \cdot (n-1)!}{(1+x)^n (1+x) \ln 10} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1} \ln 10} \text{ la cual es la expresión del}$$

término general, para el término $n+1$

Calculada la derivada n -ésima se puede escribir la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n + R_n(x)$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{(1+1)\ln 10} (x-1) + \frac{-1}{(1+1)^2 \ln 10} (x-1)^2 + \frac{2!}{(1+1)^3 \ln 10} (x-1)^3 + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+1)^n \ln 10} (x-1)^n + R(x)$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{2\ln 10} (x-1) + \frac{-1}{2(2)^2 \ln 10} (x-1)^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot \ln 10} (x-1)^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n n \ln 10} (x-1)^n + R(x)$$

$$\text{Siendo } R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1} \ln 10} (x-1)^{n+1} \text{ con } c \in [1, x]$$

Para calcular $\log_{10}(1,1)$

Con el polinomio de grado 3 se obtiene

$$f(x) \approx \frac{1}{2\ln 10} (x-1) + \frac{-1}{2(2)^2 \ln 10} (x-1)^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot \ln 10} (x-1)^3$$



FÓRMULA DE TAYLOR

$$f(x) = \log_{10} \left(\frac{x+1}{2} \right) = \log_{10}(1,1) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 1,1 \Rightarrow x+1 = 2,2 \Rightarrow x = 1,2$$

$$f(1,2) \approx 0.04140274060$$

b)

$$R_{n=3}(x) = (-1)^3 \frac{1}{4(1+c)^4 \ln 10} (x-1)^4 \quad \text{con } c \in [1, x]$$

$$R_{n=3}(1.2) \leq \max_{c \in [1, 1.2]} \left| \frac{1}{4(1+c)^4 \ln 10} (1.2-1)^4 \right| \quad \text{cuyo máximo se da en } c=1$$

$$R_{n=3}(1.2) \leq 1.0857 \cdot 10^{-5}$$

c)

El polinomio de grado 3 no es suficiente para obtener la aproximación con un error menor que 10^{-6}

$$\text{Como } R_n(1.2) \leq \left| (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1} \ln 10} (1.2-1)^{n+1} \right|$$

$$\text{Sustituyendo } n=3 \quad \text{se obtiene } R < 1.085736204 \cdot 10^{-5} > 10^{-6}$$

$$\text{Sustituyendo } n=4 \quad \text{se obtiene } R < 8,685889638 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$$

El grado del polinomio de Taylor pedido es 4

25.- Dada la función $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

- Utilizar el **polinomio de Maclaurin** de grado 10 para calcular $f(1)$.
- Estimar el **error** cometido en la aproximación anterior y dar $f(1)$ con las cifras exactas.
- Obtener la aproximación de la integral de la función $f(x)$ entre 0 y 1 utilizando el polinomio del apartado a).

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas y particularizando en $a=0$, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=10} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, a=0 \right] &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{2!} + \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{x^4}{4!} - \frac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{x^6}{6!} + \frac{105\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{x^8}{8!} - \frac{945\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{x^{10}}{10!} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{\pi}}x^4 - \frac{\sqrt{2}}{96\sqrt{\pi}}x^6 + \frac{\sqrt{2}}{768\sqrt{\pi}}x^8 - \frac{\sqrt{2}}{7680\sqrt{\pi}}x^{10} \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo x por 1, resulta: **0.2419626487**

$$\text{b) } E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Primeramente calculamos la derivada de orden $n+1=10+1=11$

$$f^{(11)}(c) = \left(\frac{10395\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}c - \frac{17325\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}c^3 + \frac{3465\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}c^5 - \frac{495\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}c^7 + \frac{55\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}c^9 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}c^{11} \right) \frac{e^{-\frac{c^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Buscamos el máximo entre $a=0$ y $x=1$; volvemos a derivar:

$$f^{(12)}(c) = \left(10395 - 62370c^2 + 51975c^4 - 13860c^6 + 1485c^8 - 66c^{10} + c^{12} \right) \frac{e^{-\frac{c^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Resolviendo la ecuación por el método numérico: $c = 0.444403002$ y sustituyendo en la derivada de orden 11 obtenemos 1162.279412. Luego una cota superior puede ser 1200.

$$E(1) = |R_{n=10}(1)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{1^{11}}{11!} \right| < 1200 \frac{1}{11!} \approx \mathbf{3.006253006 \cdot 10^{-5}}$$

nos indica cuatro cifras decimales exactas, es decir, **f(1)=0.2419**

$$\text{c) } = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{\pi}}x^4 - \frac{\sqrt{2}}{96\sqrt{\pi}}x^6 + \frac{\sqrt{2}}{768\sqrt{\pi}}x^8 - \frac{\sqrt{2}}{7680\sqrt{\pi}}x^{10} \right) dx = \frac{455383\sqrt{2}}{1064448\sqrt{\pi}} \approx \mathbf{0.3413441191}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



26. - Obtener $\sqrt[5]{1.5}$ con una aproximación inferior a una diezmilésima utilizando el polinomio de Maclaurin de la función $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$.

Solución:

$$f(x) = \sqrt[5]{1+x} = \sqrt[5]{1.5} \Rightarrow x = 0.5$$

$$E(0.5) = |R_n(0.5)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{0 < c < 0.5=x} < \max |f^{(n+1)}(c)| \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

Las derivadas sucesivas son de la forma $1/(1+x)$ se acotan para $x=0$ por 1.

El primer n que cumple la condición es $n=7$

$$E(0.5) < \max_{0 < c < 0.5=x} \left| -\frac{226606464}{390625(1+c)^{39/5}} \right| \frac{0.5^8}{8!} \approx 5.62 \cdot 10^{-5}$$

El polinomio de Maclaurin:

$$\begin{aligned} T_{n=7} \left[\sqrt[5]{1+x}, a=0 \right] &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 = \\ &= 1 + \frac{x}{5} - \frac{4}{25} \frac{x^2}{2!} + \frac{36}{125} \frac{x^3}{3!} - \frac{504}{625} \frac{x^4}{4!} + \frac{9576}{3125} \frac{x^5}{5!} - \frac{229824}{15625} \frac{x^6}{6!} + \frac{6664896}{78125} \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo x por 0.5 , resulta: **1.08451104**

27.- Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}$, se pide:

- Fórmula de Maclaurin** de grado 4 de $f(x)$.
- Dar un valor aproximado de $\sqrt{1.5}$ utilizando el **polinomio de Maclaurin** obtenido en el apartado anterior.
- Acotar el **error** cometido en dicha aproximación.

Solución:

a) Fórmula de Maclaurin = Polinomio de Maclaurin + Resto de Lagrange

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir la fórmula de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1+x)^{-0.5}$	1
1	$-\frac{1}{2}(1+x)^{-1.5}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{4}(1+x)^{-2.5}$	$\frac{3}{4}$
3	$-\frac{15}{8}(1+x)^{-3.5}$	$-\frac{15}{8}$
4	$\frac{105}{16}(1+x)^{-4.5}$	$\frac{105}{16}$

Cálculo del polinomio de Maclaurin

$$T_{n=4} \left[\sqrt{\frac{1}{1+x}}, a=0 \right] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \frac{35x^4}{128} - \frac{5x^3}{16} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1$$

Cálculo del resto de Lagrange: $E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$

$$f^{(5)}(c) = \left(\frac{d}{dc} \right)^5 \sqrt{\frac{1}{1+c}} = -\frac{945}{32(c+1)^{\frac{11}{2}}}$$

Fórmula de Maclaurin:

$$\sqrt{\frac{1}{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{945}{32(c+1)^{\frac{11}{2}}} \frac{x^5}{5!} \quad c \in [0,x], \text{ o bien, } c \in [x,0]$$

b) Se calcula el valor de x tal que $f(x) = \sqrt{1.5}$

$$\sqrt{\frac{1}{1+x}} = \sqrt{1.5} \text{ obteniéndose } x = -\frac{1}{3}$$

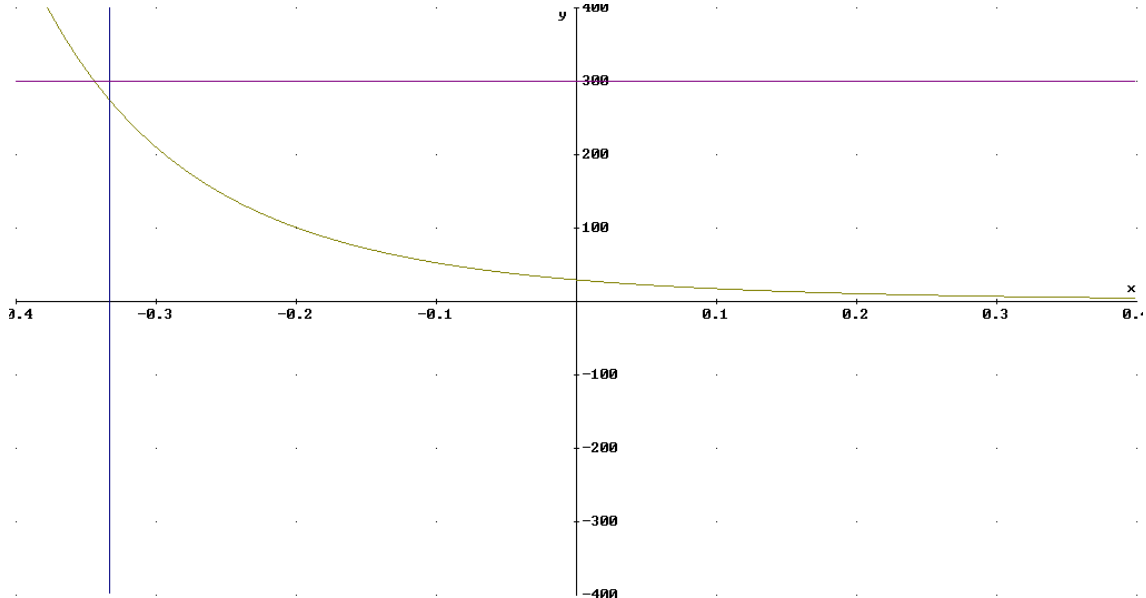
Se sustituye este valor en el polinomio

$$\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}} = 1 - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{2} + \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{8} - \frac{5\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{16} + \frac{35\left(-\frac{1}{3}\right)^4}{128} \approx \underline{1.223283179}$$

$$c) E(x) \leq \max_{c \in [-\frac{1}{3}, x]} \left| -\frac{945}{32(c+1)^2} \frac{x^5}{5!} \right|$$

La gráfica de

$$\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^5 \sqrt{1+x} \right| \Rightarrow \left| -\frac{945}{32(x+1)^2} \right|$$



Al ser una función estrictamente decreciente en el intervalo estudiado, tiene su máximo en $x = -\frac{1}{3}$

$$\max_{c \in [-\frac{1}{3}, x]} \left| -\frac{945}{32(c+1)^2} \right| = \frac{945}{32\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2} \text{ por lo tanto}$$

$$E\left(-\frac{1}{3}\right) \leq \left| \frac{945}{32\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^5}{5!} \right| \approx \mathbf{0.009418814317}$$

28.- Dada la función $f(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$ Se pide:

a) *Polinomio de Maclaurin* de grado 5 de $f(x)$ y *resto de Lagrange* correspondiente a dicho polinomio.

b) Calcular el valore aproximados de $\cos\left(\ln\left(\frac{1}{0.9}\right)\right)$ mediante el polinomio de Maclaurin anterior y acotar el *error* cometido

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$	1
1	$\frac{1}{1+x} \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$	0
2	$-\frac{1}{(1+x)^2} \left(\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) \right)$	-1
3	$\frac{1}{(1+x)^3} \left(3\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) \right)$	3
4	$-\frac{1}{(1+x)^4} 10\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$	-10
5	$\frac{10}{(1+x)^5} \left(4\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) \right)$	40

$$T_{n=5} \left[\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right), a=0 \right] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= 1 + 0x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{-10}{4!}x^4 + \frac{40}{5!}x^5 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{12} + \frac{x^5}{3}$$

Siendo el resto de Lagrange: $E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$

$$\text{Dado que } \frac{d^6}{dc} \left(\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+c}\right)\right) \right) = \frac{10 \left(9\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{1+c}\right)\right) - 19\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+c}\right)\right) \right)}{(c+1)^6}$$

$$R_5(x) = \frac{10 \left(9\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{1+c}\right)\right) - 19\cos\left(\ln\left(\frac{1}{1+c}\right)\right) \right)}{(c+1)^6} \frac{x^6}{6!} \text{ con } c \in [x, 0], \text{ o bien, } c \in [0, x]$$

b) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{0.9} \Rightarrow x = -0.1$

$$\cos\left(\ln\left(\frac{1}{0.9}\right)\right) \approx T_5(-0.1) = \frac{(-0.1)^5}{3} - \frac{5(-0.1)^4}{12} + \frac{(-0.1)^3}{2} - \frac{(-0.1)^2}{2} + 1 = 0.994455$$

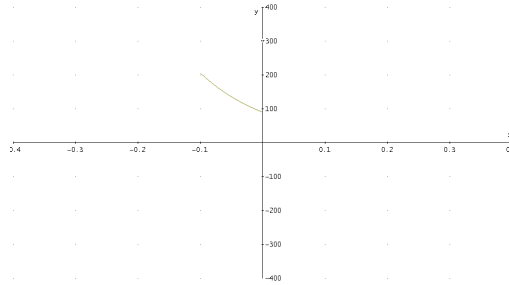


FÓRMULA DE TAYLOR

$$|R_5(-0.1)| \leq \max_{c \in [-0.1, 0]} \left| \frac{10 \left(9 \operatorname{sen} \left(\ln \left(\frac{1}{1+c} \right) \right) - 19 \cos \left(\ln \left(\frac{1}{1+c} \right) \right) \right)}{(c+1)^6} \right| \frac{(-0.1)^6}{6!}$$

Para acotar el resto, nos basamos en lo siguiente: dado que, en general se cumple para cualquier ángulo α que $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ y $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Y que se observa que el valor más pequeño que puede tomar el denominador es en $c = -0.1$



Se puede acotar:

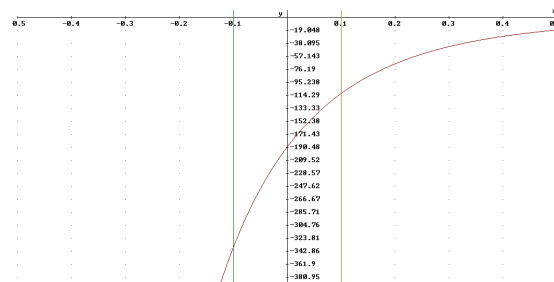
$$|R_5(-0.1)| \leq \left| \frac{10 \left(9 \operatorname{sen} \left(\ln \left(\frac{1}{1+c} \right) \right) - 19 \cos \left(\ln \left(\frac{1}{1+c} \right) \right) \right)}{(c+1)^6} \right| \frac{(-0.1)^6}{6!} \quad c \in [-0.1, 0]$$

$$\text{Por: } |R_5(-0.1)| \leq \left| \frac{10(9 \cdot 1 - 19 \cdot (-1))}{(-0.1+1)^6} \right| \frac{-0.1^6}{6!} \leq \frac{280}{0.9^6} \frac{-0.1^6}{6!} = 527 \frac{-0.1^6}{6!} \leq \mathbf{7.319 \cdot 10^{-7}}$$

NOTA:

Teniendo DERIVE se puede acotar el resto de forma más precisa puesto que se puede representar la derivada sexta de la función, que tiene la forma que aparece en el siguiente gráfico, se puede deducir que el máximo valor (en valor absoluto) se obtiene en $c = -0.1$.

Y además se pueden calcular los valores de las funciones $\operatorname{sen} \left(\ln \left(\frac{1}{1+x} \right) \right)$ y $\cos \left(\ln \left(\frac{1}{1+x} \right) \right)$



Y vale

$$|R_5(-0.1)| \leq \left| \frac{10 \left(9 \operatorname{sen} \left(\ln \left(\frac{1}{1-0.1} \right) \right) - 19 \cos \left(\ln \left(\frac{1}{1-0.1} \right) \right) \right)}{(-0.1+1)^6} \right| \frac{(-0.1)^6}{6!} \leq$$

$$\leq 337.727 \frac{0.1^6}{6!} \leq 4.691 \cdot 10^{-7}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



29.- Dada la función $y = e^{\cos x}$, se pide:

a) Calcular y' , y'' , y'''

b) Escribir el *polinomio de segundo grado de Maclaurin* de la función dada.

c) Usando el polinomio anterior calcular aproximadamente $\sqrt{e} = e^{\cos(\frac{\pi}{3})}$ y acotar el *error* cometido en dicha aproximación.

d) Hallar los *extremos relativos* de la función $y = e^{\cos x}$

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$e^{\cos x}$	e
1	$y' = -e^{\cos x} \operatorname{sen} x$	0
2	$y'' = e^{\cos x} (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos} x)$	-e
3	$y''' = e^{\cos x} (\operatorname{sen} x \operatorname{cos}^2 x + 3\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x)$	0

b)

$$T_{n=2}[e^{\cos x}, a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = e + 0x - \frac{e}{2}x^2 = e - \frac{e}{2}x^2$$

$$c) \sqrt{e} = e^{\cos(\frac{\pi}{3})} = e^{\cos x} \Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$e^{\cos(\frac{\pi}{3})} \approx e - \frac{e}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \approx \underline{1.227817034}$$

$$E(x) = |R_{n=2}(x)| = \left| f'''(c) \frac{x^3}{3!} \right| = \left| e^{\cos c} (\operatorname{sen} c \operatorname{cos}^2 c + 3\operatorname{sen} c \operatorname{cos} c) \frac{x^3}{3!} \right|$$

Buscamos el máximo de y''' entre $a=0$ y $x=\pi/3$

$$y'''(c) = e^{\cos c} (\operatorname{sen} c \operatorname{cos}^2 c + 3\operatorname{sen} c \operatorname{cos} c) \Rightarrow y'''(c) = e^{\cos c} (\operatorname{cos}^4 c + 6\operatorname{cos}^3 c - 5\operatorname{cos} c - 5\operatorname{sen}^2 c + 2) = 0$$

Resolviendo numéricamente la ecuación resulta: $c=0.61161385$,

luego $f'''(c) = f'''(0.61161385) \approx 4.070770899$

Una cota superior puede ser 4.07770899, y por tanto, el error:

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) < 4.070770899 \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} \approx \underline{0.7791323999}$$

d) Buscamos máximos y mínimos de y :

Se trata de una función impar y periódica de período 2π

$$y'(c) = -e^{\cos x} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \Rightarrow y''(0) = e^{\cos(0)} (\operatorname{sen}^2(0) - \operatorname{cos}(0)) = -e < 0 \\ \pm\pi \Rightarrow y''(\pm\pi) = e^{\cos(\pm\pi)} (\operatorname{sen}^2(\pm\pi) - \operatorname{cos}(\pm\pi)) = \frac{1}{e} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Extremos: } \begin{cases} (0, y(0)) = (0, e) \\ (\pm\pi, y(\pm\pi)) = \left(\pm\pi, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$$

Máximos en $(0+2\pi k, e)$ y mínimos en $(\pi+2\pi k, 1/e)$ para todo k número entero.

30.-Sea la función $f(x) = xe^{-x^2}$, se pide:

- Hallar una aproximación de $f(1/2)$ y estimar el *error* cometido al usar el *polinomio de Taylor* de f para $a=1$, $n=7$.
- Lo mismo que en el apartado a) tomando el *polinomio de Maclaurin* de grado 7 de f .
- Argumentar cuál de ambos polinomios es el más adecuado para aproximar $f(1/2)$.
- Obtener el polinomio de Maclaurin de grado n de la función $f(x)$ a partir del polinomio de grado n de e^{-x} que es el que sigue:

$$T_n [e^{-x}, a = 0,] = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Solución:

- a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor y de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(0)$
0	xe^{-x^2}	e^{-1}	0
1	$(1-2x^2)e^{-x^2}$	$-e^{-1}$	1
2	$(-6+4x^2)xe^{-x^2}$	$-2e^{-1}$	0
3	$-(6-24x^2+8x^4)e^{-x^2}$	$10e^{-1}$	-6
4	$-(60-80x^3+16x^4)xe^{-x^2}$	$-4e^{-1}$	0
5	$-4(-15+90x^2-60x^4+8x^6)e^{-x^2}$	$-92e^{-1}$	60
6	$8(-105+210x^2-84x^4+8x^6)xe^{-x^2}$	$232e^{-1}$	0
7	$-8(105-840x^2+840x^4-224x^6+16x^8)e^{-x^2}$	$824e^{-1}$	-840

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{n=7} [xe^{-x^2}, a=1] &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(7)}(1)}{7!}(x-1)^7 = e^{-1} - e^{-1}(x-1) - \\ &- \frac{2e^{-1}}{2!}(x-1)^2 + \frac{10e^{-1}}{3!}(x-1)^3 - \frac{4e^{-1}}{4!}(x-1)^4 - \frac{92e^{-1}}{5!}(x-1)^5 + \frac{232e^{-1}}{6!}(x-1)^6 + \frac{824e^{-1}}{7!}(x-1)^7 = \\ &= (58 + 1288x + 1302x^2 - 3815x^3 + 1750x^4 + 462x^5 - 518x^6 + 103x^7) \frac{e^{-1}}{630} \end{aligned}$$

El valor aproximado de $f(1/2)$ con el polinomio de Taylor es:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \left(58 + 1288\left(\frac{1}{2}\right) + 1302\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3815\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1750\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 462\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 518\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 103\left(\frac{1}{2}\right)^7\right) \frac{e^{-1}}{630} \approx$$

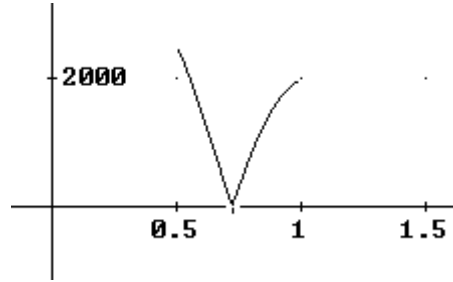
0.389571737

El error estimado en esta aproximación viene dado por la expresión:

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \left| R_{n=7}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| f^{(8)}(c) \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^8}{8!} \right|$$

Siendo $f^{(8)}(c) = 16c(945 - 2520c^2 + 1512c^4 - 288c^6 - 16c^8)e^{-c^2}$ con $\frac{1}{2} < c < 1$

FÓRMULA DE TAYLOR



Vemos que el máximo de la octava derivada de $f(x)$ se alcanza en $c=1/2$, luego $f^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) < 2524$

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \left| R_{n=7}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| f^{(8)}(c) \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^8}{8!} \right| < 2524 \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^8}{8!} = 0.0002445 < \mathbf{0.0003}$$

Luego $0.3892 < f(1/2) < 0.3898$

c) El valor aproximado de $f(1/2)$ con el polinomio de Maclaurin:

$$T_{n=7}\left[xe^{-x^2}, a=0\right] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 = 0 + x - \frac{6}{3!}x^3 + \frac{60}{5!}x^5 - \frac{840}{7!}x^7 =$$

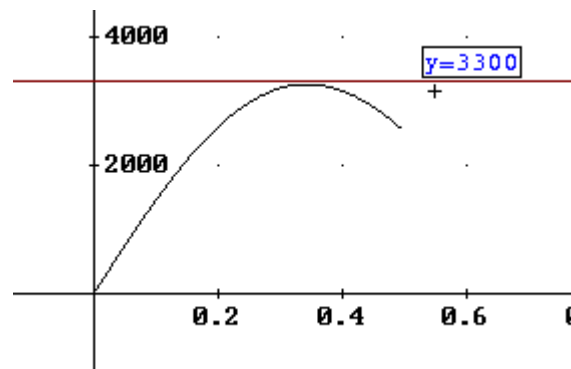
$$= x - x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{6}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{6} = \mathbf{0.3893229166}$$

El error estimado en esta aproximación viene dado por la expresión:

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \left| R_{n=7}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| f^{(8)}(c) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{8!} \right|$$

Siendo $f^{(8)}(c) = 16c(945 - 2520c^2 + 1512c^4 - 288c^6 - 16c^8)e^{-c^2}$ con $0 < c < \frac{1}{2}$



En este caso el máximo no se alcanza en un extremo del intervalo sino en un punto interior y una cota de ese máximo puede ser 3300. (Obtenida aproximadamente a partir de la gráfica), luego

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \left| R_{n=7}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| f^{(8)}(c) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{8!} \right| < 3300 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{8!} = 0.000319707961 < \mathbf{0.0004}$$

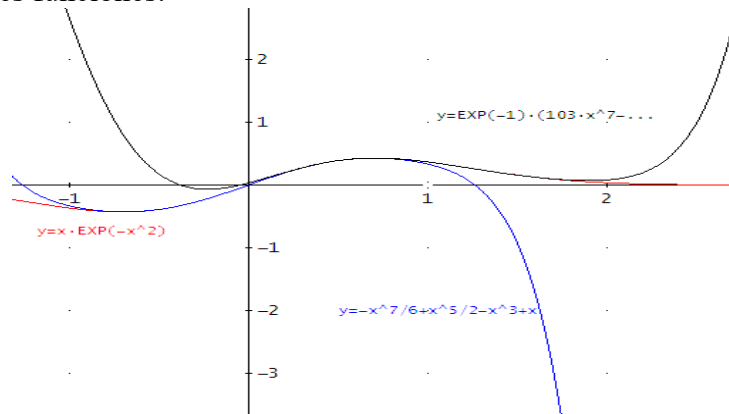


FÓRMULA DE TAYLOR



Luego $0.3889 < f(1/2) < 0.3897$

Las gráficas de las tres funciones:



d) Con el **primer polinomio (a=1)** se fij+

e) an **3 cifras decimales** y con el segundo solo 2, luego recomendar utilizar el primero de los polinomios es más adecuado.

d) Escribimos el polinomio de Maclaurin de e^{-x} de grado r

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^r \frac{x^r}{r!}$$

Sustituimos $x=x^2$, ya que cuando x tiende a cero se verifica que también que x^2 tiende a cero

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{r!}$$

Multiplicamos por x

$$x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{r!}$$

Observamos que solo hay términos de grado impar (se trata de una función impar), luego el polinomio de Maclaurin de la función $f(x)=xe^{-x^2}$ de grado n es:

Si n es un n° impar $n=2r+1$, luego $r=(n-1)/2$ y el polinomio es:

$$x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

Si n es un n° par $n=2r$, el último exponente, que ha de ser impar, será $n-1=2r+1$ luego $r=(n-2)/2$ y el polinomio es:

$$x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{x^{n-1}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$$

- 31.- Dada la función $f(x) = (x + 1)e^{\frac{x-1}{x+1}}$, se pide:
- Comprobar si se verifica la identidad: $(x + 1)^2 f'(x) - (x + 3)f(x) - 1 = 0$
 - Escribir el **polinomio de Maclaurin** de grado 5 de la función $f(x)$.
 - Calcular un valor aproximado de $f(0.1)$ con el polinomio anterior.
 - Estimar el **error** cometido en dicha aproximación.
 - ¿Existe algún valor de x ($x = a$) para el cuál no se cumplan las hipótesis de la **fórmula de Taylor**?

Solución:

$$a) f(x) = (x+1)e^{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x+3}{x+1}\right)e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(x+1)^2 f'(x) - (x+3)f(x) - 1 = (x+1)^2 \left(\frac{x+3}{x+1}\right)e^{\frac{x-1}{x+1}} - (x+3)(x+1)e^{\frac{x-1}{x+1}} - 1 = -1 \neq 0$$

NO

b) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	f ⁽ⁿ⁾ (x)	f ⁽ⁿ⁾ (0)
0	$(x+1)e^{\frac{x-1}{x+1}}$	e^{-1}
1	$\left(\frac{x+3}{x+1}\right)e^{\frac{x-1}{x+1}}$	$3e^{-1}$
2	$\frac{4}{(x+1)^3}e^{\frac{x-1}{x+1}}$	$4e^{-1}$
3	$-\frac{4(1+3x)}{(x+1)^5}e^{\frac{x-1}{x+1}}$	$-4e^{-1}$
4	$\frac{16x(2+3x)}{(x+1)^7}e^{\frac{x-1}{x+1}}$	0
5	$-\frac{16(-2+15x^2+15x^3)}{(x+1)^9}e^{\frac{x-1}{x+1}}$	$32e^{-1}$

$$T_{n=5} \left[(x+1)e^{\frac{x-1}{x+1}}, a=0 \right] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^V(0)}{5!}x^5 =$$

$$e^{-1} + 3e^{-1}x + 4e^{-1}\frac{x^2}{2!} - \frac{4e^{-1}}{3!}x^3 + \frac{32e^{-1}}{5!}x^5 = \left(1 + 3x + 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15}\right)e^{-1}$$

c) Sustituyendo x por 0.1 en el polinomio anterior:

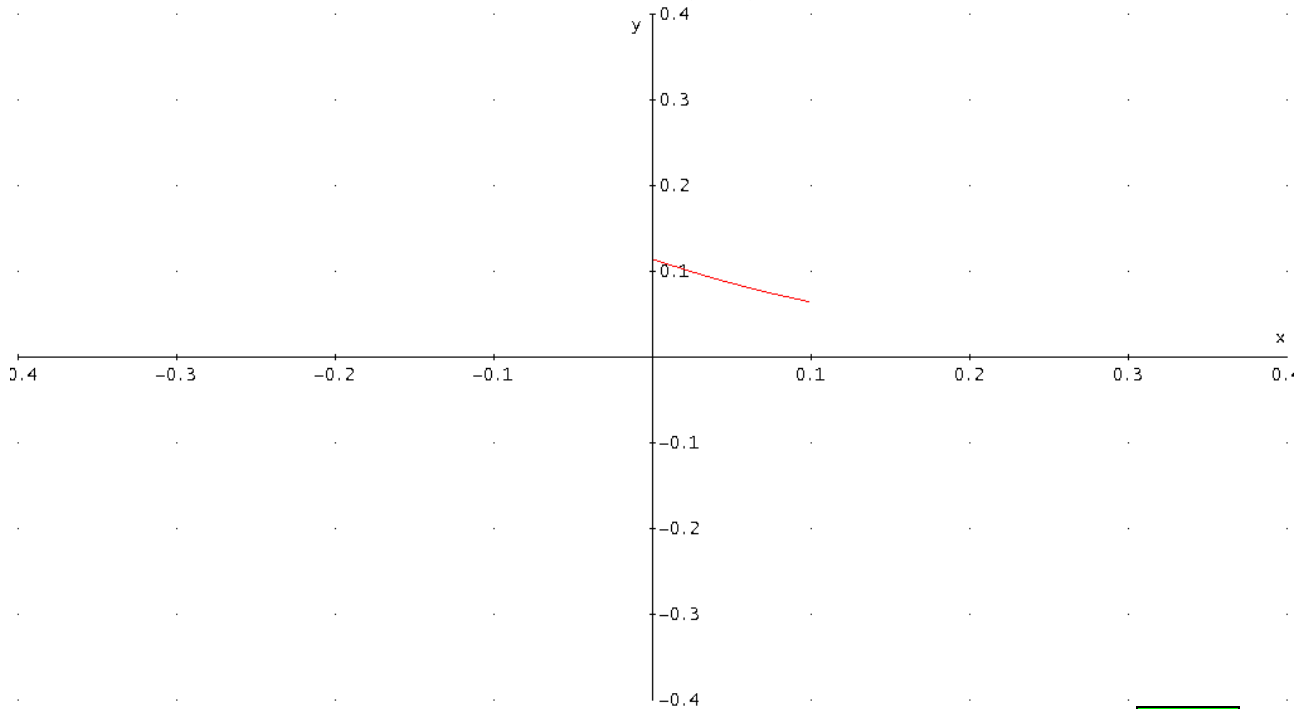
$$f(0.1) = \left(1 + 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1^2 - \frac{2 \cdot 0.1^3}{3} + \frac{4 \cdot 0.1^5}{15}\right)e^{-1} \approx \mathbf{0.4853565903}$$

$$d) E(0.1) = |R_{n=5}(0.1)| = \left| f^{(6)}(c) \frac{0.1^6}{6!} \right| = \left| \frac{32(-7 - 24c + 60c^3 + 45c^4)}{(c+1)^{11}} e^{\frac{c-1}{c+1}} \frac{0.1^6}{6!} \right|$$



FÓRMULA DE TAYLOR

Consideramos una parte de la expresión: $\frac{32(-7 - 24c + 60c^3 + 45c^4)}{6!(c+1)^{11}} e^{\frac{c-1}{c+1}}$



La expresión representada está acotada por 0.2, por tanto una cota superior del error es: $0.2 \cdot 10^{-6}$

e) **Si**, puesto que $a=-1$ no es del dominio de la función.

$$\exists f(-1) = (-1+1)e^{\frac{-1-1}{-1+1}}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



32.- Dada la función $f(x) = 4 \operatorname{arctg}(x)$, se pide:

a) Hallar una aproximación del valor de $f(1)$ utilizando el *polinomio de Maclaurin*, de grado 10, de la función $f(x)$.

b) Estimar el *error* cometido en la aproximación anterior.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$4\operatorname{arctg}(x)$	0
1	$\frac{4}{1+x^2}$	4
2	$-\frac{8x}{(1+x^2)^2}$	0
3	$\frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$	-8
4	$\frac{96x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$	0
5	$\frac{96x(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$	96
6	$-\frac{960x(3x^4-10x^2+3)}{(1+x^2)^6}$	0
7	$\frac{2880(7x^6-35x^4+21x^2-1)}{(1+x^2)^7}$	-2880
8	$-\frac{161280x(x^6-7x^4+7x^2-1)}{(1+x^2)^8}$	0
9	$\frac{161280(9x^8-84x^6+126x^4-36x^2+1)}{(1+x^2)^9}$	161280
10	$-\frac{2903040x(5x^8-60x^6+126x^4-60x^2+5)}{(1+x^2)^{10}}$	0

$$T_{n=10} [4\operatorname{arctg}(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 + \frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10} =$$

$$4x - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{96}{5!}x^5 - \frac{2880}{7!}x^7 + \frac{161280}{9!}x^9 = \boxed{4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{5} - \frac{4x^7}{7} + \frac{4x^9}{9}}$$

Sustituyendo $x=1$, nos da el valor aproximado de $f(1) \approx \mathbf{3.339682539}$

$$\text{b) } E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=0 \\ x=1 \\ n=10 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(11)}(c) \frac{1^{11}}{11!} \right|$$



FÓRMULA DE TAYLOR

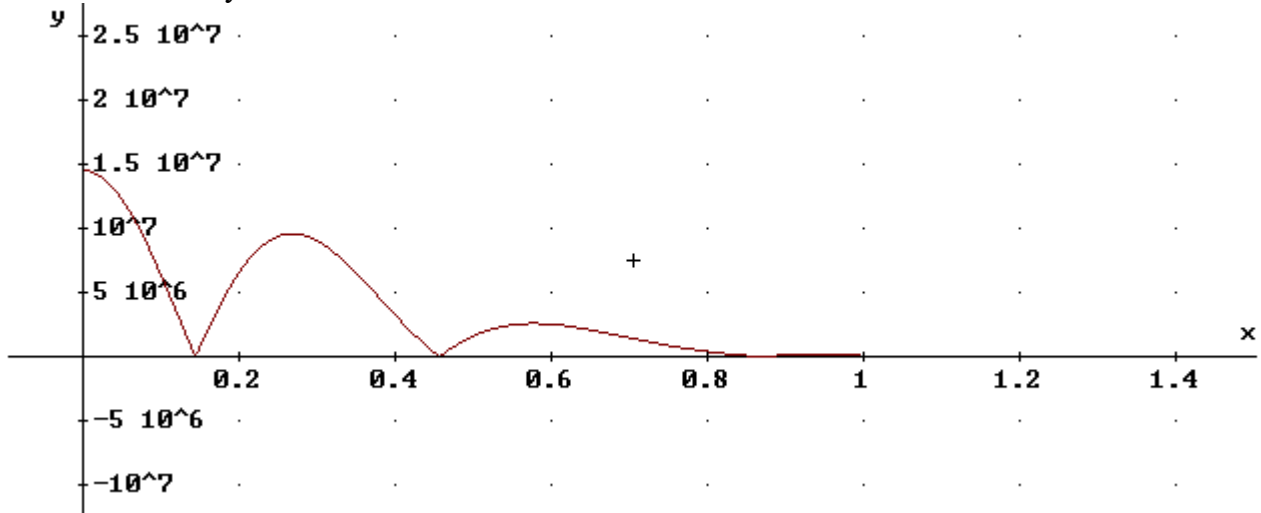


Necesitamos acotar la derivada de orden $n+1=11$

$$14515200 \cdot (11 \cdot c^{10} - 165 \cdot c^8 + 462 \cdot c^6 - 330 \cdot c^4 + 55 \cdot c^2 - 1)$$

$$f^{(11)}(c) = \frac{14515200 \cdot (11 \cdot c^{10} - 165 \cdot c^8 + 462 \cdot c^6 - 330 \cdot c^4 + 55 \cdot c^2 - 1)}{(c^2 + 1)^{11}}$$

Buscamos el máximo entre $a=0$ y $x=1$; para ello representamos el valor absoluto de la derivada undécima entre 0 y 1:



El máximo se obtiene en $c=0$, luego una cota superior puede ser 14515200

$$E(x=1) = \left| f^{(11)}(c) \frac{1^{11}}{11!} \right| = \frac{|f^{(11)}(c)|}{11!} < \frac{14515200}{11!} \approx \mathbf{0.3636363636}$$

$\begin{matrix} a=0 \\ x=1 \\ n=10 \\ 0 < c < 1 \end{matrix}$



FÓRMULA DE TAYLOR



33.- a) Calcular aproximadamente $\cosh 1$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* de grado 10 de la función $\cosh x$.
 b) Acotar el *error* cometido en la aproximación anterior usando el *resto de Lagrange*.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\cosh(x)$	1
1	$\sinh(x)$	0
2	$\cosh(x)$	1
3	$\sinh(x)$	0
4	$\cosh(x)$	1
5	$\sinh(x)$	0
6	$\cosh(x)$	1
7	$\sinh(x)$	0
8	$\cosh(x)$	1
9	$\sinh(x)$	0
10	$\cosh(x)$	1

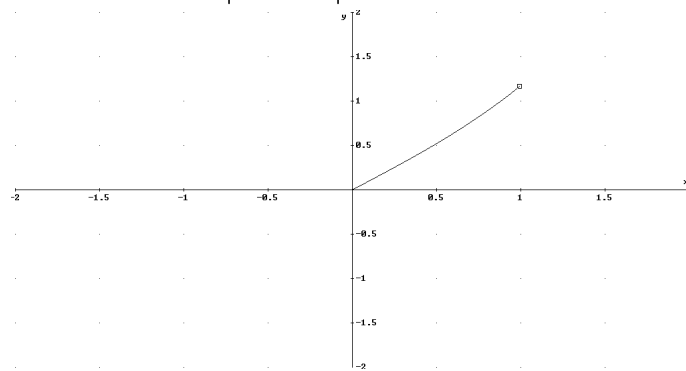
$$T_{n=10}[\cosh(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 + \frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{3628800}x^{10}$$

Sustituyendo $x=1$, nos da el valor aproximado de $f(1)=\cosh(1) \approx 1.543080632$

b) Para calcular el error necesitamos acotar en la derivada undécima

$$\text{Representando: } |f^{(11)}(c)| = |\sinh(c)| = \left| \frac{e^c}{2} - \frac{e^{-c}}{2} \right|$$



La función es creciente, una cota superior puede ser 2.

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{x=1 \\ n=10 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(11)}(c) \frac{1^{11}}{11!} \right| = \left| \sinh(c) \frac{1^{11}}{11!} \right|$$

$$E(x=1) = \left| \sinh(c) \frac{1^{11}}{11!} \right| < 2 \frac{1^{11}}{11!} \approx 5.010421677 \cdot 10^{-8}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



34.- a) Calcular aproximadamente $\arg \sinh 1$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* de grado 10 de la función $\arg \sinh x$.

b) Acotar el *error* cometido en la aproximación anterior usando el *resto de Lagrange*.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\operatorname{argsenh}(x)$	0
1	$\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$	1
2	$-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$	0
3	$\frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$	-1
4	$\frac{3x(3-2x^2)}{(1+x^2)^{7/2}}$	0
5	$\frac{3(8x^4-24x^2+3)}{(1+x^2)^{9/2}}$	9
6	$-\frac{15x(8x^4-40x^2+15)}{(1+x^2)^{11/2}}$	0
7	$\frac{45(16x^6-120x^4+90x^2-5)}{(1+x^2)^{13/2}}$	-225
8	$-\frac{315(16x^6-168x^4+210x^2-35)}{(1+x^2)^{15/2}}$	0
9	$\frac{315(128x^8-1792x^6+3360x^4-1120x^2+35)}{(1+x^2)^{17/2}}$	11025
10	$-\frac{2835x(128x^8-2304x^6+6048x^4-3360x^2+315)}{(1+x^2)^{19/2}}$	0

$$T_{n=10}[\operatorname{argsenh}(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 + \frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10} =$$

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 - \frac{225}{7!}x^7 + \frac{11025}{9!}x^9 = \boxed{x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152}}$$

Sustituyendo $x=1$, nos da el valor aproximado de $f(1)=\operatorname{argsenh}(1) \approx \mathbf{0.8940724206}$

b) $E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{x=1 \\ n=10 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(11)}(c) \frac{1^{11}}{11!} \right|$

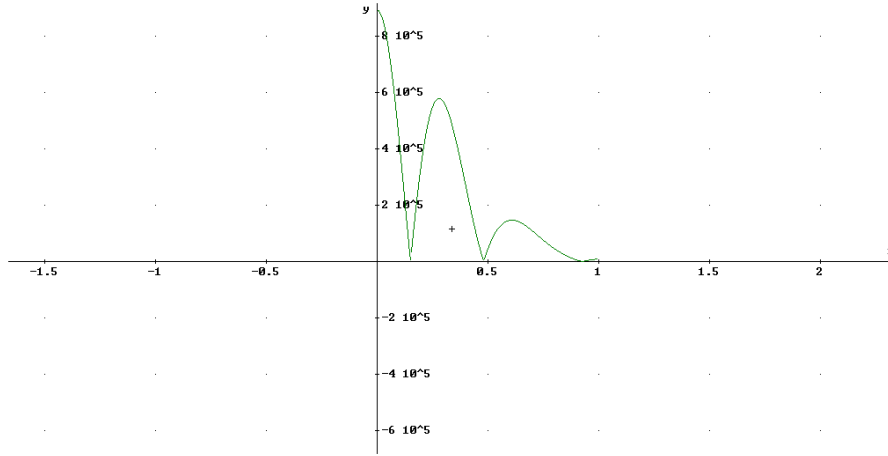


FÓRMULA DE TAYLOR



Representando: $|f^{(11)}(c)|$

$$f^{(11)}(c) = \frac{14175 \cdot (256 \cdot c^{10} - 5760 \cdot c^8 + 20160 \cdot c^6 - 16800 \cdot c^4 + 3150 \cdot c^2 - 63)}{(c^2 + 1)^{21/2}}$$



El máximo se obtiene en $c=0$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{x=1 \\ n=10 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(11)}(c) \frac{1^{11}}{11!} \right| < \left| f^{(11)}(0) \frac{1^{11}}{11!} \right| = 8.93025 \frac{1}{11!} \approx \mathbf{0.02237215909}$$

35.- Dada la función $\sqrt[3]{1+2x}$, se pide:

a) Calcular el **polinomio de Maclaurin** de grado 5 de dicha función.

b) Utilizar el polinomio anterior para obtener un valor aproximado de $\sqrt[3]{3}$ estimando una cota máxima del **error** cometido.

c) Utilizar el polinomio anterior para obtener un valor aproximado $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+2x} dx$

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sqrt[3]{1+2x}$	1
1	$\frac{2}{3(1+2x)^{2/3}}$	2/3
2	$-\frac{8}{9(1+2x)^{5/3}}$	-8/9
3	$\frac{80}{27(1+2x)^{8/3}}$	80/27
4	$-\frac{1280}{81(1+2x)^{11/3}}$	-1280/81
5	$\frac{28160}{243(1+2x)^{14/3}}$	28160/243

$$T_{n=5}[\sqrt[3]{1+2x}, a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(V)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$1 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} \frac{1}{2!}x^2 + \frac{80}{27} \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1280}{81} \frac{1}{4!}x^4 + \frac{28160}{243} \frac{1}{5!}x^5 = \boxed{1 + \frac{2}{3}x - \frac{4x^2}{9} + \frac{40x^3}{81} - \frac{160x^4}{243} + \frac{704x^5}{729}}$$

b) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2x} \Rightarrow x = 1$

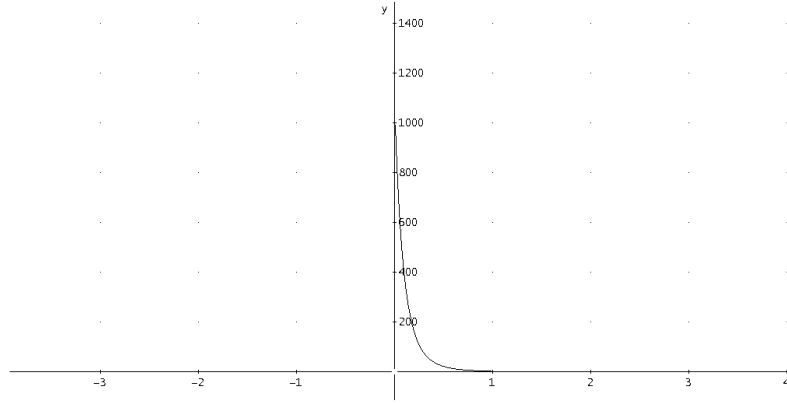
$$\sqrt[3]{3} = f(1) \approx 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{4 \cdot 1^2}{9} + \frac{40 \cdot 1^3}{81} - \frac{160 \cdot 1^4}{243} + \frac{704 \cdot 1^5}{729} \approx \boxed{2.023319615}$$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{x=1 \\ n=5 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{1^6}{6!} \right|$$

$$f(c) = \sqrt[3]{1+2c} \Rightarrow f^{(6)}(c) = \frac{788480}{729(1+2c)^{17/3}}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



El máximo se obtiene en $c=0$, luego una cota superior puede ser:

$$|f^{(6)}(c)| = \left| \frac{788480}{729(1+2c)^{17/3}} \right| < \frac{788480}{729}$$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{x=1 \\ n=5 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{1^6}{6!} \right| < \left| f^{(6)}(0) \frac{1^6}{6!} \right| = \frac{788480}{729} \frac{1}{6!} \approx \mathbf{1.502210028}$$

c)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+2x} \, dx \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3}x - \frac{4x^2}{9} + \frac{40x^3}{81} - \frac{160x^4}{243} + \frac{704x^5}{729} \right) dx \approx \mathbf{\frac{232}{243}}$$

36.- a) Obtener el *polinomio de Maclaurin* de grado n de la función:

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

b) Tomando en particular $n=3$ calcular aproximadamente $\ln \sqrt{11/9}$ y acotar el *error* en la aproximación.

Solución:

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$$

Veáse ejercicio 2

$$T_n [\ln(1+x), a=0] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Ahora sustituyendo x por $-x$:

$$T_n [\ln(1-x), a=0] = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} (1-c)^{-(n+1)}$$

$$c \in (0, x)$$

Restando y dividiendo por 2:

$$T_n \left[\frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)), a=0 \right] = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$T_n \left[\frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)), a=0 \right] = \begin{cases} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{11}{9}} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$T_{n=3} \left[\frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)), a=0 \right] = x + \frac{x^3}{3}$$

$$\ln \left(\sqrt{\frac{11}{9}} \right) \approx \frac{1}{10} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3} = 0.1003333333$$

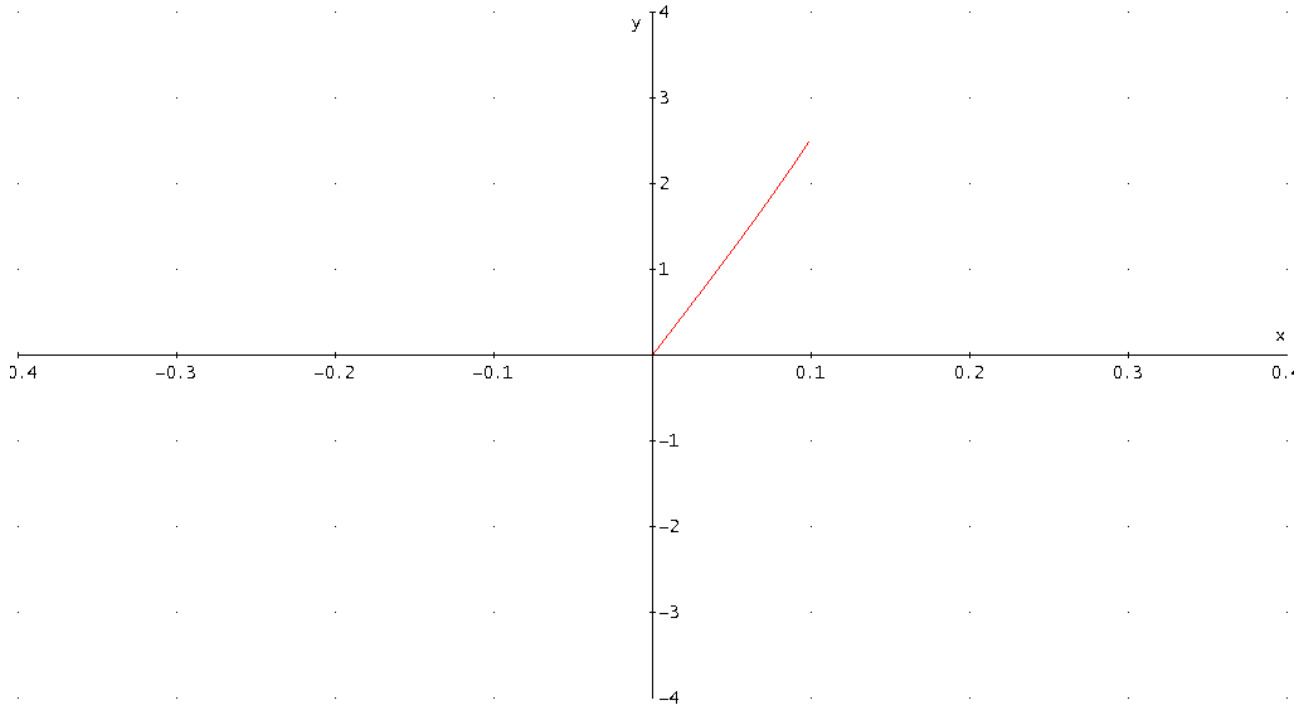
$\ln \sqrt{11/9}$ es aproximadamente 0.1003333333

Acotación del error en la aproximación

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=0 \\ n=3 \\ x=1/10 \\ 0 < c < 1/10}} = \left| f^{(4)}(c) \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{4!} \right| = \left| \frac{24c(1+c^2)}{(c+1)^4 (c-1)^4} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{4!} \right|$$



FÓRMULA DE TAYLOR



$$f^{(4)}(c) = \left| \frac{24c(1+c^2)}{(c+1)^4(c-1)^4} \right| < \frac{24\left(\frac{1}{10}\right)\left(1+\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)}{\left(\left(\frac{1}{10}\right)+1\right)^4\left(\left(\frac{1}{10}\right)-1\right)^4} \approx 2.523433342 < 3$$

$$E\left(\frac{1}{10}\right) = \left| f^{(4)}(c) \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{4!} \right| < \left| 3 \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{4!} \right| = \frac{1.25 \cdot 10^{-5}}{1}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



37.- Dada la función $f(x) = \arctg x$ se pide:

a) *Fórmula de Taylor* de grado 5 en el punto $a = 1$

b) Dar un valor aproximado de $\arctg(0.8)$ utilizando el *polinomio de Taylor* de grado 5 obtenido en el apartado anterior.

c) Acotar el *error* cometido en dicha aproximación.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\arctg x$	$\frac{\pi}{4}$
1	$\frac{1}{(1+x^2)}$	1/2
2	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	-1/2
3	$\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$	1/2
4	$\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$	0
5	$\frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$	-3

$$T_{n=5}[\arctg x, a=1] = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(V)}(1)}{5!}(x-1)^5 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1/2}{2!}(x-1)^2 + \frac{1/2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3}{5!}(x-1)^5 = \frac{-3x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 135x - 30\pi + 97}{120}$$

Obtención del resto de Lagrange: $f^{(6)}(c) = -\frac{240c(3c^4 - 10c^2 + 3)}{(1+c^2)^6}$

$$\Rightarrow R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{\substack{a=1 \\ n=5}}{=} f^{(6)}(c) \frac{(x-1)^6}{6!} = -\frac{240c(3c^4 - 10c^2 + 3)}{(c^2+1)^6} \frac{1}{6!} (x-1)^6, c \in [x, 1]$$

a) *Fórmula de Taylor=Polinomio+Resto*

$$f(x) = \frac{-3x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 135x - 30\pi + 97}{120} - \frac{240c(3c^4 - 10c^2 + 3)}{(c^2+1)^6} \frac{1}{6!} (x-1)^6, c \in [x, 1]$$

b) Valor aproximado de $\arctg 0.8$

Sustituyendo $x=0.8$ en el polinomio calculado en el apartado a) se obtiene

$$\arctg(0.8) \approx \frac{93750\pi - 41497}{375000} \approx 0.6747394967 \text{ rad} = \boxed{38^\circ 39' 35''}$$

FÓRMULA DE TAYLOR

c) Acotación del error cometido: $E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$

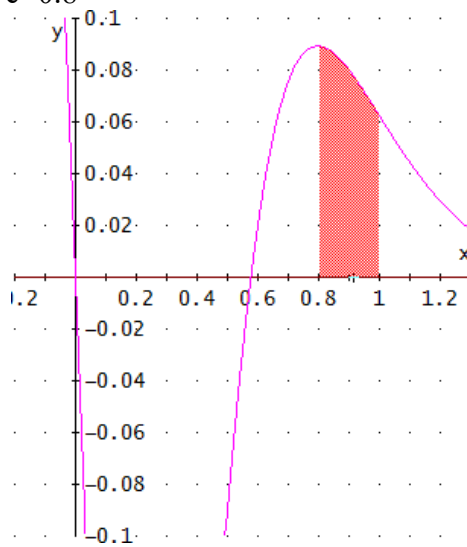
$$E(0.8) = |R_{n=5}(0.8)| = \left| -\frac{240c(3c^4 - 10c^2 + 3)}{(c^2+1)^6} \frac{1}{6!} (1-0.8)^6 \right|, c \in [0.8, 1]$$

$$R_{n=5}(0.8) \leq \frac{1}{6!} (1-0.8)^6 \max_{c \in [0.8, 1]} \left| \frac{240c(3c^4 - 10c^2 + 3)}{(c^2+1)^6} \right|$$

Se trata de acotar la función $g(c)$ dada por:

$$g(c) = -\frac{240c(3c^4 - 10c^2 + 3)}{(c^2+1)^6} \text{ en el intervalo dado.}$$

Representando esta función y con una escala adecuada en los ejes X e Y, se observa que el máximo valor dentro de $[0.8, 1]$ se da en $c=0.8$



Si hubiera duda en la gráfica se calcularía el máximo de la función dentro del intervalo $[0.5, 1]$

$$g'(c) = \frac{3 \cdot (7c^6 - 35c^4 + 21c^2 - 1)}{(c^2+1)^7}$$

Resolviendo $7c^6 - 35c^4 + 21c^2 - 1 = 0$ se obtiene

$c = 0.7974733888$ que no pertenece al intervalo $[0.8, 1]$ con lo que se comprueba que el máximo se obtiene para $c=0.8$ y vale (sustituyendo 0.8 en $g(c)$)

$$g(0.8) = 0.08927435662$$

siendo $R_{n=5}(0.8) \leq \frac{1}{6!} (1-0.8)^6 \cdot 0.08927435662 = \mathbf{1.9 \cdot 10^{-6}}$ que es una cota del error cometido.



FÓRMULA DE TAYLOR



38.- Sea $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Obtener $f(1.005)$ usando el *polinomio de Taylor* de grado 2 de f en potencias de $(x-1)$.

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor para $a=1$ y $n=2$:

n	f⁽ⁿ⁾(x)	f⁽ⁿ⁾(1)
0	$f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$	1
1	$f'(x) = 80x^{79} - 40x^{39} + 20x^{19}$	60
2	$f''(x) = 6329x^{78} - 1560x^{38} + 380x^{18}$	5140

$$T_{n=2}[f(x), a = 1] = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1 + 60(x-1) + \frac{5140}{2}(x-1)^2$$
$$f(1.005) \approx 1 + 60(1.005 - 1) + \frac{5140}{2}(1.005 - 1)^2 = \frac{5457}{4000} \approx \mathbf{1.36425}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



39.- Obtener el *polinomio de Taylor* de orden dos de la función $f(x) = \frac{\log x}{x}$ en el punto de abscisa 1.

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor para $a=1$ y $n=2$:

n	fⁿ(x)	fⁿ(1)
0	$f(x) = \frac{\log x}{x}$	0
1	$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$	1
2	$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$	-3

$$T_{n=2}[f(x), a=1] = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \mathbf{0 + 1(x-1) - 3(x-1)^2}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



40. - ¿Qué **error** se comete al tomar como valor del número e la fracción 65/24?

Solución:

Del **ejercicio 3**, la fórmula de Maclaurin es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \text{ con } \theta \in (0,1)$$

La fracción $\frac{65}{24} = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!}$ corresponde al polinomio de Maclaurin de e^x para $n=4$ y sustituyendo x por 1.

Acotación del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$E(1) = |R_{n=4}(1)| = \left| f^{(4+1)}(c) \frac{1^{4+1}}{(4+1)!} \right| = e^c \frac{1}{5!} < e^1 \frac{1}{5!} < 3 \frac{1}{5!} = \frac{1}{40} = \mathbf{0,025}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



41.- Calcular $\text{sen } 20^\circ$ tomando $n = 3$ en el desarrollo de *Maclaurin*. Hallar una cota del *error* cometido en dicho cálculo.

Solución:

Del **ejercicio 15**, la fórmula de Maclaurin es:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{sen}\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta \in (0,1)$$

$$T_{n=3}[\text{sen}(x), a = 0] = x - \frac{x^3}{3!}$$

Debemos expresar $x=20^\circ$ en radianes, luego $x = \frac{\pi}{9}$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} \approx 0,8558007815$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$E\left(\frac{\pi}{9}\right) = \left| R_{n=3}\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| = \left| f^{(4)}(c) \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{4!} \right| = \left| \cos(c) \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{4!} \right|_{\cos < 1} < \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{4!} = \frac{\pi^4}{157464} \approx 0,00061 < 10^{-3}$$

el error es inferior a una diezmilésima y podemos asegurar dos cifras decimales exacta:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx 0,85$$



FÓRMULA DE TAYLOR



42.- Calcular los *polinomios de Maclaurin* de grado tres de las funciones $\cos x$ y $\sin(2x)$, con sus correspondientes *restos de Lagrange*. Acotar el *error* cometido en el cálculo de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ y de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ con los dos polinomios anteriores.

Solución:

Polinomios de Maclaurin

Del **ejercicio 4**, la fórmula de Maclaurin es:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!} + \cos\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\theta \in (0,1)$$

$$T_{n=3}[\cos(x), a=0] = 1 - \frac{x^2}{2!} = \boxed{1 - \frac{x^2}{2}}$$

Del **ejercicio 15**, la fórmula de Maclaurin es:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta \in (0,1)$$

$$T_{n=3}[\sin(x), a=0] = x - \frac{x^3}{3!} \Rightarrow T_{n=3}[\sin(2x), a=0] = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} = \boxed{2x - \frac{4}{3}x^3}$$

Restos de Lagrange:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} = \cos c \frac{x^4}{4!} \quad \text{siendo } c \in [0,x]$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} = 16 \sin(2c) \frac{x^4}{4!} \quad \text{siendo } c \in [0,x]$$

Cota de errores cometidos:

$$E\left(\frac{\pi}{10}\right) = \left| R_3\left(\frac{\pi}{10}\right) \right| \leq \max_{c \in [0, \frac{\pi}{10}]} \left| \cos c \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} \right| \leq 1 \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^4}{4!} = \boxed{0.00041} \quad (\text{el máximo se da para } c=0 \text{ donde}$$

$\cos(c)=1$)

$\sin(\pi/10)$ como la función es $\sin(2x)$ el valor de x para el que se obtiene $\sin(\pi/10)$ es $2x = \pi/10 \Rightarrow x = \pi/20$

$$E\left(\frac{\pi}{20}\right) = \left| R_3\left(\frac{\pi}{20}\right) \right| \leq \max_{c \in [0, \frac{\pi}{20}]} \left| 16 \sin(2c) \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^4}{4!} \right| \leq 16 \sin\left(2 \left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^4}{4!} = 0.0001254211022$$

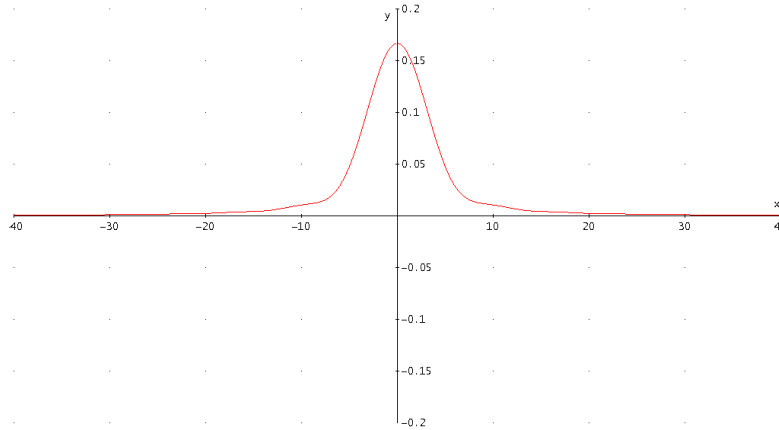
0.00012 (el máximo se da en $c = \pi/20$)

43.- Sea la función continua definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \text{sen}x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x=0 \end{cases}$. Se

pide:

- Hallar α para que efectivamente la función sea continua en $x=0$.
- Obtener el **polinomio de Maclaurin** de $f(x)$ de grado 4.
- Aproximar $f(1)$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y estimar el **error** cometido.

Solución:



a) El valor de $f(0)$ debe ser igual al límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}x}{x^3}$

Usando la fórmula de Maclaurin del seno:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{sen}\left(\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$$

$\theta \in (0,1)$

$$\alpha = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$b) T_{n=4} \left[\frac{x - \text{sen}x}{x^3}, a = 0 \right] = \frac{x - T_{n=7}[\text{sen}x, a = 0]}{x^3} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}{x^3} = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!}$$

c) La aproximación pedida es: $f(1) \approx \frac{1}{3!} - \frac{1^2}{5!} + \frac{1^4}{7!} = 0,158531746$

Para estimar el error cometido,

$$f(x) = \frac{x - \text{sen}x}{x^3} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{sen}(\theta x) \frac{x^8}{8!}\right)}{x^3} = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} + \text{sen}(\theta x) \frac{x^5}{8!} =$$

$$= T_{n=4} [f(x), 0] + \text{sen}(\theta x) \frac{x^5}{8!} = T_{n=4} [f(x), 0] + R_{n=4}(x) \Rightarrow R_{n=4}(x) = \text{sen}(\theta x) \frac{x^5}{8!}$$

$$E(x=1) = \left| \text{sen}(\theta) \frac{1^5}{8!} \right| \leq \frac{1^5}{8!} = 2,48 \cdot 10^{-5}$$

$$0,1585069444 < f(1) < 0,1585565475, \text{ luego } f(1) = 0,1585$$



FÓRMULA DE TAYLOR



44.- Dada la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Escribir la *formula de McLaurin* de f .

b) Hallar el valor aproximado de $\sqrt{1.1}$, tomando hasta el término de grado 3 en el desarrollo del apartado a).

c) Acotar el *error* cometido en el apartado anterior.

Solución:

a) La fórmula de Maclaurin es el polinomio de Maclaurin+Resto:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Conocida la derivada n-ésima: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n (x+1)^{\frac{2n-1}{2}}}$. Resulta

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} (c+1)^{\frac{2n+1}{2}} (n+1)!} x^{n+1} \text{ con } c \in (0, x)$$

$$T_{n=3}[\sqrt{1+x}, a=0] = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

b) Sustituyendo $x=0.1$

$$\sqrt{1.1} \approx \frac{1}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.1^2}{8} + \frac{0.1^3}{16} = \frac{16781}{16000} \approx \mathbf{1.0488125}$$

c)

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{0 < c < x} \right| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \frac{x^4}{0 < c < x} \right| = \left| -\frac{15}{16(1+c)^{7/2}} \frac{x^4}{4!} \right|$$

una cota se obtiene para $c=0$ por ser $f^{(4)}(c)$ decreciente y la expresión del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{0 < c < x} \right| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \frac{x^4}{0 < c < x} \right| = \left| -\frac{15}{16(1+c)^{7/2}} \frac{x^4}{4!} \right| < \frac{15}{16} \frac{x^4}{4!} = \frac{15}{16} \frac{0.1^4}{4!} \approx \mathbf{3.90625 \cdot 10^{-6}}$$

$$\mathbf{1.048808593} < \sqrt{1.1} < \mathbf{1.048816406}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



45.- Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$. a) Escribir la *fórmula de Taylor* de f para $a=1$.
 b) Hallar el valor aproximado de $\sqrt{1.1}$, tomando hasta el término de grado 5 en el desarrollo del apartado a). c) Acotar el *error* cometido en el apartado anterior.

Solución:

a) La fórmula de Maclaurin es el polinomio de Maclaurin+Resto:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + R_n(x)$$

Conocida la derivada n-ésima: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}$

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3(x-1)^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(x-1)^n}{2^n n!} + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1} c^{\frac{2n+1}{2}} (n+1)!} \text{ con } c \in (1, x)$$

b)

$$T_{n=5}[\sqrt{x}, a=1] = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5(x-1)^4}{128} + \frac{7(x-1)^5}{256} = \frac{7x^5 - 45x^4 + 126x^3 - 210x^2 + 315x + 63}{256}$$

sustituyendo $x=1.1$

$$\sqrt{1.1} \approx \frac{7 \cdot 1.1^5 - 45 \cdot 1.1^4 + 126 \cdot 1.1^3 - 210 \cdot 1.1^2 + 315 \cdot 1.1 + 63}{256} = \frac{26849507}{2560000} \approx \mathbf{1.048808867}$$

c)

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=1 \\ n=5 \\ 0 < c < x}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{(x-1)^6}{6!} \right| = \left| -\frac{945}{16c^{11/2}} \frac{(x-1)^6}{6!} \right|$$

una cota se obtiene para $c=1$ por ser $f^{(6)}(c)$ decreciente y la expresión del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=1 \\ n=5 \\ 0 < c < x}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{(x-1)^6}{6!} \right| = \left| -\frac{945}{16c^{11/2}} \frac{(x-1)^6}{6!} \right| < \frac{945}{16} \frac{(x-1)^6}{6!} = \frac{15}{16} \frac{0.1^6}{6!} \approx$$

$$\mathbf{2.05078125 \cdot 10^{-8}}$$

$$\mathbf{1.048808846 < \sqrt{1.1} < 1.048808887}$$

46.- Dada la función $f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

- a) Hallar el valor aproximado de $f(0,5)$, tomando hasta el término de grado 5 en el desarrollo del **polinomio de Maclaurin** de la función $f(x)$.
 b) Acotar el **error** cometido en el apartado anterior.

Solución:

a)

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	$-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	0
3	$\frac{(x^2 - 1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
4	$\frac{x(3 - x^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	0
5	$\frac{(x^4 - 6x^2 + 3)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2\pi}}$

$$T_{n=5}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{3!}x^3 + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{5!}x^5 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}x - \frac{\sqrt{2}}{12\sqrt{\pi}}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{80\sqrt{\pi}}x^5}$$

Sustituyendo x por 0.5

$$f(0.5) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}0.5 - \frac{\sqrt{2}}{12\sqrt{\pi}}0.5^3 + \frac{\sqrt{2}}{80\sqrt{\pi}}0.5^5 \approx \mathbf{0.6914715163}$$

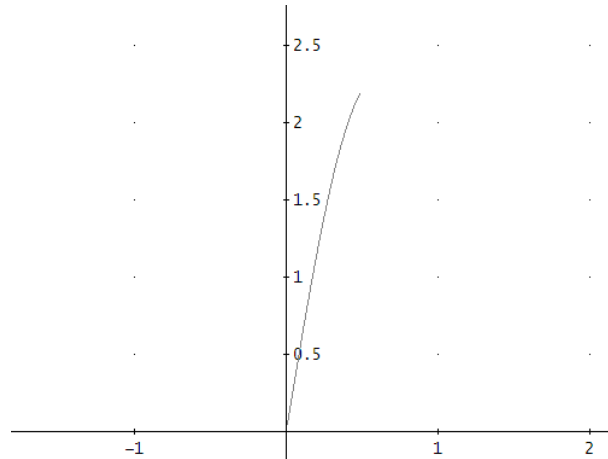
b) Acotación del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=0 \\ n=5 \\ 0 < c < x}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{x^6}{6!} \right| = \left| -\frac{c(c^4 - 10c^2 + 15)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}} \frac{x^6}{6!} \right|$$

Representado $f^{(6)}(c)$:



FÓRMULA DE TAYLOR



una cota se obtiene para $c=0.5$ por ser creciente:

$$E(x = 0.5) < \left| -\frac{0.5(0.5^4 - 100.5^2 + 15)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0.5^2}{2}} \frac{0.5^6}{6!} \right| \approx 4.799067562 \cdot 10^{-5}$$

Para terminar acotamos el valor aproximado:

$$0.6914715163 - 4.799067562 \cdot 10^{-5} < f(0.5) < 0.6914715163 + 4.799067562 \cdot 10^{-5}$$
$$0.6914235256 < f(0.5) < 0.6915195069$$

47.- Hallar el grado mínimo del *polinomio de Maclaurin* para calcular $f(0.5)$, con un *error* menor que 0.001, siendo $f(x) = 1+x^3 \operatorname{sen}x$.

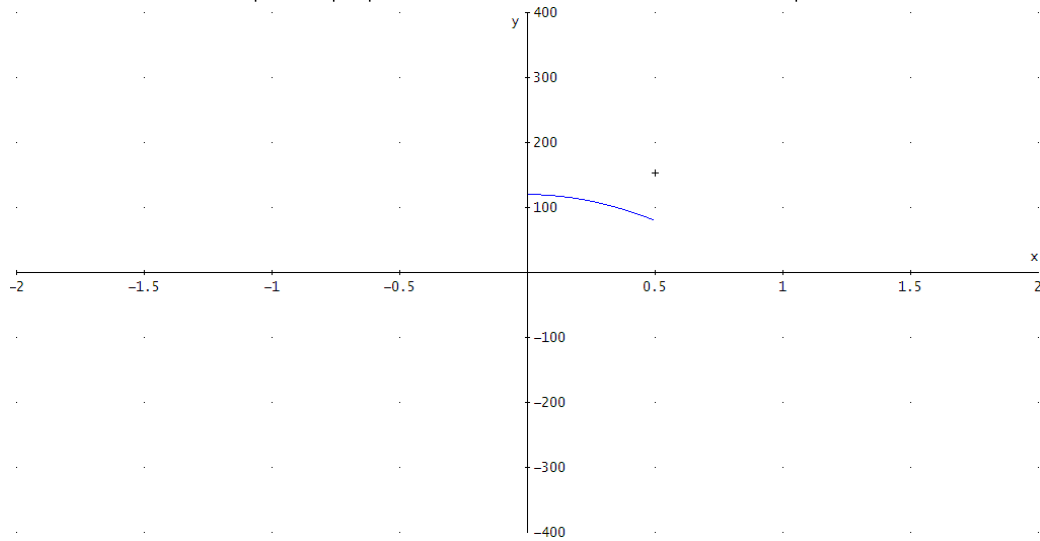
Solución:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Según la fórmula del resto para calcular el error, hallamos las sucesivas derivadas de la función $y=f(x)$ y vamos probando hasta encontrar el primer n que lo cumpla:

Empezamos con $n=5$:

$$|f^{(6)}(c)| = |(18c^2 - 120) \cos c + (90c - c^3) \operatorname{sen}c|$$



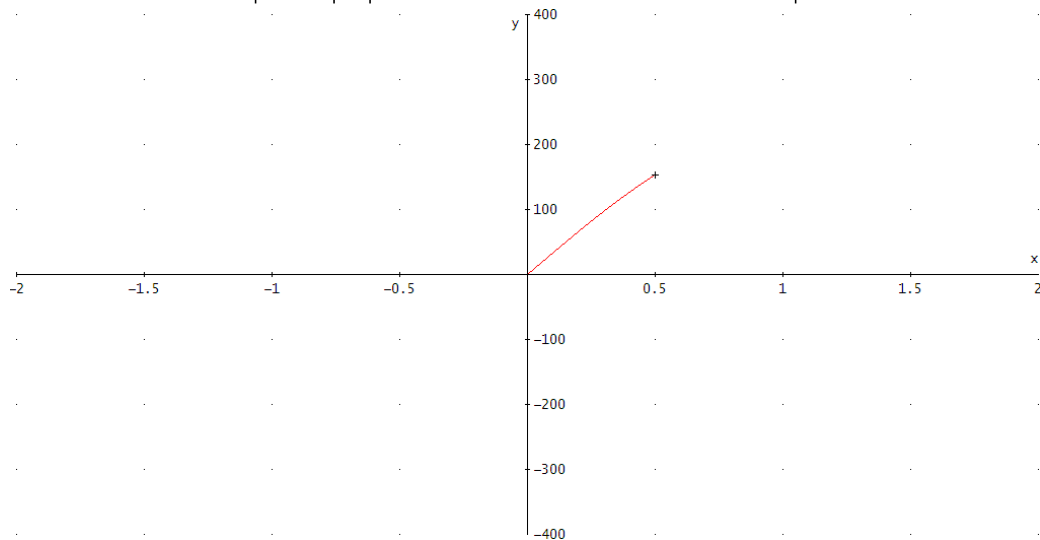
Una posible cota es 120

$$E(x) = |R_{n=5}(x)| = \left| f^{(6)}(c) \frac{x^6}{6!} \right| \leq \max |f^{(6)}(c)| \frac{x^6}{6!} < 120 \frac{0.5^6}{6!} = \frac{1}{138} \quad \text{con } c \in (0, 0.5)$$

En este caso no es menor a una milésima

Para $n=6$:

$$|f^{(7)}(c)| = |(126c - c^3) \cos c + 21(10 - c^2) \operatorname{sen}c|$$



Una posible cota es 154

$$E(x) = |R_{n=6}(x)| = \left| f^{(7)}(c) \frac{x^7}{7!} \right| \leq \max |f^{(7)}(c)| \frac{x^7}{7!} < 154 \frac{0.5^7}{7!} = \frac{11}{46080} \approx 0.0002387 < 10^{-3} \quad \text{con } c \in (0, 0.5)$$



FÓRMULA DE TAYLOR



Ahora si lo cumple

El primer n=6 que da un error inferior a una milésima

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$1+x^3 \operatorname{sen} x$	1
1	$x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x$	0
2	$6x^2 \cos x + (6x - x^3) \operatorname{sen} x$	0
3	$(18x - x^3) \cos x + (6 - 9x^2) \operatorname{sen} x$	0
4	$(24 - 12x^2) \cos x + (x^3 - 36x^2) \operatorname{sen} x$	24
5	$(x^3 - 60x) \cos x + (15x^2 - 60) \operatorname{sen} x$	0
6	$(18x^2 - 120) \cos x + (90x - x^3) \operatorname{sen} x$	-120

$$T_{n=5}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 =$$

$$= 1 + 24 \frac{1}{4!}x^4 - 120 \frac{1}{6!}x^6 = \boxed{1 + x^4 - \frac{1}{6}x^6}$$

Sustituyendo x por 0.5

$$f(0.5) \approx 1 + 0.5^4 - \frac{1}{6}0.5^6 = \boxed{1.059895833}$$

48. -

- a) Hallar el **polinomio de Taylor** de grado 4 de la función $f(x) = \cos(\pi \ln(x))$ en $a = e$.
- b) Acotar el **error** cometido si utilizamos el polinomio anterior para evaluar $f(2)$.
- c) Calcular, **SIN USAR DERIVE**, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 + \cos(\pi \ln(x))}{e - x}$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado a).

Solución:

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(e)$
0	$\cos(\pi \ln(x))$	-1
1	$-\frac{\pi \operatorname{sen}(\pi \ln(x))}{x}$	0
2	$\frac{\pi \operatorname{sen}(\pi \ln(x)) - \pi^2 \cos(\pi \ln(x))}{x^2}$	$\pi^2 e^{-2}$
3	$\frac{(\pi^3 - 2\pi) \operatorname{sen}(\pi \ln(x)) + 3\pi^2 \cos(\pi \ln(x))}{x^3}$	$-3\pi^2 e^{-3}$
4	$\frac{(6\pi - 6\pi^3) \operatorname{sen}(\pi \ln(x)) + (\pi^4 - 11\pi^2) \cos(\pi \ln(x))}{x^4}$	$\pi^2 e^{-4} (11 - \pi^2)$

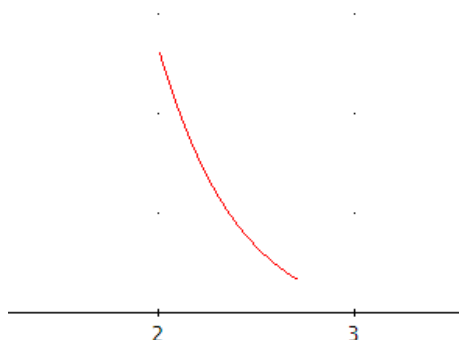
$$\begin{aligned}
 T_{n=4}[f(x), a=e] &= f(e) + \frac{f'(e)}{1!}(x-e) + \frac{f''(e)}{2!}(x-e)^2 + \frac{f'''(e)}{3!}(x-e)^3 + \frac{f^{(4)}(e)}{4!}(x-e)^4 = \\
 &= -1 + \pi^2 e^{-2} \frac{1}{2!}(x-e)^2 - 3\pi^2 e^{-3} \frac{1}{3!}(x-e)^3 + \pi^2 e^{-4} (11 - \pi^2) \frac{1}{4!}(x-e)^4 = \\
 &= -1 + \frac{\pi^2 e^{-2}}{2}(x-e)^2 - \frac{\pi^2 e^{-3}}{2}(x-e)^3 + \frac{\pi^2 e^{-4} (11 - \pi^2)}{24!}(x-e)^4 =
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{e^{-4}}{24} \left(\pi^2 x^4 (\pi^2 - 1) + 4\pi^2 e x^3 (14 - \pi^2) + 6\pi^2 e^2 x^2 (\pi^2 - 19) + 4\pi^2 e^3 x (26 - \pi^2) + e^4 (\pi^4 - 35\pi^2 + 24) \right)$$

b) $E(x) = |R_{n=4}(x)| = \left| f^{(5)}(c) \frac{(x-e)^5}{5!} \right| \leq \max |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(x-e)^5}{5!} \right|$ con $c \in (2, e)$

Buscamos el máximo entre $x=2$ y $a=e$, para ello

$$f^{(5)}(c) = \frac{(50\pi^2 - 10\pi^4) \cos(\pi \ln(c)) + (\pi^5 - 35\pi^3 + 24\pi) \operatorname{sen}(\pi \ln(c))}{c^5}$$





FÓRMULA DE TAYLOR

Una cota superior puede ser para $c=2$, puesto que la función es decreciente o directamente 27

$$E(x) = |R_n(f(x), a)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| = \left| \frac{f^{(5)}(c)(2-e)^5}{5!} \right| < \frac{27(e-2)^5}{5!} \approx \mathbf{0.04243219932}$$

Sustituyendo en el polinomio obtenido en el apartado a)

$$-0.5621210605 - 0.04243219932 < f(2) < -0.5621210605 + 0.04243219932$$

Por tanto, $\mathbf{-0.6045532598 < f(2) < -0.5196888611}$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1 + \cos(\pi \ln(x))}{e - x} &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1 + T_{n=4}[\cos(\pi \ln(x))]}{e - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \frac{e^{-4}}{24} (\pi^2 x^4 (\pi^2 - 1) + 4\pi^2 e x^3 (14 - \pi^2) + 6\pi^2 e^2 x^2 (\pi^2 - 19) + 4\pi^2 e^3 x (26 - \pi^2) + e^4 (\pi^4 - 35\pi^2 + 24))}{e - x} = \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

49.- Obtener $\sqrt[3]{e}$ con un *error* menor que 10^{-4} .

Solución:

La función adecuada es la exponencial $f(x)=e^x$.

Las sucesivas derivadas de la función exponencial coinciden con ella, por lo tanto, la fórmula de Maclaurin es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \text{ con } \theta \in (0,1)$$

Hay que calcular aproximadamente $\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ de forma que para acotar el error utilizamos el término complementario o resto:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \text{ con } \theta \in (0,1) \text{ Siendo } x=1/3$$

$$\left| R_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| \frac{(1/3)^{n+1}}{(n+1)!} e^c \right| < 10^{-4}, \text{ siendo } 0 < c < 1/3. \text{ Para estos valores de } c \text{ se verifica que}$$

$$|e^c| < e^{1/3} < 3^{1/3} < 2, \text{ luego:}$$

$$\left| R_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| < \frac{2}{3^{n+1}(n+1)!}. \text{ Por tanto, para que el error sea menor que } 10^{-4} \text{ es suficiente que } n \text{ sea tal}$$

$$\text{que } \frac{2}{3^{n+1}(n+1)!} < 10^{-4} \Leftrightarrow 2 \cdot 10^4 < 3^{n+1}(n+1)!.$$

Lo cual se empieza a verificar para $n = 4$. De esta forma, la aproximación pedida es:

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1/3}{1!} + \frac{(1/3)^2}{2!} + \frac{(1/3)^3}{3!} + \frac{(1/3)^4}{4!} \approx \mathbf{1.39557}$$

Pudiendo asegurar que las tres primeras cifras decimales después de la coma son exactas.

50. - Para valores de x entre 40° y 50° , obtener una cota del **error** que se comete al efectuar la aproximación siguiente:

$$\operatorname{sen} x \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right].$$

Solución:

El desarrollo de la función $\operatorname{sen} x$ en potencias de $x - \frac{\pi}{4}$ hasta el término de grado 2, viene dado por su polinomio de Taylor correspondiente en $a = \frac{\pi}{4}$. La fórmula de Taylor queda:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= T_2 \left[\operatorname{sen} x, \frac{\pi}{4} \right] + R_2(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + R_2(x) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 \cos c, \text{ con } x < c < \frac{\pi}{4} \text{ ó } \frac{\pi}{4} < c < x. \end{aligned}$$

$|R_2(x)| = \frac{1}{6} \left| x - \frac{\pi}{4} \right|^3 |\cos c| < \frac{1}{6} \left| x - \frac{\pi}{4} \right|^3$, independientemente de c . Y, para los x considerados,

$40^\circ = \frac{2\pi}{9} < x < 50^\circ = \frac{5\pi}{18}$, se verifica:

$$|R_2(x)| < \frac{1}{6} \left| x - \frac{\pi}{4} \right|^3 < \frac{1}{6} \left| \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4} \right|^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{36} \right)^3 \approx \mathbf{0.0001107}$$

que es la cota pedida.

51.- Dada la función $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$, se pide:

- Dominio** de f .
- Polinomio de Maclaurin** de f de grado 3.
- Calcular de forma aproximada $f(1)$ utilizando el polinomio anterior.
- Dar una acotación del **error** cometido en el apartado anterior y expresar $f(1)$ sólo con cifras decimales exactas.
- ¿Existe la **fórmula de Taylor** de f de algún orden en $a = -1$?

Solución:

a) $1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$, luego, Dom $f = [-1, \infty)$

b) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$	$\sqrt{2}$
1	$\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$
2	$\frac{\sqrt{1+x}-3x-1}{16x\sqrt{(1+x)^3}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{64}$
3	$\frac{(1-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x}(21x+4)-3x(7x+1))-2(15x^2+11x+2)}{64x^3\sqrt{(1+x)^5}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$	$\frac{63\sqrt{2}}{512}$

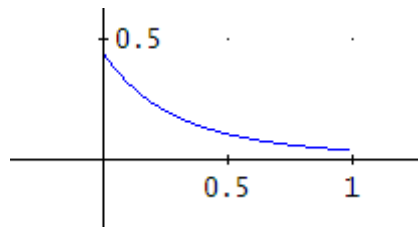
$$T_{n=3}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{64} \frac{1}{2!}x^2 + \frac{63\sqrt{2}}{512} \frac{1}{3!}x^3 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{1024}x^3$$

c) Sustituyendo x por 1:

$$f(1) \approx \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{128} + \frac{21\sqrt{2}}{1024} \approx \mathbf{1.564749966}$$

d) Acotación del error: $E(x) = |R_4(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right|_{x=1} = \frac{1}{4!} |f^{(4)}(c)|$, con $0 < c < 1$. Luego, $E(x=1) < \frac{1}{4!}M$, siendo M una cota de $|f^{(4)}(x)|$, en $(0, 1)$:



Luego, una cota de la derivada cuarta de f en $(0, 1)$ es $M = 1/2$. Una cota superior del error es:

$$E(x=1) < \frac{1}{4!}M = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \approx 0.02083333333$$

$$1.564749966 - 0.02083333333 < f(1) < 1.564749966 + 0.02083333333$$

$$1.543916632 < f(1) < 1.585583299$$

Por tanto, sólo pueden garantizarse las décimas y **$f(1)$ es aprox. 1.5**, con las cifras decimales exactas.

e) **No existe la fórmula de Taylor** de f de grado ≥ 1 en $a = -1$ puesto que no existe la derivada primera de f en -1 :

52.- Si $p_3(x) = 5 - 3(x - 4)^2 + 9(x - 4)^3$, es el *polinomio de Taylor* de grado 3 de una función $f(x)$ en el punto $a = 4$, se pide:

a) $f(4)$, $f'(4)$, $f''(4)$

b) ¿Tiene la función $f(x)$ un *máximo* o un *mínimo* relativo en $a = 4$?

c) ¿Es f *cóncava* o *convexa* en un entorno de $a = 4$?

Solución:

$$T_3[f(x), 4] = f(4) + (x-4)f'(4) + \frac{(x-4)^2}{2!}f''(4) + \frac{(x-4)^3}{3!}f'''(4) = 5 - 3(x-4)^2 + 9(x-4)^3$$

a) Igualando coeficientes en ambos polinomios, se obtiene:

$$f(4) = 5$$

$$f'(4) = 0$$

$$\frac{f''(4)}{2!} = -3 \Rightarrow f''(4) = -6$$

b) Como $f'(4) = 0$ y $f''(4) < 0$, se deduce que la función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $a = 4$.

c) Por ser $f''(4) < 0$, la función f es *cóncava* en un entorno de $a = 4$.



FÓRMULA DE TAYLOR



53.- Dada la función $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$, se pide:

- Dominio** de f .
- Polinomio de Maclaurin** de f de grado 3.
- Calcular de forma aproximada $f(-1)$ utilizando el polinomio anterior.
- Dar una acotación del **error** cometido en el apartado anterior y expresar $f(-1)$ sólo con cifras decimales exactas.
- ¿Existe la **fórmula de Taylor** de f de algún orden en $a = 1$?

Solución:

a) Dominio: $(-\infty, 1]$

b) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

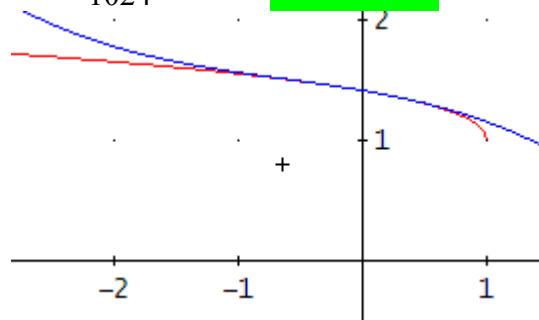
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$	$\sqrt{2}$
1	$-\frac{1}{4\sqrt{1-x}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8}$
2	$-\frac{\sqrt{1-x} + 3x - 1}{16x\sqrt{(1-x)^3}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{64}$
3	$\frac{3(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x}(7x+1)) + 3x + 1}{64x^2\sqrt{(1-x)^5}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}$	$-\frac{63\sqrt{2}}{512}$

$$T_{n=3}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{64} \frac{1}{2!}x^2 - \frac{63\sqrt{2}}{512} \frac{1}{3!}x^3 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 - \frac{21\sqrt{2}}{1024}x^3$$

c) Sustituyendo x por -1 :

$$f(1) \approx \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}(-1) - \frac{5\sqrt{2}}{128}(-1)^2 - \frac{21\sqrt{2}}{1024}(-1)^3 \approx 1.564749966$$

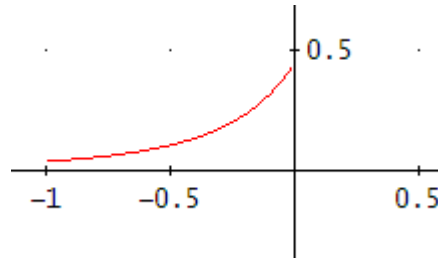


d) Acotación del error:

$$E(x) = |R_4(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{x^4}{4!} \right|_{x=-1} = \frac{1}{4!} |f^{(4)}(c)|, \text{ con } -1 < c < 0. \text{ Luego, } E(x=-1) < \frac{1}{4!}M, \text{ siendo } M \text{ una cota de } |f^{(4)}(x)|, \text{ en } (-1, 0):$$



FÓRMULA DE TAYLOR



Luego, una cota de la derivada cuarta de f en $(-1, 0)$ es $1/2$. Una cota superior del error es:

$$E(x = -1) < \frac{1}{4!} M = \frac{1}{4!} 2 = \frac{1}{12} \approx 0.02083333333$$

$$1.564749966 - 0.02083333333 < f(-1) < 1.564749966 + 0.02083333333$$

$$1.543916632 < f(-1) < 1.585583299$$

Por tanto, sólo pueden garantizarse las décimas y **$f(-1)$ es aprox. 1.5**, con las cifras decimales exactas.

e) **No existe la fórmula de Taylor** de f de grado ≥ 1 en $a = 1$ puesto que no existe la derivada primera de f en 1:

54.- Si $p_3(x) = 4 + (x - 2)^2 + 6(x - 2)^3$, es el *polinomio de Taylor* de grado 3 de una función $f(x)$ en el punto $a = 2$, se pide:

- $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$
- ¿Tiene la función $f(x)$ un *máximo* o un *mínimo* relativo en $a = 2$?
- ¿Es f *cóncava* o *convexa* en un entorno de $a = 2$?

Solución

$$T_{n=3}[f(x), 2] = f(2) + (x-2)f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2) = 4 + (x-2)^2 + 6(x-2)^3$$

a) Igualando coeficientes en ambos polinomios, se obtiene:

$$f(2) = 4$$

$$f'(2) = 0$$

$$\frac{f''(2)}{2!} = 1 \Rightarrow f''(2) = 2$$

b) Como $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$, se deduce que la función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en $a = 2$.

c) Por ser $f''(2) > 0$, la función f es **cóncava** en un entorno de $a = 2$.



FÓRMULA DE TAYLOR



55.- Dada la función $f(x) = x^2 \ln(x + 1)$, se pide:

- a) Hallar una aproximación de $f(0,5)$ usando el *polinomio de Maclaurin* de grado 5.
 b) Acotar el *error* cometido en el apartado anterior.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x^2 \ln(x + 1)$	0
1	$2x \ln(x + 1) + \frac{x^2}{x + 1}$	0
2	$2 \ln(x + 1) + \frac{x(3x + 4)}{(x + 1)^2}$	0
3	$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^3}$	6
4	$-\frac{2(x^2 + 4x + 6)}{(x + 1)^4}$	-12
5	$\frac{4(x^2 + 5x + 10)}{(x + 1)^5}$	40

$$T_{n=5}[f(x), a = 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= 6 \frac{1}{3!}x^3 - 12 \frac{1}{4!}x^4 + 40 \frac{1}{5!}x^5 = \boxed{x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5}$$

Para obtener una aproximación de $f(0.5)$ con el anterior polinomio hacemos $x=0.5$

$$f(0.5) \approx 0.5^3 - \frac{1}{2}0.5^4 + \frac{1}{3}0.5^5 \approx \mathbf{0.1041666666}$$

$$b) E(0.5) = |R_{n=5}(x)| = \left| f^{(6)}(c) \frac{x^6}{6!} \right|_{x=0.5} = \frac{0.5^6}{6!} |f^{(6)}(c)| = \frac{0.5^6}{6!} \left| -\frac{12(c^2 + 6c + 15)}{(c+1)^5} \right| \text{ con } 0 < c < 0.5$$

Obtenemos ahora una cota del error, estudiando previamente el máximo de la sexta derivada de f en $[0, 0.5]$

El máximo se alcanza en $x=0$ y vale 180

luego una cota del error es

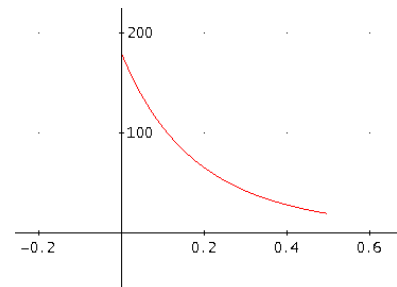
$$E(0.5) = |R_{n=5}(x)| < \frac{0.5^6}{6!} 180 = 0.00390625$$

Redondeando por exceso el error $(0.5) < \mathbf{0.004}$,

por tanto, $f(0,2) = 0.104 \pm 0.004$, es decir,

$$\mathbf{0.1 < 0.5 \cdot \ln(1.5) < 0.108}$$

Se asegura pues el valor exacto de las **dos** primeras cifras decimales.



- 56.- Sea la función $f(x) = \ln(x + 2)$. Se pide:
- Dominio** de $f(x)$.
 - Aproximación lineal de $f(x)$ en un entorno de $a = -1$.
 - Polinomio de Taylor** de orden 3 de f en $a = -1$.
 - Calcular de forma aproximada $\ln(0.9)$ utilizando el polinomio anterior.
 - Acotar el **error** cometido en dicha aproximación y dar $\ln(0.9)$ con cifras decimales exactas.
 - ¿De qué grado debería ser el polinomio de aproximación para que el **error** fuera menor que una cienmilésima?

Solución:

a) Dominio de f : Ha de ser $2+x > 0$ pues sólo existe el logaritmo de números positivos.

$$2 + x > 0, \text{ luego: } \quad x > -2$$

Por tanto, $\text{Dom } f = (-2, \infty)$

Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-1)$
0	$\ln(x+2)$	0
1	$(1-x)^{-1}$	1
2	$-(1-x)^{-2}$	-1
3	$2(1-x)^{-3}$	2

b) Aproximación lineal de $f(x)$ en un entorno de $a = -1$:

$$T_{n=1}[f(x), -1] = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) = \mathbf{0 + 1(x+1)}$$

c) Polinomio de Taylor de orden 3 de f en $a = -1$:

$$T_{n=3}[f(x), -1] = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 =$$

$$= \mathbf{0 + 1(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2!} + 2 \frac{(x+1)^3}{3!} = \frac{5 + 6x + 3x^2 + 2x^3}{6}}$$

d) Aproximación de $\ln 0.9$ con el polinomio anterior:

$$\ln(x+2) = \ln(0.9) \Rightarrow x+2 = 0.9 \Rightarrow x = -1.1$$

Sustituyendo en el polinomio anterior

$$\ln(0.9) \approx \frac{5 + 6(-1.1) + 3(-1.1)^2 + 2(-1.1)^3}{6} \approx \mathbf{-0.105333333}$$

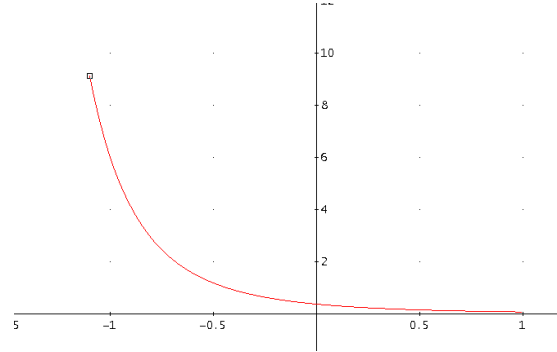
e) Acotación del error:

$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{(x+1)^4}{4!} \right| \quad \text{con } c \in (-1.1, -1)$$

Como $|f^{(4)}(c)| = \left| \frac{-6}{(c+2)^4} \right|$ es una función acotada y una cota superior puede ser 2 resulta:

La derivada cuarta de f , en valor absoluto, es decreciente en el intervalo $(-1.1, -1)$ y alcanza su valor máximo en -1.1 :

FÓRMULA DE TAYLOR



Tomamos como cota superior: $M = 10$. El error queda, entonces, menor que:

$$E(x) = \left| f^{(4)}(c) \frac{(x+1)^4}{4!} \right| \leq \max_{-1.1 < c < -1} \left| \frac{-6}{(c+2)^4} \frac{(x+1)^4}{4!} \right| \leq 10 \frac{(-1.1+1)^4}{4!} \approx \mathbf{4.166666666 \cdot 10^{-5}}$$

Dar $\ln(0.9)$ con cifras decimales exactas:

$$-0.10533333 - 4.1666666 \cdot 10^{-5} < \ln(0.9) < -0.10533333 + 4.1666666 \cdot 10^{-5}$$

$$-0.105375 < \ln(0.9) < -0.10529166$$

Luego, $\ln(0.9)$ es aproximadamente $\mathbf{-0.105}$

f) Grado del polinomio para que el error en la aproximación sea menor que una cienmilésima (10^{-5}):
Ahora probamos para $n=4$:

$$E(x) = |R_{n=4}(x)| = \left| f^{(5)}(c) \frac{(x+1)^5}{5!} \right| \quad \text{con } c \in (-1.1, -1)$$

Como $\left| f^{(5)}(c) \right| = \left| \frac{24}{(c+2)^5} \right|$ es una función acotada y una cota superior puede ser 2 resulta:

La derivada quinta de f , en valor absoluto, es decreciente en el intervalo $(-1.1, -1)$ y alcanza su valor máximo en -1.1 :

Tomamos como cota superior: $M = 24$. El error queda, entonces, menor que:

$$E(x) = \left| f^{(5)}(c) \frac{(x+1)^5}{5!} \right| \leq \max_{-1.1 < c < -1} \left| \frac{24}{(c+2)^5} \frac{(x+1)^5}{5!} \right| \leq 24 \left| \frac{(-1.1+1)^5}{5!} \right| = 2 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

Por tanto, puede asegurarse que el error es menor que una cienmilésima tomando $\mathbf{n = 4}$



FÓRMULA DE TAYLOR



57.- Dada la función $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x}$, se pide:

- Hallar los **polinomios** de aproximación de **Taylor** de grado 5 en los puntos $a=0$ y $a=1$
- Hallar el valor aproximado de $f(x)$ en $x=1/2$ con cada uno de los polinomios obtenidos en a).
- Calcular la cota de **error** cometido en las aproximadas obtenidas en b)
- Razonar cuál de las dos aproximaciones es más precisa.

Solución:

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Taylor:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(1)$
0	$10xe^{-x}$	0	$10e^{-1}$
1	$(10-10x)e^{-x}$	10	0
2	$(10x-20)e^{-x}$	-20	$-10e^{-1}$
3	$(30-10x)e^{-x}$	30	$20e^{-1}$
4	$(10x-40)e^{-x}$	-40	$-30e^{-1}$
5	$(50-10x)e^{-x}$	50	$40e^{-1}$

Para $a=0$

$$T_{n=5}[f(x), 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= 0 + 10x - \frac{20x^2}{2!} + \frac{30x^3}{3!} - \frac{40x^4}{4!} + \frac{50x^5}{5!} = 10x - 10x^2 + 5x^3 - \frac{5x^4}{3} + \frac{5x^5}{12}$$

Para $a=1$

$$T_{n=5}[f(x), 1] = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 =$$

$$= 10e^{-1} + 0(x-1) - 10e^{-1} \frac{(x-1)^2}{2!} + 20e^{-1} \frac{(x-1)^3}{3!} - 30e^{-1} \frac{(x-1)^4}{4!} + 40e^{-1} \frac{(x-1)^5}{5!} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{12} (1 + 320x - 310x^2 + 140x^3 - 35x^4 + 4x^5)$$

b) Sustituyendo x por $1/2$ en cada polinomio:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 10\left(\frac{1}{2}\right) - 10\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{3} + \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^5}{12} \approx 3.033854166$$

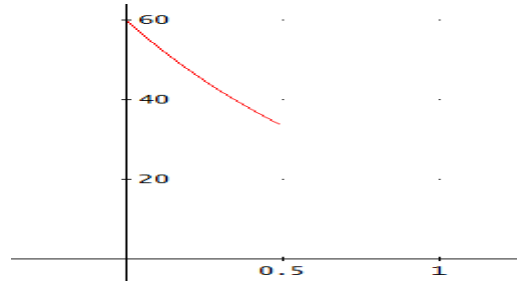
$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{e^{-1}}{12} \left(1 + 320\left(\frac{1}{2}\right) - 310\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 140\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 35\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^5 \right) \approx 3.03308935$$

c) La cota de error para la aproximación $f\left(\frac{1}{2}\right)$ obtenida con el primer polinomio de Taylor ($a=0$) es:

$$E\left(x = \frac{1}{2}\right) = \left| R_{n=5}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \max_{\left[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}\right]} \left| f^{(6)}(x) \right| \frac{\left| \frac{1}{2} - 0 \right|^6}{6!}$$

Buscamos el máximo de la derivada sexta, $f^{(6)}(c) = (10c - 60)e^{-c}$, en $[0, 1/2]$

FÓRMULA DE TAYLOR



Observamos que en el intervalo $[0, 1/2]$ la función es estrictamente decreciente por lo que el máximo se alcanza en el extremo izquierdo, es decir, para $c=0$:

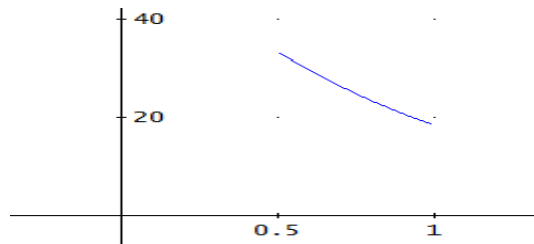
$$|f^{(6)}(0)| = |(10 \cdot 0 - 60)e^{-0}| = 60$$

El máximo de la función en $[0, 1/2]$ es 60, luego la cota de error es:

$$E\left(x = \frac{1}{2}\right) = \left|R_{n=5}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 60 \frac{\left|\frac{1}{2} - 0\right|^6}{6!} = 0.001302083333 < \mathbf{0.002}$$

La cota de error para la aproximación $f\left(\frac{1}{2}\right)$ obtenida con el segundo polinomio de Taylor ($a=1$) es:

$$E\left(x = \frac{1}{2}\right) = \left|R_{n=5}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \max_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]} |f^{(6)}(x)| \frac{\left|\frac{1}{2} - 1\right|^6}{6!}$$



En este intervalo la derivada sexta también es estrictamente decreciente por lo que su máximo se encuentra en $c=1/2$

$$\left|f^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\left(10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 60\right)e^{-\left(\frac{1}{2}\right)}\right| = 33.35918628 < 34$$

El máximo de la función derivada en $[1/2, 1]$ es menor que 34

$$E\left(x = \frac{1}{2}\right) = \left|R_{n=5}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 34 \frac{\left|\frac{1}{2} - 1\right|^6}{6!} = 0.0007378472222 < \mathbf{0.0008}$$

d)

Luego es más precisa la aproximación obtenida con el polinomio desarrollado en $a=1$ que es:
 $3.033 < f(1/2) < 3.034$

58.- Dada la función $y = \ln(x + 1)$, averiguar el grado que hay que tomar en el **polinomio de Maclaurin** para aproximar $\ln(1,5)$ con un error menor que 0,0001.

Solución

Veáse el ejercicio 2:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+c)^{-(n+1)}$$

$$c \in (0, x)$$

Grado	Polinomio de Maclaurin	Resto de Lagrange
1	x	$-\frac{x^2}{2(c+1)^2}, 0 < c < x$
2	$-\frac{x^2}{2} + x$	$\frac{x^2}{2!} \frac{2}{(1+c)^3} = \frac{x^2}{(1+c)^3}, 0 < c < x$
3	$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$	$-\frac{x^4}{4!} \frac{6}{(1+c)^4} = -\frac{x^4}{4(1+c)^4}, 0 < c < x$
4	$-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$	$\frac{x^5}{5!} \frac{24}{(1+c)^5} = \frac{x^5}{5(1+c)^5}, 0 < c < x$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{(n+1)}$$

Luego, el valor absoluto del resto de Lagrange de la Fórmula de Maclaurin es:

$$|R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{n!}{(1+c)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right| \max_{[0,x]} \frac{1}{|(1+c)^{n+1}|}$$

$x=0,5$, puesto que $\ln(1+x)=\ln 1,5$

$$|R_n(0,5)| = \left| \frac{0,5^{n+1}}{(n+1)} \right| \max_{0 < c < 0,5} \frac{1}{|(1+c)^{n+1}|} < \frac{0,5^{n+1}}{(n+1)} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < 0,0001 = \frac{1}{10^4}$$

¿Para qué grado se obtiene una aproximación de $\ln 1,5$ con un error menor que 0,0001?

Grado	Error
.....
7	$\frac{1}{(7+1)2^{7+1}} = \frac{1}{2048}$
8	$\frac{1}{(8+1)2^{8+1}} = \frac{1}{4608}$
9	$\frac{1}{(9+1)2^{9+1}} = \frac{1}{10240} < 10^{-4}$

El primer valor de n que lo cumple es n=9.

59.- a) Hallar el *polinomio de Taylor* de la función: $f(x) = \operatorname{tg}x$ en $a = 0$ y $n = 2$
b) Sea la función $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$, hallar una aproximación del valor $\operatorname{tg}(0.5)$ con el *polinomio de Maclaurin* de grado 5 y acotar el *error* cometido.

Solución

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin.

$$f(x) = \operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2 \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^4 x} = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^3 x} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$T_{n=2}[f(x) = \operatorname{tg}x, 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + x + 0 = x$$

b) Siguiendo con las derivadas de la $\operatorname{tg}x$:

$$f'''(x) = \frac{6}{\operatorname{cos}^4 x} - \frac{4}{\operatorname{cos}^2 x} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^5 x} - \frac{8 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^3 x} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16}{\operatorname{cos}^2 x} - \frac{120}{\operatorname{cos}^4 x} + \frac{120}{\operatorname{cos}^6 x} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 16$$

$$T_{n=5}[\operatorname{tg}x, 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$$

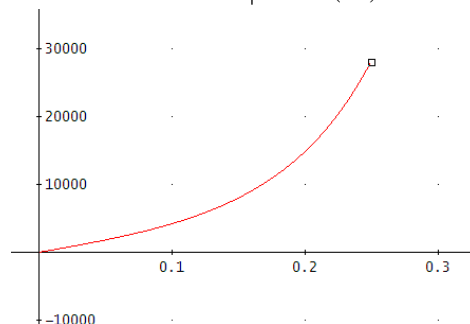
$$T_{n=5}[\operatorname{tg}2x, 0] = 2x + \frac{(2x)^3}{3} + \frac{2}{15}(2x)^5 = 2x + \frac{8x^3}{3} + \frac{64x^5}{15}$$

$$\operatorname{tg}(0.5) = \operatorname{tg}(2 \cdot 0.25) \approx 2 \cdot 0.25 + \frac{8 \cdot 0.25^3}{3} + \frac{64 \cdot 0.25^5}{15} = 0.5458333333$$

Cálculo del Error. Cálculo de la derivada sexta

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=5 \\ x=0.25 \\ 0 < c < 0.25}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{0.25^6}{6!} \right| \leq \frac{0.25^6}{6!} \max_{[0,0.25]} |f^{(6)}(c)|$$

$$\text{Calculamos la cota superior de la función: } |f^{(6)}(c)| = \left| \frac{17408 \operatorname{sen}(2c)}{\operatorname{cos}^3(2c)} + \frac{61440 \operatorname{sen}(2c)}{\operatorname{cos}^5(2c)} + \frac{46080 \operatorname{sen}(2c)}{\operatorname{cos}^7(2c)} \right|$$



Observamos que la derivada sexta se hace máxima para $c = 0.25$. Luego sustituimos en la derivada sexta c por 0.25

Cálculo del error:



FÓRMULA DE TAYLOR

$$|f^{(6)}(0.25)| = \left| \frac{17408 \operatorname{sen}(2 \cdot 0.25)}{\cos^3(2 \cdot 0.25)} + \frac{61440 \operatorname{sen}(2 \cdot 0.25)}{\cos^5(2 \cdot 0.25)} + \frac{46080 \operatorname{sen}(2 \cdot 0.25)}{\cos^7(2 \cdot 0.25)} \right| = 2.826660189 \cdot 10^{-4}$$

$$E(x = 0.25) \leq \frac{0.25^6}{6!} 2.826660189 \cdot 10^{-4} \approx \mathbf{0.009584758127}$$

Verdadero valor:

$$0.5458333333 - 0.009584758127 < \operatorname{tg}(0.5) < 0.5458333333 + 0.009584758127$$
$$0.5362485752 < \operatorname{tg}(0.5) < 0.5554180914$$

El verdadero valor está comprendido entre: $\mathbf{(0.5362485752, 0.5554180914)}$

**60. - a) Hallar el *polinomio de Taylor* de la función: $f(x) = xe^x$ en $a=0$ y $n=2$.
b) Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $f(x)=e$ con un *error* menor que 10^{-4}**

Solución

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin.

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = (1+x)e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = (2+x)e^x \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$T_{n=2}[f(x) = xe^x, 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 = \boxed{x + x^2}$$

b) Cálculo del error:

$$f(x) = xe^x \Rightarrow x = 1$$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=2 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(3)}(c) \frac{1^3}{3!} \right| \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1]} |f^{(3)}(c)|$$

Calculamos la derivada 3ª

$$f^{(3)}(c) = (3+c)e^c$$

Esta función se hace máxima para $c=1$ por ser creciente.

Sustituir c por 1

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=2 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(3)}(c) \frac{1^3}{3!} \right| \leq \frac{1}{6} |f^{(3)}(1)| = \frac{2}{3}e \approx 0.1359140914$$

Seguimos con $n=3$:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=3 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(4)}(c) \frac{1^4}{4!} \right| \leq \frac{1}{24} \max_{[0,1]} |f^{(4)}(c)|$$

Calculamos la derivada 4ª: $f^{(4)}(c) = (4+c)e^c \Rightarrow f^{(4)}(1) = 5e$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=3 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(4)}(c) \frac{1^4}{4!} \right| \leq \frac{1}{24} 5e \approx 0.5663087142$$

Cálculo Error ($n=4$). Calculamos derivada 5ª

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=4 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(5)}(c) \frac{1^5}{5!} \right| = \left| (5+c)e^c \frac{1^5}{5!} \right| \leq \frac{1}{5!} 6e \approx 0.1359140914$$

Seguimos calculando errores hasta que se cumpla la condición dada.

Cálculo Error ($n=5$). Derivada 6ª

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=5 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{1^6}{6!} \right| = \left| (6+c)e^c \frac{1^6}{6!} \right| \leq \frac{1}{6!} 7e \approx 0.02642773999$$

Cálculo Error ($n=6$). Derivada 7ª: $E(x=1) = \left| (7+c)e^c \frac{1^7}{7!} \right|_{\substack{n=6 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} \leq \frac{1}{7!} 8e \approx 0.004314733$

Cálculo Error ($n=7$). Derivada 8ª: $E(x=1) = \left| (8+c)e^c \frac{1^8}{8!} \right|_{\substack{n=7 \\ x=1 \\ 0 < c < 1}} \leq \frac{1}{8!} 9e \approx 0.0006$



FÓRMULA DE TAYLOR



Calculo Error (n=8). Derivada 9ª: $E(x=1) = \left| (9+c)e^c \frac{1^9}{9!} \right| \leq \frac{1}{9!} 10e \approx 7.49 \cdot 10^{-5}$
n=8
x=1
0<c<1

El error es menor que 10^{-4} a partir de **n=8**

61. - a) Hallar el *polinomio de Taylor* de la función: $f(x) = \arcsen(x)$ en $a=0$ y $n=2$.

b) Hallar una aproximación del valor $\arcsen(0.1)$ con el *polinomio de Maclaurin* de grado 5 y acotar el *error* cometido.

Solución

a) Calculando las sucesivas derivadas, se puede escribir el polinomio de Maclaurin.

$$f(x) = \arcsen x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$T_{n=2}[f(x) = \arcsen x, 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + x + 0x^2 = \boxed{x}$$

b) Siguiendo con las derivadas de la $\arcsen x$:

$$f'''(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{(1-x^2)^5}} \Rightarrow f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3x(2x^2+3)}{\sqrt{(1-x^2)^7}} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{3(8x^4+24x^2+3)}{\sqrt{(1-x^2)^9}} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 9$$

$$T_{n=5}[\arcsen x, 0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5}$$

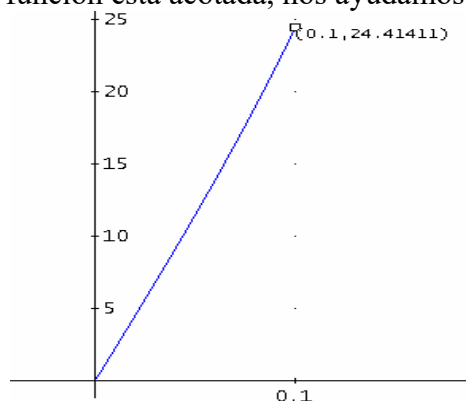
En este caso $x = 0.1$. Sustituimos en el polinomio x por 0.1

$$\arcsen 0.1 \approx 0.1 + \frac{0.1^3}{6} + \frac{3}{40}0.1^5 \approx \boxed{0.1001674166}$$

Cálculo del error. Calculamos la derivada sexta

$$|f^{(6)}(c)| = \left| \frac{15c(8c^4+40c^2+15)}{\sqrt{(1-c^2)^{11}}} \right| \text{ con } a=0 < c < 0.1=x$$

Estudiamos para qué valor esta función está acotada, nos ayudamos con su gráfica:





FÓRMULA DE TAYLOR

Observamos que la cota superior se encuentra para $c = 0.1$. Luego sustituimos en la derivada sexta c por 0.1

$$|f^{(6)}(0.1)| = \left| \frac{15 \cdot 0.1(8 \cdot 0.1^4 + 40 \cdot 0.1^2 + 15)}{\sqrt{(1-0.1^2)^{11}}} \right| \approx 24.41411409$$

Luego el error será:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=5 \\ x=0.1 \\ 0 < c < 0.1}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{0.1^6}{6!} \right| \leq \frac{10^{-6}}{6!} \max_{[0,0.1]} |f^{(6)}(c)| = \frac{10^{-6}}{6!} \cdot 24.41411409 \approx$$

$$3.390849179 \cdot 10^{-8}$$

Verdadero valor:

$$0.1001674166 - 3.390849179 \cdot 10^{-8} < \arcsen 0.1 < 0.1001674166 + 3.390849179 \cdot 10^{-8}$$
$$0.1001673826 < \arcsen 0.1 < 0.1001674505$$

El verdadero valor estará comprendido entre: **(0.1001673826, 0.1001674505)**

62.- Sea $f(x) = \arcsen(2x)$

a) Teoría: Escribir la definición del **polinomio de Maclaurin** de grado n .

b) Hallar una aproximación del valor $\arcsen(0.1)$ con el **polinomio de Maclaurin** de grado 5 y acotar el **error** cometido.

Solución:

a) Para una función $f(x)$ con derivadas hasta un cierto orden n en un punto:

$$T_n(f(x), a=0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

b) **Veáse el ejercicio 61**

$$T_{n=5}[\arcsen x, 0] = \left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 \right] \Rightarrow$$

$$T_{n=5}[\arcsen(2x), 0] = 2x + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{3}{40}(2x)^5 = 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{12}{5}x^5$$

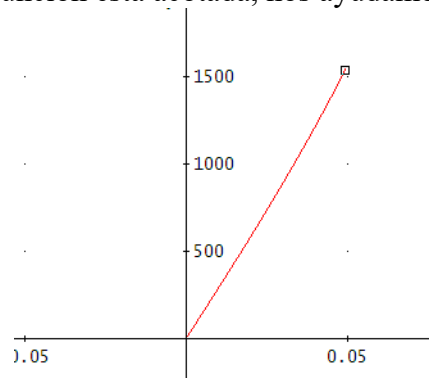
Sustituimos en el polinomio x por 0.05

$$\arcsen(0.1) = \arcsen(2 \cdot 0.05) \approx 2 \cdot 0.05 + \frac{0.05^3}{3} + \frac{12}{5} \cdot 0.05^5 \approx \mathbf{0.1001674166}$$

Cálculo del Error: calculamos la derivada sexta

$$|f^{(6)}(c)| = \left| \frac{1920c(128c^4 + 160c^2 + 15)}{\sqrt{(1-4c^2)^{11}}} \right| \text{ con } a=0 < c < 0.05=x$$

Estudiamos para qué valor esta función está acotada, nos ayudamos con su gráfica:



Acotamos con 1600

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=5 \\ x=0.05 \\ 0 < c < 0.05}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{0.05^6}{6!} \right| \leq \frac{0.05^6}{6!} \max_{[0,0.1]} |f^{(6)}(c)| = \frac{0.05^6}{6!} \cdot 1600 \approx$$

$$\mathbf{3.472222222 \cdot 10^{-8}}$$

Verdadero valor:

$$0.1001674166 - \mathbf{3.472222222 \cdot 10^{-8}} < \arcsen 0.1 < 0.1001674166 + \mathbf{3.472222222 \cdot 10^{-8}}$$

$$0.1001673818 < \arcsen 0.1 < 0.1001674513$$

El verdadero valor está comprendido entre: 0.1001673818 y 0.1001674513



FÓRMULA DE TAYLOR



63.- Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

a) Escribir la **fórmula de Maclaurin**.

b) Acotar el **error** cometido en el cálculo de $f\left(\frac{1}{5}\right)$ utilizando el polinomio

de grado 5.

c) Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $f\left(\frac{1}{5}\right)$ con un **error** menor a 10^{-6}

Solución:

a) Fórmula de Maclaurin

$$f(x) = T_n(f(x), a=0) + R_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$$

con $a=0 < c < x$ o bien $x < c < 0 = a$

Hallamos las primeras derivadas para encontrar una fórmula de recurrencia para las derivadas

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	x^2e^{-x}	0
1	$(2x - x^2)e^{-x}$	0
2	$(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$	0
3	$-(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$	6
4	$(x^2 - 8x + 12)e^{-x}$	12
5	$-(x^2 - 10x + 20)e^{-x}$	-20

Con un poco de atención se observa que la fórmula que proporciona la derivada n-ésima de la función es

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 - 2nx + n(n-1))e^{-x}$$

Por lo tanto, sustituyendo $x=0$ para obtener el valor de las derivadas y aplicando la fórmula del polinomio de Maclaurin se obtiene:

$$T_n[x^2e^{-x}, 0] = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{6}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)}{n!}x^n = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-2)!}$$

Para hallar el resto de Lagrange correspondiente necesitamos la derivada de orden $n+1$ en $x=c$, la cual se obtiene sustituyendo n por $n+1$ y x por c en la expresión de la derivada n-ésima.

$$f^{(n+1)}(c) = (-1)^{n+1} (c^2 - 2(n+1)c + (n+1)n)e^{-c}, \text{ luego el resto es } R_n(x) =$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^{n+1} (c^2 - 2(n+1)c + (n+1)n)e^{-c} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Y la fórmula de Maclaurin de la función dada es:

$$x^2e^{-x} = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-2)!} + (-1)^{n+1} (c^2 - 2(n+1)c + (n+1)n)e^{-c} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con $a=0 < c < x$, o bien, $x < c < 0 = a$

b) Acotar el error cometido en el cálculo de $f(1/5)$ al usar el polinomio de grado 5.

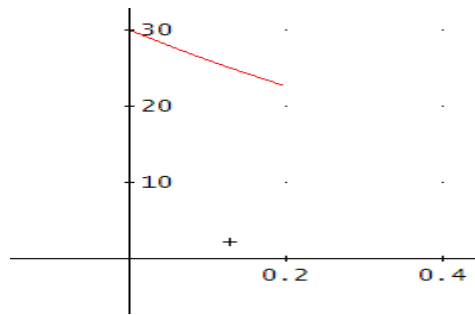
Lo primero que debemos hallar es el máximo o una cota de la derivada sexta, en valor absoluto, en el intervalo $[0, 1/5]$



FÓRMULA DE TAYLOR



$$|f^{(6)}(c)| = |(c^2 - 12c + 30)e^{-c}|$$



Observamos que la derivada sexta es decreciente y su máximo en $[0, 1/5]$ se alcanza para $c=0$ y vale 30. Por lo tanto una cota del error es:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{n=5 \\ x=1/5 \\ 0 < c < 1/5}} = \left| f^{(6)}(c) \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^6}{6!} \right| \leq \frac{5^{-6}}{6!} \max_{[0, 1/5]} |f^{(6)}(c)| = \frac{5^{-6}}{6!} \cdot 30 \approx$$

$$2.666666666 \cdot 10^{-6} < \mathbf{3 \cdot 10^{-6}}$$

c) Calcular n para que $\text{Error}(1/5) < 10^{-6}$.

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{x=1/5 \\ 0 < c < 1/5}} = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{5^{n+1}(n+1)!} \max_{[0, 1/5]} |f^{(n+1)}(c)| =$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}(n+1)!} \max_{[0, 1/5]} |(c^2 - 2(n+1)c + (n+1)n)e^{-c}|_{c=0} = \frac{1}{5^{n+1}(n+1)!} (n+1)n = \frac{1}{5^{n+1}(n-1)!} < \frac{1}{1000000} = 10^{-6}$$

Obsérvese que las funciones derivadas de $f(x)$, en valor absoluto, son todas decrecientes pues sus derivadas son negativas, en consecuencia, la expresión anterior alcanza el máximo en $c=0$, luego

Grado	Error
.....
4	$\frac{1}{5^{4+1} \cdot (4-1)!} = \frac{1}{18750}$
5	$\frac{1}{5^{5+1} \cdot (5-1)!} = \frac{1}{375000}$
6	$\frac{1}{5^4 \cdot 4!} = \frac{1}{9375000} < 10^{-6}$

Luego $\mathbf{n=6}$



FÓRMULA DE TAYLOR



64.- Dada la función $f(x) = \arctg\sqrt{x}$, se pide:

a) Escribir la **fórmula de Taylor** de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$

b) Hallar el valor aproximado de $\arctg\sqrt{0.5}$, con el polinomio obtenido en a) y una cota del **error** cometido.

Solución:

a) Fórmula de Taylor de $f(x)$

$$f(x) = T_{n=4}(f(x), a=1) + R_{n=4}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5$$

con $a=1 < c < x$ ó bien $x < c < 1=a$

Calculamos el polinomio de grado 4 en $a=1$ y el resto de Lagrange correspondiente

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\arctg\sqrt{x}$	$\pi/4$
1	$\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$	$1/4$
2	$-\frac{3x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2}$	$-1/4$
3	$\frac{15x^2+10x+3}{8\sqrt{x^5}(x+1)^3}$	$7/16$
4	$-\frac{3(35x^3+35x^2+21x+5)}{16\sqrt{x^7}(x+1)^4}$	$-9/8$
5	$\frac{3(315x^4+420x^3+378x^2+180x+35)}{32\sqrt{x^9}(x+1)^5}$	

La fórmula de Taylor pedida es:

$$\arctg\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4} \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{7}{16} \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{9}{8} \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{3(315c^4+420c^3+378c^2+180c+35)}{32\sqrt{c^9}(c+1)^5} \frac{(x-1)^5}{5!}$$

$$= \frac{9x^4 - 50x^3 + 120x^2 - 174x - 48\pi + 95}{192} + \frac{3(315c^4 + 420c^3 + 378c^2 + 180c + 35)(x-1)^5}{32\sqrt{c^9}(c+1)^5 5!}$$

con $a=1 < c < x$ ó bien $x < c < 1=a$

b) Valor aproximado de $\arctg\sqrt{0.5}$

Sustituimos $x=0.5$ en el polinomio

$$\arctg\sqrt{0.5} \approx \frac{9 \cdot 0.5^4 - 50 \cdot 0.5^3 + 120 \cdot 0.5^2 - 174 \cdot 0.5 - 48\pi + 95}{192} = \mathbf{0.6171038925}$$

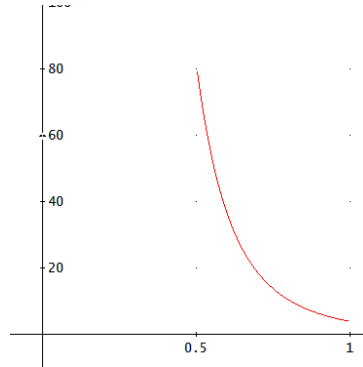
Cálculo de una cota superior del error cometido:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[x,a]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{n=4 \\ a=1 \\ x=0.5}} \max_{0.5 < c < 1} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(x-1)^5}{5!} \right|$$

Hallamos primero una cota de la derivada quinta en $[0.5, 1]$

FÓRMULA DE TAYLOR

$$|f^{(5)}(c)| = \left| \frac{3(315c^4 + 420c^3 + 378c^2 + 180c + 35)}{32\sqrt{c^9}(c+1)^5} \right|$$



Es decreciente en el intervalo $[0.5, 1]$, por lo que el máximo se alcanza en $c=0.5$

$$|f^{(5)}(0.5)| = \left| \frac{3(315 \cdot 0.5^4 + 4200.5^3 + 3780.5^2 + 1800.5 + 35)}{32\sqrt{0.5^9}(0.5+1)^5} \right| \approx 81.48314438$$

Una cota del error es

$$E(0.5) = |R_{n=4}(0.5)| = \max_{0.5 < c < 1} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(0.5-1)^5}{5!} \right| = 81.48314438 \left| \frac{(0.5-1)^5}{5!} \right| \approx 0.02121956885 < \mathbf{0.03}$$

65.- Dada la función $f(x) = e^{-3x}$, se pide hallar el grado n del *polinomio de Maclaurin* que se necesita utilizar para aproximar e^{-3} con un *error* menor que **0.001**

Solución:

El valor pedido e^{-3} corresponde a $x=1$

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[x,a]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ 0 < c < 1 \\ x=1}} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0.001$$

Para estimar el error utilizando la acotación del resto de Lagrange, hemos de hallar la expresión de la derivada n -ésima. Para ello calculamos las primeras derivadas de e^{-3x} con objeto de obtener la ley de recurrencia:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	e^{-3x}	1
1	$-3e^{-3x}$	-3
2	$3^2 e^{-3x}$	9
3	$-3^3 e^{-3x}$	-27
4	$3^4 e^{-3x}$	81
...
n	$(-1)^n 3^n e^{-3x}$	$(-1)^n 3^n$

Luego la derivada de orden $n+1$ es:

$$f^{(n+1)}(c) = (-1)^{n+1} 3^{n+1} e^{-3c}$$

El valor pedido e^{-3} corresponde a $x=1$. Por otro lado, en el intervalo $[0,1]$ la derivada $n+1$, en valor absoluto, es decreciente por serlo e^{-3x} , luego el máximo se alcanza en $c=0$.

$$|f^{(n+1)}(0)| = |(-1)^{n+1} 3^{n+1} e^{-3 \cdot 0}| = 3^{n+1}$$

Calculamos para qué valor de n el resto es < 0.001

$$E(1) = |R_n(1)| = \max_{0 < c < 1} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} < 0.001$$

Grado	Error
.....
9	$\frac{3^{10}}{10!} = \frac{729}{44800} \approx 0.0162$
10	$\frac{3^{11}}{11!} = \frac{2187}{492800} \approx 0.0044$
11	$\frac{3^{12}}{12!} = \frac{2187}{1971200} \approx 0.0011$
12	$\frac{3^{13}}{13!} = \frac{6561}{25625600} \approx 0.000256 < 10^{-3}$

Luego, se necesita un polinomio de grado **n=12** o superior.



FÓRMULA DE TAYLOR



66.- Dada la función $f(x) = \ln\sqrt{x}$ se pide:

a) Escribir la **fórmula de Taylor** de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$

b) Hallar el valor aproximado de $\ln\sqrt{2}$ con el polinomio obtenido en a) y una cota del **error cometido**

Solución:

a) Fórmula de Taylor de $f(x) = \ln\sqrt{x}$

$$f(x) = T_{n=4}(f(x), a=1) + R_{n=4}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5$$

con $a=1 < c < x$ ó bien $x < c < 1=a$

Calculamos el polinomio de grado 4 en $a=1$ y el resto de Lagrange correspondiente

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln\sqrt{x}$	0
1	$\frac{1}{2x}$	1/2
2	$-\frac{1}{2x^2}$	-1/2
3	$\frac{1}{x^3}$	1
4	$-\frac{3}{x^4}$	-3
5	$\frac{12}{x^5}$	

La fórmula de Taylor pedida es:

$$\ln\sqrt{x} = 0 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - 3 \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{12}{c^5} \frac{(x-1)^5}{5!} =$$

$$= \frac{(1-x)(3x^3 - 13x^2 + 23x - 25)}{24} + \frac{12}{c^5} \frac{(x-1)^5}{5!} \quad \text{con } a=1 < c < x \text{ ó bien } x < c < 1=a$$

b) Valor aproximado de $\ln\sqrt{2}$

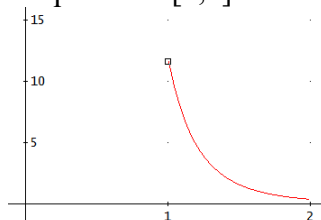
Sustituimos $x=2$ en el polinomio

$$\ln\sqrt{2} \approx \frac{(1-2)(3 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 23 \cdot 2 - 25)}{24} = \frac{7}{24} \approx \mathbf{0.2916666666}$$

Cálculo de una cota superior del error cometido:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{n=4 \\ a=1 \\ x=2}} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(x-1)^5}{5!} \right|$$

Hallamos primero la cota de la derivada quinta en $[1,2]$



Es decreciente en el intervalo $[1,2]$, por lo que el máximo se alcanza en $x=1$

$$\text{Una cota del error es: } E(2) = \max_{1 < c < 2} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(2-1)^5}{5!} \right| = \frac{12}{5!} \approx \mathbf{0.1}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



67.- Dada la función $f(x) = \ln(1+x)$, se pide hallar el grado n del **polinomio de Maclaurin** que se necesita utilizar para aproximar $\ln 1,5$ con un **error** menor que **0.001**.

Solución:

Veáse el ejercicio 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+c)^{-(n+1)}$$

$$c \in (x,0), \text{ o bien, } c \in (0,x)$$

El valor pedido $\ln(1.5)$ corresponde a $x=0.5$.

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ 0 < c < 0.5 \\ x=0.5}} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(0.5-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0.001$$

Por otro lado, en el intervalo $[0,0.5]$, la derivada $n+1$, en valor absoluto, es decreciente por serlo

$$f^{(n+1)}(c) = (-1)^n \frac{n!}{(1+c)^{n+1}}, \text{ luego el máximo se alcanza en } c=0 \text{ y vale } \left| f^{(n+1)}(0) \right| = \left| (-1)^n \frac{n!}{(1+0)^{n+1}} \right| = n!$$

$$E(x) = |R_n(0.5)| \leq \max_{[a,x]} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ 0 < c < 0.5 \\ x=0.5}} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(0.5-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{0.5^{n+1}}{n+1} < 0.001$$

Calculamos para qué valor de n el resto es <0.001

Grado	Error
.....
5	$\frac{1}{5^{5+1} \cdot (5+1)} = \frac{1}{384}$
6	$\frac{1}{5^{6+1} \cdot (6+1)} = \frac{1}{896}$
7	$\frac{1}{5^{7+1} \cdot (7+1)} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{1000} = 10^{-3}$

Luego, se necesita un polinomio de grado **n=7** o superior.

68.- Dada la función $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, se pide:
a) Escribir la *fórmula de Taylor* de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$
b) Hallar el valor aproximado de $e^{\sqrt{2}}$, con el polinomio obtenido en a) y una cota del *error* cometido

Solución:

a) Fórmula de Taylor de $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$f(x) = T_{n=4}(f(x), a=1) + R_{n=4}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5$$

con $a=1 < c < x$ ó bien $x < c < 1=a$

Calculamos el polinomio de grado 4 en $a=1$ y el resto de Lagrange correspondiente:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$e^{\sqrt{x}}$	e
1	$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$	e/2
2	$\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x^3}}$	0
3	$\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{8\sqrt{x^5}}$	e/8
4	$\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x^3}-6x+15\sqrt{x}-15)}{16\sqrt{x^7}}$	-5e/16
5	$\frac{e^{\sqrt{x}}(x^2-10\sqrt{x^3}+45x-105\sqrt{x}+105)}{32\sqrt{x^9}}$	

La fórmula de Taylor pedida es:

$$e^{\sqrt{x}} = e + \frac{e}{2}(x-1) + 0 \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{e}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{5e}{16} \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{e^{\sqrt{c}}(c^2-10\sqrt{c^3}+45c-105\sqrt{c}+105)}{32\sqrt{c^9}} \frac{(x-1)^5}{5!} =$$

$$= \frac{e(5x^4 - 28x^3 + 54x^2 - 236x - 179)}{384} + \frac{e^{\sqrt{c}}(c^2 - 10\sqrt{c^3} + 45c - 105\sqrt{c} + 105)}{32\sqrt{c^9}} \frac{(x-1)^5}{5!}$$

con $a=1 < c < x$ ó bien $x < c < 1=a$

b) Valor aproximado de $e^{\sqrt{x}}$

Sustituimos $x=2$ en el polinomio

$$e^{\sqrt{2}} \approx \frac{e(5 \cdot 2^4 - 28 \cdot 2^3 + 54 \cdot 2^2 - 236 \cdot 2 - 179)}{384} \approx \mathbf{4.098659319}$$

Cálculo de una cota superior del error cometido:

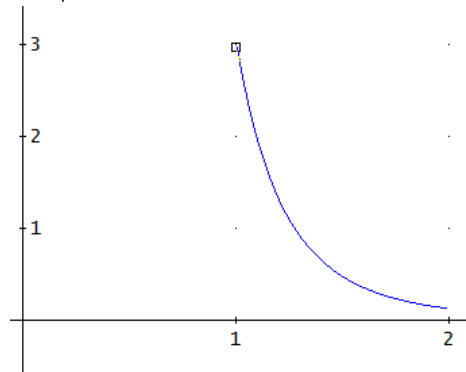
$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{n=4 \\ a=1 \\ x=2}} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(2-1)^5}{5!} \right|$$



FÓRMULA DE TAYLOR

Hallamos primero la cota de la derivada quinta en $[1,2]$

$$|f^{(5)}(c)| = \left| \frac{e^{\sqrt{c}} (c^2 - 10\sqrt{c^3} + 45c - 105\sqrt{c} + 105)}{32\sqrt{c^9}} \right|$$



Observamos que es decreciente, luego el máximo se obtiene en $c=1$

$$|f^{(5)}(1)| = \left| \frac{e^{\sqrt{1}} (1^2 - 10\sqrt{1^3} + 45 \cdot 1 - 105\sqrt{1} + 105)}{32\sqrt{1^9}} \right| = \frac{9e}{8} \approx 3.058067057$$

Y una cota de error es

$$E(2) \leq \max_{1 < c < 2} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(2-1)^5}{5!} \right| = 3.058067057 \frac{1}{5!} = 0.02548389214 < \mathbf{0.03}$$

69.- Dada la función $f(x) = \ln(1-x)$, se pide hallar el grado n del **polinomio que se necesita utilizar para aproximar $f(0.5)$ con un **error** menor que 0.001**

Solución:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_{\substack{a=0 \\ x=0.5}} = \max_{0 < c < 0.5} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} < 0.001$$

Para estimar el error utilizando la acotación del resto de Lagrange, hemos de hallar la expresión de la derivada n -ésima. Para ello calculamos las primeras derivadas de $x e^{-x}$ con objeto de obtener la ley de recurrencia

n	$f^{(n)}(x)$
0	$\ln(1-x)$
1	$(x-1)^{-1}$
2	$-(x-1)^{-2}$
3	$2(x-1)^{-3}$
4	$-6(x-1)^{-4}$
...	...
n	$(-1)^{n-1} (n-1)! (x-1)^{-n}$

El valor pedido $f(1)$ corresponde a $x=1$.

$$\left| f^{(n+1)}(c) \right| = \left| (-1)^n n! (c-1)^{-n-1} \right| = \left| (-1)^n \frac{n!}{(c-1)^{n+1}} \right|$$

Por otro lado, en el intervalo $[0,0.5]$, la derivada de orden $n+1$, en valor absoluto, alcanza el valor máximo cuando $c=0.5$, ya que todas son funciones crecientes,

$$\left| f^{(n+1)}(0.5) \right| = \left| (-1)^n \frac{n!}{(0.5-1)^{n+1}} \right| = 2^{n+1} n!$$

La expresión del resto queda:

$$E(1) \leq \max_{0 < c < 1} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \frac{(0.5-0)^{n+1}}{(n+1)!} = 2^{n+1} n! \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3} = 0.001$$

Podemos despejar directamente $n+1 > 1000$

Luego, se necesita un polinomio de grado **$n=999$** o superior.



FÓRMULA DE TAYLOR



70.- Dada la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ se pide:

a) Escribir la **fórmula de Taylor** de la función $f(x)$ para $n=4$ y $a=1$

b) Hallar el valor aproximado de $1/\sqrt{1.5}$, con el polinomio obtenido en a) y una cota del **error cometido**

Solución:

a) Fórmula de Taylor de $f(x)=1/\sqrt{x}$

$$f(x) = T_{n=4}(f(x), a=1) + R_{n=4}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5$$

con $a=1 < c < x$ ó bien $x < c < 1=a$

Calculamos el polinomio de grado 4 en $a=1$ y el resto de Lagrange correspondiente

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	1
1	$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$	-1/2
2	$\frac{3}{4\sqrt{x^5}}$	3/4
3	$-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$	-15/8
4	$\frac{105}{16\sqrt{x^9}}$	105/16
5	$-\frac{945}{32\sqrt{x^{11}}}$	

Luego la fórmula de Taylor es:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{4} \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{15}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{105}{16} \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{945}{32\sqrt{c^{11}}} \frac{(x-1)^5}{5!} =$$

$$= \frac{35x^4 - 180x^3 + 378x^2 - 420x + 315}{128} - \frac{945}{32\sqrt{c^{11}}} \frac{(x-1)^5}{5!} \quad \text{con } a=1 < c < x \text{ ó bien } x < c < 1=a$$

b) Valor aproximado de $1/\sqrt{1.5}$ con el polinomio anterior

Sustituimos $x=1.5$ en el polinomio

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{35 \cdot 1.5^4 - 180 \cdot 1.5^3 + 378 \cdot 1.5^2 - 420 \cdot 1.5 + 315}{128} \approx \mathbf{0.8217773437}$$

Cálculo de una cota superior del error cometido:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{n=4 \\ a=1 \\ x=1.5}} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(1.5-1)^5}{5!} \right|$$

$$\text{Hallamos ahora la cota de la derivada quinta en } [1, 1.5]: |f^{(5)}(c)| = \left| -\frac{945}{32\sqrt{c^{11}}} \right| \leq \frac{945}{32}$$

Observamos que es decreciente, luego el máximo se obtiene en $c=1$, ya que el denominador es mínimo.

$$\text{Y una cota del error es: } E(1.5) \leq \max_{1 < c < 1.5} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(1.5-1)^5}{5!} \right| = \frac{945}{32} \frac{(1.5-1)^5}{5!} \approx 0.00769 < \mathbf{0.008}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



71.- Dada la función $f(x) = e^{-5x}$, se pide hallar el grado n del **polinomio de Maclaurin** que se necesita utilizar para aproximar e^{-5} con un **error** menor que **0.001**

Solución:

El valor pedido e^{-5} corresponde a $x=1$.

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ 0 < c < 1 \\ x=1}} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0.001$$

Para estimar el error utilizando la acotación del resto de Lagrange, hemos de hallar la expresión de la derivada n -ésima. Para ello calculamos las primeras derivadas de e^{-5x} con objeto de obtener la ley de recurrencia

n	$f^{(n)}(x)$
0	e^{-5x}
1	$-5e^{-5x}$
2	$5^2 e^{-5x}$
3	$-5^3 e^{-5x}$
4	$5^4 e^{-5x}$
...	...
n	$(-1)^n 5^n e^{-5x}$

La derivada de orden $n+1$ es: $f^{(n+1)}(c) = (-1)^{n+1} 5^{n+1} e^{-5c}$

El valor pedido $f(1) = e^{-5}$. Por otro lado, en el intervalo $[0,1]$ la derivada $n+1$, en valor absoluto, es decreciente por serlo e^{-5c} , luego el máximo se alcanza en $c=0$:

$$E(1) \leq \max_{0 < c < 1} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \left| \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} < 0.001$$

Grado	Error
.....
15	$\frac{5^{15+1}}{(15+1)!} \approx 0.0072929$
16	$\frac{5^{16+1}}{(16+1)!} \approx 0.0021449$
17	$\frac{5^{17+1}}{(17+1)!} \approx 0.0005958 < 10^{-3}$

Luego, se necesita un polinomio de grado **n=17**



FÓRMULA DE TAYLOR



72.- a) Calcular el **polinomio de Taylor** de orden 4 de la función $f(x) = \text{sen } x$, en

$$a = -\frac{\pi}{6}.$$

b) Utilizando el polinomio del apartado anterior calcular $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

c) Estimar el **error** cometido al calcular $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ con el polinomio del apartado

a).

Solución:

a)

$$T_{n=4}\left(f(x) = \text{sen}(x), a = -\frac{\pi}{6}\right) = \sum_{k=0}^{n=4} \frac{f^{(k)}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{k!} \left(x + \frac{\pi}{6}\right)^k = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) \frac{\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{1!} + f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) \frac{\left(x + \frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} + f'''\left(-\frac{\pi}{6}\right) \frac{\left(x + \frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} + f^{(4)}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \frac{\left(x + \frac{\pi}{6}\right)^4}{4!}$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-\pi/6)$
0	senx	-1/2
1	cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	-senx	1/2
3	-cosx	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	senx	-1/2

$$T_{n=4}\left(f(x) = \text{sen}(x), a = -\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \left(x + \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x + \frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{1}{48} \left(x + \frac{\pi}{6}\right)^4$$

$$b) f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \approx -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{\pi}{12}\right)^3 - \frac{1}{48} \left(\frac{\pi}{12}\right)^4 \approx \mathbf{-0.2588281294}$$

$$c) E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=-\frac{\pi}{6} \\ x=-\frac{\pi}{12}}} = \max_{a < c < x} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

La expresión del error al aproximar con un polinomio de grado 4 es:

$$E\left(-\frac{\pi}{12}\right) \leq \max_{-\pi/6 < c < -\pi/12} |f^{(5)}(c)| \frac{\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right)^5}{5!} = \max_{-\pi/6 < c < -\pi/12} |\cos(c)| \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^5}{5!} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^5}{5!} \approx \mathbf{1.024853732 \cdot 10^{-5}}$$

73.- Dada la función $f(x) = \ln(1+2x)$, se pide:

a) Obtener, el **polinomio de Maclaurin** de grado 5 de la función $f(x)$, así como la **fórmula de Maclaurin** para $n=5$.

b) Calcular un valor aproximado de $\ln(3/2)$ y una cota del **error** cometido utilizando los resultados del apartado anterior.

c) Usando el procedimiento que consideres más adecuado, calcula el grado de polinomio que se necesita aplicar para obtener una aproximación de $\ln(3/2)$ que tenga las 3 primeras cifras decimales exactas.

Solución:

a) Polinomio de Maclaurin

$$T_n[f(x), a] = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+2x)$	0
1	$\frac{2}{2x+1}$	2
2	$-\frac{4}{(2x+1)^2}$	-4
3	$\frac{16}{(2x+1)^3}$	16
4	$-\frac{96}{(2x+1)^4}$	-96
5	$\frac{768}{(2x+1)^5}$	768

$$T_{n=5}[\ln(2x+1), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 =$$

$$= 2x - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{3!}x^3 - \frac{96}{4!}x^4 + \frac{768}{5!}x^5 = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5$$

Cálculo del resto de Maclaurin del polinomio anterior

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 = -\frac{7680}{(2c+1)^c} \frac{x^6}{6!}$$

Fórmula de Maclaurin para $n=5$, con $a=0 < c < x$ o bien $x < c < 0 = a$

$$\ln(1+2x) = T_{n=5}[\ln(1+2x), a=0] + R_{n=5}(x) = T_{n=5}[\ln(1+2x), a=0] + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 - \frac{7680}{(2c+1)^c} \frac{x^6}{6!}$$

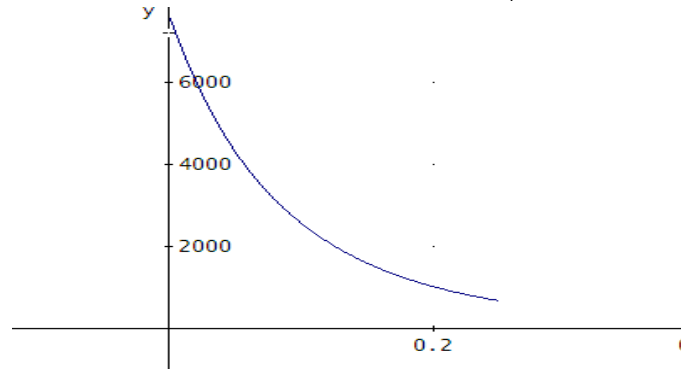
b) Valor aproximado de $\ln(3/2)$ con el polinomio anterior

$$\ln(1+2x) = \ln(3/2) \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\ln(3/2) \approx 2\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{32}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{391}{960} \approx \mathbf{0.4072916666}$$

Cálculo de una cota del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ a < c < x \\ x = \frac{1}{4}}} |f^{(n+1)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} =$$



Se observa que la sexta derivada es decreciente en $[0, 1/4]$, luego el máximo se alcanza en $c=0$ y su valor es 7680, luego una cota del error es

$$E\left[\frac{1}{4}\right] = \left| R_{n=5}\left(\frac{1}{4}\right) \right| \leq \max_{0 < c < 1/4} \left| \frac{7680}{(2c+1)^6} \right| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{6!} = 7680 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{6!} \approx 0.002604166666 < 0.003$$

Por lo tanto, **$\ln(3/2) = 0.407 \pm 0.003$**

c) Calculamos los restos a partir de $n=6$ sucesivamente

Observamos que en el intervalo $[0, 1/4]$ son todas decrecientes, por lo que, en todas ellas, el máximo se alcanza en $c=0$, es decir:

$$\begin{aligned} E(x) = |R_n(x)| &= \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{0 < c < 1/4} |f^{(n+1)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \max_{n=6 \ 0 < c < 1/4} |f^{(7)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^7}{7!} = \max_{0 < c < 1/4} \left| \frac{92160}{(2c+1)^7} \right| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^7}{7!} = \\ &= 92160 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^7}{7!} \approx 0.001116 > 10^{-3} \end{aligned}$$

Para $n=7$:

$$\begin{aligned} E(x) = |R_n(x)| &= \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{0 < c < 1/4} |f^{(n+1)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \max_{n=7 \ 0 < c < 1/4} |f^{(8)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8}{8!} = \max_{0 < c < 1/4} \left| \frac{1290240}{(2c+1)^8} \right| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8}{8!} = \\ &= 1290240 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8}{8!} = 0.00048828125 < 10^{-3}, \text{ sin embargo no es suficiente.} \end{aligned}$$

Comprobación

$$T_{n=7}[\ln(2x+1), a=0] = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^6 + \frac{128}{7}x^7$$

$$\ln(3/2) \approx 2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{32}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 - \frac{32}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^6 + \frac{128}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7 \approx 0.4058035714$$

El error afecta a la 3ª cifra decimal pues $0.4058035714 \pm 0.00048828125$ cambia la 3ª cifra.

Para $n=8$:



FÓRMULA DE TAYLOR



$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{0 < c < 1/4} |f^{(n+1)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \max_{0 < c < 1/4} |f^{(9)}(c)| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^9}{9!} = \max_{0 < c < 1/4} \left| \frac{20643840}{(2c+1)^9} \right| \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^9}{9!} = 20643840 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^9}{9!} \approx 0.000217$$

Para **n=8**, el polinomio me proporciona una aproximación con 3 cifras decimales exactas

Comprobación

$$T_{n=8}[\ln(2x+1), a=0] = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^6 + \frac{128}{7}x^7 - 32x^8 \approx 0.4058035714$$

$$\ln(3/2) \approx 2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{32}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 - \frac{32}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^6 + \frac{128}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 32\left(\frac{1}{4}\right)^8 \approx 0.4053152901$$

El error no afecta a la 3ª cifra decimal pues $\boxed{0.405}3152901 \pm 0.000217$ no afecta a la 3ª cifra.

74.- Dada la función $f(x) = e^{\text{sen}x}$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, se pide:

- Polinomio de Maclaurin de grado 5 de f
- Calcular de forma aproximada \sqrt{e} , utilizando el polinomio anterior.
- Acotar el error cometido en la aproximación anterior.

Solución

a) Polinomio de Maclaurin de grado 5 de f :

$$T_{n=5}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^v(0)}{5!}x^5$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$e^{\text{sen}x}$	1
1	$\cos x \cdot e^{\text{sen}x}$	1
2	$(\cos^2 x - \text{sen}x) \cdot e^{\text{sen}x}$	1
3	$(\cos^3 x - \cos x(3\text{sen}x + 1)) \cdot e^{\text{sen}x}$	0
4	$(\cos^4 x - \cos^2 x(6\text{sen}x + 7) + \text{sen}x + 3) \cdot e^{\text{sen}x}$	-3
5	$(\cos^5 x - \cos^3 x(10\text{sen}x + 13) + \cos x(12\text{sen}^2 x + 15\text{sen}x + 4)) \cdot e^{\text{sen}x}$	-8

$$T_{n=5}[e^{\text{sen}x}, a=0] = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + 0x^3 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15}$$

b) Calcular de forma aproximada \sqrt{e} , utilizando el polinomio anterior.

$\sqrt{e} = e^{\text{sen}x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, luego sustituyendo el valor de x en el polinomio anterior:

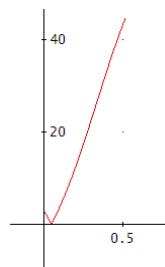
$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{8} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{15} \approx \mathbf{1.648657821}$$

c) Acotar el error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ x=\frac{\pi}{6} \\ n=5}} |f^{(6)}(c)| \left| \frac{\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)^6}{6!} \right|$$

Observando la gráfica:

$$|f^{(6)}(c)| = \left| (\cos^6 c - \cos^4 c(15\text{sen}c + 23) + \cos^2 c(42\text{sen}^2 c + 78\text{sen}c + 19) - 12\text{sen}^3 c - 15\text{sen}^2 c - 4\text{sen}c) \cdot e^{\text{sen}c} \right|$$



$$E\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \max_{0 < c < \frac{\pi}{6}} |f^{(6)}(c)| \left| \frac{\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)^6}{6!} \right| = |f^{(6)}\left(\frac{\pi}{6}\right)| \left| \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{6!} \right| = \frac{1753e^{1/2}}{64} \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{6!} \approx \mathbf{0.001292434136}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



75.- Dada la función $f(x) = e^{\text{sen}(x+\pi)}$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se pide:

- Polinomio de Maclaurin de grado 5 de f
- Calcular de forma aproximada \sqrt{e} , utilizando el polinomio anterior.
- Acotar el error cometido en la aproximación anterior.

Solución

a) Polinomio de Maclaurin de grado 5 de f :

$$T_{n=5}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^v(0)}{5!}x^5$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$e^{\text{sen}(x+\pi)}$	1
1	$-\cos x \cdot e^{-\text{sen}x}$	-1
2	$(\cos^2 x + \text{sen}x) \cdot e^{-\text{sen}x}$	1
3	$-(\cos^3 x + \cos x(3\text{sen}x - 1)) \cdot e^{-\text{sen}x}$	0
4	$(\cos^4 x + \cos^2 x(6\text{sen}x - 7) - \text{sen}x + 3) \cdot e^{-\text{sen}x}$	-3
5	$-(\cos^5 x + \cos^3 x(10\text{sen}x - 25) + \cos x(16 - 15\text{sen}x)) \cdot e^{-\text{sen}x}$	8

$$T_{n=5}[e^{\text{sen}(x+\pi)}, a=0] = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 + 0x^3 - \frac{3}{4!}x^4 + \frac{8}{5!}x^5 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15}$$

b) Calcular de forma aproximada \sqrt{e} , utilizando el polinomio anterior.

$\sqrt{e} = e^{\text{sen}(x+\pi)} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, luego sustituyendo el valor de x en el polinomio anterior:

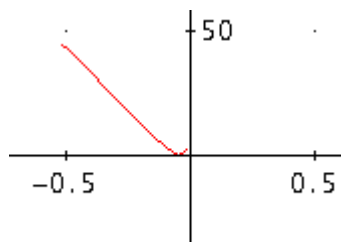
$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\left(-\frac{\pi}{6}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\pi}{6}\right)^4}{8} + \frac{\left(-\frac{\pi}{6}\right)^5}{15} \approx 1.648657821$$

c) Acotar el error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \max_{\substack{a=0 \\ x=-\frac{\pi}{6} \\ n=5}} |f^{(6)}(c)| \frac{\left(-\frac{\pi}{6}-0\right)^6}{6!}$$

Observando la gráfica:

$$|f^{(6)}(c)| = \left| (\cos^6 c + \cos^4 c(15\text{senc} - 65) + \cos^2 c(76 - 90\text{senc}) + 16\text{senc} - 15) \cdot e^{-\text{senc}} \right|$$



Una cota superior para la derivada sexta en el intervalo considerado puedes ser 50:

$$E\left(-\frac{\pi}{6}\right) \leq \max_{\frac{-\pi}{6} < c < 0} |f^{(6)}(c)| \frac{\left(-\frac{\pi}{6}-0\right)^6}{6!} \leq 50 \frac{\left(-\frac{\pi}{6}\right)^6}{6!} \approx 0.001430965758$$



FÓRMULA DE TAYLOR



76.- La medida del radio R de una *esfera* ha dado 6 cm con una cota de error de 0.02cm.

a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el *volumen* de la *esfera*.

b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de R para que el error cometido al calcular el volumen no supere el 0.6%.

Solución:

a) El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$E_{\text{porcentual}} = \frac{e_p}{V} 100 \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{4}{3} \pi 3R^2 dR}{\frac{4}{3} \pi R^3} 100 = \frac{3dR}{R} 100 = \frac{3 \cdot 0.02}{6} 100 = \boxed{1\%}$$

b) $E_{\text{porc}} < 0,6\%$, luego procediendo de manera inversa que en el apartado a)

$$E_{\text{porcentual}} = \frac{e_p}{V} 100 \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{4}{3} \pi 3R^2 dR}{\frac{4}{3} \pi R^3} 100 = \frac{3dR}{R} 100 = \frac{3 \cdot dR}{R} 100 < 0.6 \Rightarrow \frac{dR}{R} 100 < \boxed{0,2\%}$$

77.- Sea la función $f(x)=\arcsen x$

- a) Comprobar que verifica las condiciones del *teorema de Taylor* en $a=0$ y $n=3$.
- b) Calcular la *fórmula de Maclaurin* de $f(x)$ para $n=3$.
- c) Calcular $\arcsen(0,1)$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* de grado 3 y acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.
- d) Dar $\arcsen(0,1)$ con las cifras decimales exactas que los cálculos de c) te permitan asegurar.

Solución

- a) $f(x)$ verifica las condiciones del teorema de Taylor pues la función $f(x)$ y sus derivadas hasta el orden 4 son continuas en todo intervalo de $a=0$ contenido en $(-1,1)$ por ser cociente de funciones continuas, cuyo denominador no se anula en $(-1,1)$
- b) Calculamos el polinomio de grado 3 en $a=0$ y el resto de Lagrange correspondiente

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\arcsen x$	0
1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	1
2	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	0
3	$\frac{2x^2+1}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$	1
4	$\frac{3x(2x^2+3)}{\sqrt{(1-x^2)^7}}$	

La fórmula de Taylor pedida es:

$$f(x) = T_{n=3}[f(x), a=0] + R_{n=3}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 =$$

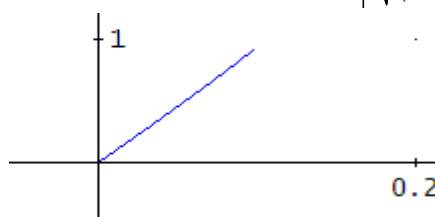
$$= 0 + 1x + 0x^2 + 1 \frac{x^3}{3!} + \frac{3c(2c^2+3)}{\sqrt{(1-c^2)^7}} \frac{x^4}{4!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3c(2c^2+3)}{\sqrt{(1-c^2)^7}} \frac{x^4}{4!}$$

- c) El valor aproximado es

$$\arcsen(0,1) \approx 0,1 + \frac{0,1^3}{6} \approx \mathbf{0,1001666666}$$

Cálculo del error:

Observando la derivada cuarta en valor absoluto: $|f^{(4)}(c)| = \left| \frac{3c(2c^2+3)}{\sqrt{(1-c^2)^7}} \right|$



El máximo se alcanza en $c=0,1$ y su valor es:



FÓRMULA DE TAYLOR



$$|f^{(4)}(0,1)| = \left| \frac{3 \cdot 0,1(2 \cdot 0,1^2 + 3)}{\sqrt{(1-0,1^2)^7}} \right| \approx 0,9384367711 < 1$$

Luego una cota del error es

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \underset{\substack{a=0 \\ x=0,1 \\ n=3}}{=} \max_{0 < c < 0,1} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(0,1-0)^4}{4!} \right| \leq 1 \frac{0,1^4}{4!} =$$

$$= 4,166666666 \cdot 10^{-6} < \mathbf{0,000005}$$

$$\arcsen(0,1) = 0,100166 \pm 0,000005$$

d) $\arcsen(0,1) = \mathbf{0,1001}$



FÓRMULA DE TAYLOR



78.- Dada la función $f(x) = x \ln(x+1)$, hallar el grado del *polinomio de Maclaurin* de la función $f(x)$ necesario para aproximar $f(0.1)$ con un *error* menor que 10^{-4} .

Solución

Hallamos la expresión del resto para el polinomio de grado n , para lo cual necesitamos la expresión de la derivada n -ésima

n	$f^{(n)}(x)$
0	$x \ln(x+1)$
1	$\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$
2	$\frac{x+2}{(x+1)^2}$
3	$-\frac{x+3}{(x+1)^3}$
4	$\frac{2(x+4)}{(x+1)^4}$
...
n	$\frac{(-1)^n (n-2)! (x+n)}{(x+1)^n}$

La derivada de orden $n+1$ se obtiene sustituyendo n por $n+1$:

$$|f^{(n+1)}(c)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} (n-1)! (c+n+1)}{(c+1)^{n+1}} \right|$$

Su máximo (en valor absoluto) en el intervalo $[0, 0.1]$ se alcanza en $c=0$, pues para ese valor el denominador es mínimo y el numerador máximo, y vale $(n-1)!(n+1)$, luego el error al aproximar $x=0.1$ con el polinomio de grado n verifica que:

$$\begin{aligned} E(x) &= |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_{\substack{a=0 \\ x=0.1}} = \\ &= \max_{0 < c < 0.1} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n-1)! (c+n+1)}{(c+1)^{n+1}} \right| \left| \frac{(0.1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{(n-1)!(n+1)}{(n+1)!} 0.1^{n+1} = \frac{0.1^{n+1}}{n} < 10^{-4} \end{aligned}$$

Luego

79.- Hallar, utilizando *polinomios de Taylor*, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{4x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x) - x}{-\operatorname{sen}(x^2)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{arcsen} x + 2x)^2}{1 - \cos x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

Solución

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_{n=3}[x - \operatorname{tg} x, a = 0]}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{4x^3} = \frac{1}{12}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x) - x}{-\operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_{n=3}[\operatorname{arctg}(x) - x, a = 0]}{T_{n=3}[-\operatorname{sen}(x^2), a = 0]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{arcsen} x + 2x)^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_{n=2}[(\operatorname{arcsen} x + 2x)^2, a = 0]}{T_{n=2}[1 - \cos x, a = 0]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{\frac{x^2}{2}} = 18$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_{n=1}[\sqrt{1+x} - \cos x, a = 0]}{T_{n=1}[\operatorname{sen} x, a = 0]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



80.- Un topógrafo está a 30m de la base de un árbol y mide el ángulo de elevación (a la copa) obteniendo $\alpha=71^\circ$ con una cota de error de 0,5.

- a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular la altura h del árbol (pasar α a radianes).
b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de α para que el error cometido al calcular la altura del árbol no supere el 1%.

Solución

a) Pasamos en primer lugar los grados a radianes

$$\alpha = \frac{71^\circ \pi}{180^\circ} \approx 1.239183768;$$

$$d\alpha = \frac{0.5^\circ \pi}{180^\circ} \approx 0.00872$$

$$h = 30 \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow dh = 30(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha$$

$$e_{\text{relativo}} = \frac{dh}{h} = \frac{30(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha}{30 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 1.239183768) 0.00872}{\operatorname{tg}(1.239183768)} \approx 0.02834884627 \Rightarrow e_{\text{porc}} < \mathbf{2.9\%}$$

b)

$$e_{\text{relativo}} = \frac{dh}{h} = \frac{30(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha}{30 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 1.239183768) d\alpha}{\operatorname{tg}(1.239183768)} < \mathbf{0.01}$$

$d\alpha = 0.003078307775$, luego el error porcentual al medir α debe ser:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{0.003078307775}{1.239183768} \approx 0.00248414146 \Rightarrow < \mathbf{0.25\%}$$

81.- Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$

a) Comprobar que verifica las condiciones del *teorema de Taylor* en $a=0$ y $n=3$.

b) Calcular la *fórmula de Maclaurin* de $f(x)$ para $n=3$.

c) Calcular $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ utilizando el *polinomio de Maclaurin* de grado 3 y acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.

d) Dar $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ con las cifras decimales exactas que los cálculos de c) te permitan asegurar.

Solución

a) $f(x)$ verifica las condiciones del teorema de Taylor, pues, tanto la función $f(x)$ como sus derivadas hasta el orden 4 son continuas en cualquier intervalo de $a=0$ por ser suma de funciones continuas en todo \mathbb{R}

b) Para escribir la fórmula de Maclaurin hallamos el polinomio de grado 3 y el resto:

$$f(x) = T_{n=3}[f(x), a=0] + R_{n=3}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x \operatorname{sen} x$	0
1	$x \cos x + \operatorname{sen} x$	0
2	$2 \cos x - x \operatorname{sen} x$	2
3	$-x \cos x - 3 \operatorname{sen} x$	0
4	$x \operatorname{sen} x - 4 \cos x$	

$$x \operatorname{sen} x = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{c \operatorname{sen} c - 4 \cos c}{4!}x^4 = x^2 + \frac{c \operatorname{sen} c - 4 \cos c}{4!}x^4$$

Siendo c un n° real desconocido entre 0 y x , o bien, entre x y 0.

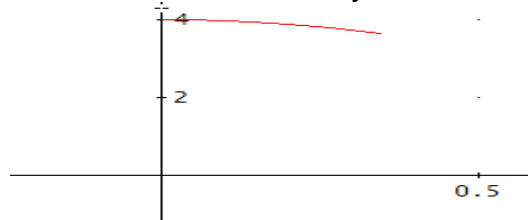
c) La aproximación pedida con el polinomio de Taylor obtenido es:

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx \left(\frac{\pi}{9}\right)^2 = \underline{0.1218469679}$$

Para hallar la cota del error cometido obtenemos una cota de la derivada cuarta

$$|f^{(4)}(c)| = |c \operatorname{sen} c - 4 \cos c|$$

y por ser la función decreciente el máximo se obtiene en $c=0$ y vale 4



$$E\left(\frac{\pi}{9}\right) = \left|R_{n=3}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right| = \frac{|c \operatorname{sen} c - 4 \cos c|}{4!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \leq \frac{4}{4!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 = 0.002474447265 < \underline{0.003}$$

Luego $f(\pi/9) = 0.121 \pm 0.003$

d) $f(\pi/9) \approx \underline{0.1}$

82.- Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, hallar el *grado del polinomio de Maclaurin de la función $f(x)$ necesario para aproximar $1/e$ con un *error menor que 10^{-4} .**

Solución

Para estimar el error utilizando la acotación del resto de Lagrange, hemos de hallar la expresión de la derivada n -ésima. Para ello calculamos las primeras derivadas de xe^{-x} con objeto de obtener la ley de recurrencia

n	$f^{(n)}(x)$
0	xe^{-x}
1	$(1-x)e^{-x}$
2	$(x-2)e^{-x}$
3	$(3-x)e^{-x}$
4	$(x-4)e^{-x}$
...	...
n	$(-1)^n(x-n)e^{-x}$

El valor pedido $\frac{1}{e} = xe^{-x} \Rightarrow$ corresponde a $x=1$.

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \underset{\substack{a=0 \\ 0 < c < 1 \\ x=1}}{=} \max_{0 < c < 1} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 0.001$$

$$|f^{(n+1)}(c)| = |(-1)^{n+1}(c-(n+1))e^{-c}| = \frac{n+1-c}{e^c}$$

Por otro lado, en el intervalo $[0,1]$, la derivada de orden $n+1$, en valor absoluto, alcanza el valor máximo cuando $c=0$, ya que todas son funciones decrecientes, $|f^{(n+1)}(0)| = n+1$.

La expresión del resto queda:

$$E(1) \leq \max_{0 < c < 1} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = n+1 \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} < 0.001$$

Grado	Error
.....
5	$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$
6	$\frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$
7	$\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$
8	$\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} < 10^{-4}$

Luego, se necesita un polinomio de grado **n=8** o superior.



FÓRMULA DE TAYLOR



83.- La medida del radio R de la base de un mástil ha dado 14 cm con una cota de error de 0.25 cm.

a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el *área* de la base del mástil.

b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de R para que el error cometido al calcular el área no supere el 1%.

Solución

a)

$$S = \pi R^2, \quad R = 14 \text{ cm}, \quad dR \leq 0.25 \text{ cm}$$

$$\Delta S \approx dS = S'(R) dR = 2 \pi R dR \leq 2 \pi 14 (\pm 0.25) \approx \pm 21.99 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\pm 21.99}{\pi 14^2} \approx \pm 0.036 \Rightarrow \text{Error porcentual al calcular el área} \leq \mathbf{3.6\%}$$

b)

$$\frac{\Delta S}{S} \leq 0.01 \Leftrightarrow \Delta S \leq \pi 14^2 0.01 \approx 6.16$$

$$\Delta S \approx dS = S'(R) dR = 2 \pi R dR = 2 \pi 14 dR \leq 6.16 \Rightarrow dR \leq \frac{6.16}{2\pi 14} \approx \mathbf{0.07 \text{ cm}}$$

$$\frac{dR}{R} \leq \frac{0.07}{14} \approx 0.005 \Rightarrow \text{Error porcentual al medir el radio} \leq \mathbf{0.5\%}$$

84.- a) Hallar el *polinomio de Taylor* de grado 3 de la función $f(x) = \cos^2 x$ en el punto $a = \frac{\pi}{4}$ y utilizar el polinomio anterior para calcular un valor aproximado de $\cos^2\left(1.1 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Acotar el *error* cometido en la aproximación anterior.

Solución:

a) El polinomio de Taylor de tercer grado que aproxima la función $\cos^2 x$ alrededor del punto $x = \frac{\pi}{4}$

$$\text{es: } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$f'(x) = -2\sin x \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad ;$$

$$f''(x) = 2 - 4\cos^2 x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$f'''(x) = 8\sin x \cos x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \quad \Rightarrow$$

$$T_{n=3}\left[\cos^2 x, a = \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

$$\cos^2\left(1.1 \frac{\pi}{4}\right) \approx T_{n=3}\left[\cos^2\left(1.1 \frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{40} + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{40}\right)^3 \approx \underline{0.421783165}.$$

b) La estimación del error la obtenemos a partir del cálculo del resto de Lagrange del polinomio de grado 3.

$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 \right| \quad \text{como } f^{(4)}(c) = 16\cos^2 c - 8 \text{ es creciente en } \left[\frac{\pi}{4}, 1.1 \frac{\pi}{4}\right]$$

$$E\left(1.1 \frac{\pi}{4}\right) = \left| R_{n=3}\left(1.1 \frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| \frac{\left(16\cos^2\left(1.1 \frac{\pi}{4}\right) - 8\right) \left(\frac{1}{10} \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} \right| = \frac{\pi^4}{7680000} \sin\left(\frac{\pi}{20}\right) \approx \underline{1.984132688 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(1.1 \frac{\pi}{4}\right) = 0.4217831 \pm 0.000002$$

85. - Obtener un valor del número e con un *error* inferior a una millonésima.

Solución:

La fórmula de Maclaurin de la función $f(x)=e^x$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \text{ con } c \in (0, x)$$

Acotación del error:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$E(1) = |R_n(1)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \right| = e^c \frac{1}{(n+1)!} < e^1 \frac{1}{(n+1)!} < 3 \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6} \Rightarrow n = 9$$

Calculamos el polinomio de Maclaurin de orden 9 y sustituimos el valor de x por 1:

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \dots + \frac{1^9}{9!} \approx \mathbf{2.71828}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



86.- Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Obtener la expresión del polinomio de Maclaurin de grado 3. Calcular $\ln(3)$ con dicho polinomio y acotar el error cometido.

Solución:

Para todo $x \in (-1,1)$ se verifica

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = T_3[\ln(1+x), a=0] - T_3[\ln(1-x), a=0]$$

$$T_3[\ln(1+x); a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3[\ln(1+x); a=0] = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

$$T_3[\ln(1-x); a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$T_3[\ln(1-x); a=0] = 0 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx T_3[\ln(1+x), a=0] - T_3[\ln(1-x), a=0] = 2x + \frac{2}{3}x^3$$

Como $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(3) \approx 2\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{8} = \frac{13}{12}$$

Donde el error cometido, evaluado por el método de Lagrange, sería

$$\left| R_{n=3} \left[\ln \frac{1+x}{1-x}, a=0 \right] \right|_{0 < c < 1/2} = \left| \frac{48c(c^2+1)}{(c+1)^4(c-1)^4} x^4 \right| \leq \left| \frac{100}{4!} \frac{1}{2^4} \right| \leq \mathbf{0.3}$$



FÓRMULA DE TAYLOR



87.- Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$, se pide:

- e) Calcular la derivada n-ésima de $f(x)$.
- f) Escribir la fórmula de Taylor en el punto $a=1$.
- g) Acotar el error cometido en el cálculo de $\ln(1,1)$ utilizando el polinomio de grado 3.
- h) Calcular el grado del polinomio mínimo necesario para obtener un valor de $\ln(1,1)$ con un error menor a 10^{-6}

Solución:

a) Cálculo de las derivadas n-ésimas de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f''(x) = -(1+x)^{-2}; f'''(x) = 2(1+x)^{-3}; f^{IV}(x) = -2 \cdot 3(1+x)^{-4}; f^V(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4(1+x)^{-5};$$

$$\dots\dots\dots; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (x+1)^{-n}.$$

Se calcula la derivada de esta expresión y se observa que su valor es el mismo que el que se obtiene al sustituir n por $n+1$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)}$$

b) Cálculo de la fórmula de Taylor en el punto $a=1$.

Calculadas las derivadas hasta el orden n se puede escribir la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + R_n(x)$$

$$f(x) = 0 + \frac{1/2}{1!}(x-1) + \frac{-1/2^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{2/2^3}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2^n n!}(x-1)^n + R_n(x) \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2 \cdot 2^2}(x-1)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-1)^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}(x-1)^n + R_n(x)$$

$$\text{Siendo } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(c+1)^{n+1}} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \quad \text{con } c \in [1,x] \text{ o } c \in [x,1]$$

c) Calculamos $\ln(1,1)$ utilizando el polinomio de grado 3

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln(1,1) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 1,1 \Rightarrow x+1 = 2,2 \Rightarrow x = 1,2$$

$$f(1.2) \approx \frac{1}{2}(1.2-1) - \frac{1}{2 \cdot 2^2}(1.2-1)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(1.2-1)^3 = 0.095\hat{3}$$

El error cometido, sería

$$|R_{n=3}(x)| = \frac{|-3!|}{4!} (x-1)^4 \quad \text{con } c \in [1,x]$$



FÓRMULA DE TAYLOR

$$|R_{n=3}(1.2)| \leq \max_{c \in [1, 1.2]} \left| \frac{-1}{4(c+1)^4} (1.2-1)^4 \right| = \frac{0.2^4}{4(c+1)^4}, \text{ para un cierto valor de } c, 1 < c < 1.2$$

Una cota del error podría ser

$$Error = |R_{n=3}(1.2)| \leq \max_{c \in [1, 1.2]} \left| \frac{(-1)^4}{(c+1)^4 4} \right| (1.2-1)^4 \leq \frac{1}{(1+1)^4 4} 0.2^4 \leq \frac{0.2^4}{4 \cdot 2^4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

d) El polinomio de grado 3 no es suficiente para obtener la aproximación con error menor que 10^{-6} .

$$Error(x=1.2) = |R_{n=4}(1.2)| \leq \max_{c \in [1, 1.2]} \left| \frac{(-1)^5}{(c+1)^5 5} \right| (1.2-1)^5 \leq \frac{1}{(1+1)^5 5} 0.2^5 \leq \frac{0.2^5}{5 \cdot 2^5} = 2 \cdot 10^{-6} \not< 10^{-6}$$

$$Error(1.2) = |R_{n=5}(1.2)| \leq \max_{c \in [1, 1.2]} \left| \frac{0.2^6}{6(1+c)^6} \right| \leq \frac{0.2^6}{6 \cdot 2^6} = 1.6 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$$

Es suficiente el polinomio de **grado 5** para obtener un error menor que 10^{-6} .



FÓRMULA DE TAYLOR



88.- Dada la función $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$.

a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 1 de la función $f(x)$.

b) Utilizar el polinomio del apartado a) para calcular un valor aproximado de $f(18^\circ)$ Nota: Utilizar $\pi = 3.1416$

Solución:

a) Calculamos los valores de $f(0)$ y $f'(0)$ para sustituir en la fórmula de Maclaurin

$$T_{n=1}[f(x), a=0] = f(0) + f'(0) \cdot x.$$

$$f(0) = \text{sen}(0) + \text{cos}(0) = 1; \quad f'(x) = \text{cos } x - \text{sen } x \Rightarrow f'(0) = 1.$$

por tanto

$$P(x) = T_{n=1}[\text{sen } x + \text{cos } x, a=0] = 1 + x$$

$$\text{b) } f(18^\circ) = f\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx P\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 + \frac{\pi}{10} = \frac{13.1416}{10} = 1.31416$$

89.- Dada la función $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ se pide:

a) Escribir la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ para $n = 3$ y $a=1$.

b) Hallar el valor aproximado de $e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$, con el polinomio obtenido en a)

c) Hallar una cota del error cometido en b).

Solución:

a) Fórmula de Taylor de $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$f(x) = T_{n=3}[f(x), a = 1] + R_{n=3}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x - 1) + \frac{f''(1)}{2!} (x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} (x - 1)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (x - 1)^4, \text{ con } a = 1 < c < x \text{ ó bien } x < c < 1 = a$$

Calculamos el polinomio de grado 3 en $a = 1$ y el resto de Lagrange correspondiente

n	f ⁿ (x)	f ⁿ (1)
0	$e^{\sqrt{x}}$	e
1	$\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$	e/2
2	$\frac{\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x^3}} e^{\sqrt{x}}$	0
3	$\frac{x-3\sqrt{x}+3}{8\sqrt{x^5}} e^{\sqrt{x}}$	e/8
4	$\frac{(x^{3/2}-6x+15\sqrt{x}-15)}{16\sqrt{x^7}} e^{\sqrt{x}}$	

$$T_{n=3}[f(x), a = 1] = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} = e \frac{(x^3 - 3x^2 + 27x + 23)}{48};$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (x-1)^4 = e^{\sqrt{c}} \frac{(c^{3/2} - 6c + 15\sqrt{c} - 15)}{16c^{7/2}} \frac{(x-1)^4}{4!}$$

La fórmula de Taylor pedida es:

$$f(x) = e \frac{(x^3 - 3x^2 + 27x + 23)}{48} + e^{\sqrt{c}} \frac{(c^{3/2} - 6c + 15\sqrt{c} - 15)}{16c^{7/2}} \frac{(x-1)^4}{4!} \text{ con } 1 < c < x \text{ ó } x < c < 1$$

b) Valor aproximado de $e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$, para ello, sustituimos $x = \frac{1}{2}$ en el polinomio

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = e \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 27\left(\frac{1}{2}\right) + 23\right)}{48} = \underline{\underline{2.031632512}}$$

c) Cálculo de una cota superior del error cometido:

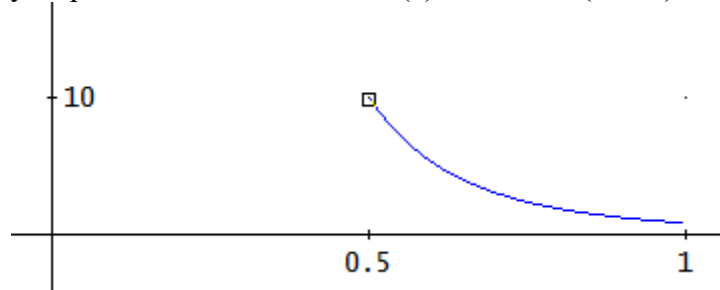


FÓRMULA DE TAYLOR



$$E(x) = |R_{n=3}(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{(x-1)^4}{4!} \right| \leq \max_{(a,x)} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(x-1)^4}{4!} \right| = \max_{x=\frac{1}{2}; \frac{1}{2} < c < 1} e^{\sqrt{c}} \frac{\left(c^{\frac{3}{2}} - 6c + 15\sqrt{c} - 15 \right)}{16c^{\frac{7}{2}}} \left| \frac{\left(\frac{1}{2} - 1 \right)^4}{4!} \right|$$

Hallamos un valor mayor que la derivada cuarta de $f(c)$ cuando $c \in (1/2, 1)$.



Observamos que $f^{(4)}(c)$ es decreciente, por tanto, una cota se obtiene para $c=1/2$. Así pues, una cota del error es:

$$E\left(\frac{1}{2}\right) \leq \max_{\frac{1}{2} < c < 1} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^4}{4!} \right| = \left| f^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \left| \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^4}{4!} \right| < 11 \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^4}{4!} \approx \underline{0.0286 < 0.03}, \text{ es decir,}$$

menor que 3 centésimas.

90.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ se pide:

a) Escribir la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ para $n = 3$ y $a=1$.

b) Hallar el valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, con el polinomio obtenido en a)

c) Hallar una cota del error cometido en b).

Solución:

a) La fórmula de Taylor de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $n=3$ y $a=1$ es:

$$f(x) = T_{n=3}(f(x), a=1) + R_{n=3}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4$$

$1 < c < x$ ó $x < c < 1$

Calculamos el polinomio de grado 3 en $a = 1$ y el resto de Lagrange correspondiente

n	f ⁿ (x)	f ⁿ (1)
0	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	1
1	$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$	-1/2
2	$\frac{3}{4\sqrt{x^5}}$	3/4
3	$-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$	-15/8
4	$\frac{105}{16\sqrt{x^9}}$	

$$T_{n=3}[f(x), a=1] = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{4} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{15}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} = \frac{35 - 35x + 21x^2 - 5x^3}{16};$$

$$R_{n=3}(x) = f^{(4)}(c) \frac{(x-1)^4}{4!} = \frac{105}{16} c^{-9/2} \frac{(x-1)^4}{4!}$$

La fórmula de Taylor pedida es:

$$f(x) = \frac{35 - 35x + 21x^2 - 5x^3}{16} + \frac{105}{16} c^{-9/2} \frac{(x-1)^4}{4!} \quad \text{con } 1 < c < x \text{ ó } x < c < 1$$

b) Valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, para ello, sustituimos $x = 2$ en el polinomio

$$P_3(2) = \frac{35 - 35 \cdot 2 + 21 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2^3}{16} = \mathbf{0.5625}$$

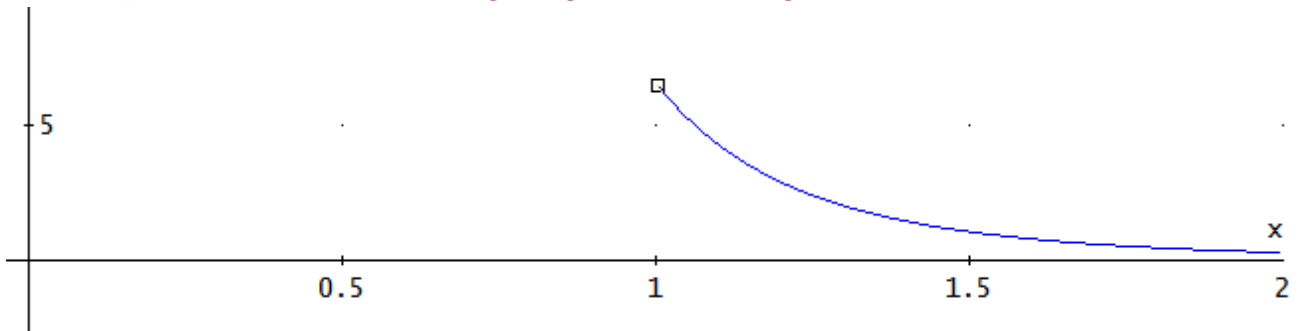
c) Cálculo de una cota superior del error cometido:

$$E(x) = |R_3(x)| = \left| f^{(4)}(c) \frac{(x-1)^4}{4!} \right| \leq \max_{(a,x)} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(x-1)^4}{4!} \right| = \max_{x=2; 1 < c < 2} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(2-1)^4}{4!} \right|$$

Hallamos un valor mayor que la derivada cuarta de $f(c)$ cuando $c \in (1, 2)$.



FÓRMULA DE TAYLOR



Observamos que $f^{(4)}(c)$ es decreciente, por tanto, una cota se obtiene para $c=1$.

Así pues, una cota del error es:

$$E(2) \leq \max_{\frac{1}{2} < c < 1} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(2-1)^4}{4!} \right| = |f^{(4)}(1)| \left| \frac{(2-1)^4}{4!} \right| < 7 \frac{(2-1)^4}{4!} \approx \mathbf{0.2916 < 0.3}, \text{ es decir, menor que 3}$$

décimas.



FÓRMULA DE TAYLOR



91.- La medida del lado L , de un cristal cuadrado es de 28 cm con una cota de error de 0.5 cm.

a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el área del cristal.

b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de L , para que el error cometido al calcular el área no supere el 1%.

Solución:

a) $S = L^2$; $L = 28$ cm; $dL \leq 0.5$

$$\Delta S \approx dS = 2 \cdot L \cdot dL \leq 2 \cdot 28 \cdot (\pm 0.5) \approx \pm 28 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\pm 28}{28^2} \approx \pm 0.036 \Rightarrow \text{El error porcentual al calcular el área del cristal es } \mathbf{3.6\%}$$

b)

$$\frac{\Delta S}{S} \leq 0.01 \Rightarrow \Delta S \leq 28^2 \cdot 0.01 = 7.84$$

$$\Delta S \approx dS = S'(L) \cdot dL = 2 \cdot L \cdot dL = 2 \cdot 28 \cdot dL \leq 7.84 \Rightarrow dL \leq 0.14 \text{ cm}$$

$$\frac{dL}{L} \leq \frac{0.14}{28} \approx 0.005 \Rightarrow \text{El error porcentual al medir el lado } \leq 0.5\%$$

El error porcentual al medir el lado es $\leq 0.5\%$



FÓRMULA DE TAYLOR



92.- La medida del lado L de un cubo o exaedro regular ha sido 14 cm con una cota de error de 0.25 cm.

a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error porcentual posible cometido al calcular el volumen del cubo.

b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de L para que el error cometido al calcular el volumen no supere el 1%.

Solución:

a) $V = L^3$, $L = 14$ cm, $dL \leq 0.25$
 $\Delta V \approx dV = 3 \cdot L^2 \cdot dL \leq 3 \cdot 14^2 \cdot (\pm 0.25) \approx \pm 147$ cm³.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pm 147}{14^3} \approx \pm 0.054 \Rightarrow \text{El error porcentual al calcular el área del cristal es } \mathbf{5.4\%}$$

b)

$$\frac{\Delta V}{V} \leq 0.01 \Rightarrow \Delta V \leq 14^3 \cdot 0.01 = 27.44$$

$$\Delta V \approx dV = V'(L) \cdot dL = 3 \cdot L^2 \cdot dL = 3 \cdot 14^2 \cdot dL \leq 27.44 \Rightarrow dL \leq 0.046 \text{ cm}$$

$$\frac{dL}{L} \leq \frac{0.046}{14} \leq 0.004 \Rightarrow \text{El error porcentual al medir el lado } \leq 0.4\%$$

El error porcentual al medir el lado es $\leq 0.4\%$



FÓRMULA DE TAYLOR



93.- La medida del área de una pieza circular ha sido 25 cm^2 con una cota de error de 0.3 cm^2 .

- a) Aproximar, mediante diferenciales, el porcentaje del error propagado (cota) cuando calculamos el radio de la pieza.
 b) Estimar el máximo error porcentual admisible en la medida del área para que error cometido al calcular el radio no supere el 1%

Solución:

a) $S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, $S = 25 \text{ cm}^2$, $dS \leq 0.3$

$$\Delta r \approx dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{S}} dS \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{25}} (\pm 0.3) \approx 0.01693 \text{ cm.}$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\pm 0.01693}{2.82095} \approx \pm 0.006 \Rightarrow \text{El error porcentual al calcular el área del cristal es } \mathbf{0.6\%}$$

b)

$$\frac{\Delta S}{S} \leq 0.01 \Rightarrow \Delta S \leq 25 \cdot 0.01 = 0.25$$

$$\Delta S \approx dS = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = 2 \cdot 3.14 \cdot 2.82095 \cdot dr \leq 0.25 \Rightarrow dr \leq 0.0142 \text{ cm}$$

$$\frac{dr}{r} \leq \frac{0.0142}{2.82095} \leq 0.005 \Rightarrow$$

El error porcentual al medir el radio es $\leq 0.5\%$

OTRA FORMA:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, S = 25 \text{ cm}^2, dS \leq 0.3$$

$$\Delta r \approx dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{S}} dS$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{S}} dS}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{S}}} = \frac{1}{2} \frac{dS}{S} = \frac{1}{2} \frac{0.3}{25} \approx \pm 0.006 \Rightarrow \text{El error porcentual al calcular el área del}$$

cristal es **0.6%**

b) $\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{S} \leq \frac{1}{2} \cdot 0.01 = 0.005$

El error porcentual al medir el radio es $\leq 0.5\%$



FÓRMULA DE TAYLOR



94.- Calcular con 3 cifras decimales (exactas) las siguientes integrales utilizando polinomios de Maclaurin de la función integrando como infinitésimos equivalentes e indica el menor grado del polinomio necesario

$$\int_0^{0,1} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx ;$$

$$\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx$$

Solución:

El proceso que utilizaremos es hallar polinomios sucesivos $T_n \left[\frac{\text{sen}x}{x}, 0 \right]$ como integrando y calculando la integral correspondiente hasta que la tercera cifra decimal quede constante.

Observamos los sucesivos polinomios de Maclaurin que son pares por ser $\frac{\text{sen}x}{x}$ una función par.

$$\int_0^{0,1} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx \approx \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) dx = \boxed{0.099}9444444$$

$$\int_0^{0,1} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx \approx \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) dx = \boxed{0.099}94446111$$

$$\int_0^{0,1} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx \approx \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} \right) dx = \boxed{0.099}94446110$$

Como vemos basta usar el polinomio de grado 2 para obtener la aproximación pedida.

Se utiliza el mismo procedimiento para la función e^{-x^2} , casualmente también es par, y se obtiene:

$$\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \approx \int_0^{0,1} (1 - x^2) dx = \boxed{0.099}66666666$$

$$\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \approx \int_0^{0,1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \boxed{0.099}66766666$$

$$\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \approx \int_0^{0,1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} \right) dx = \boxed{0.099}66766428$$

También basta usar el polinomio de grado 2 para obtener la aproximación pedida.

95.- La clotoide es una curva (plana) de enlace de vías de comunicación cuyas

ecuaciones paramétricas son
$$\begin{cases} x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2} ds \\ y = \int_0^s \operatorname{sen} \frac{s^2}{2a^2} ds \end{cases}, \text{ donde } a \text{ es el parámetro de la}$$

clotoide y s es la longitud del arco.

Las integrales que las definen no admiten primitiva por lo que se aproximan utilizando polinomios de Maclaurin para las funciones integrando. Se pide obtener unas ecuaciones para $a=1/2$ con cuatro términos no nulos.

Solución

$$\text{Para } a=1/2, \begin{cases} x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2} ds = \int_0^s \cos(2s^2) ds \\ y = \int_0^s \operatorname{sen} \frac{s^2}{2a^2} ds = \int_0^s \operatorname{sen}(2s^2) ds \end{cases},$$

Como sabemos la función coseno es par y la función seno es impar por lo que sus polinomios de Maclaurin van a tener términos nulos, utilizando Derive observamos que para conseguir 4 términos no nulos hemos de utilizar polinomios de grado 12 y 14 respectivamente:

$$T_{n=12}[\cos(2s^2), 0] = 1 - 2s^4 + \frac{2s^8}{3} - \frac{4s^{12}}{45} \quad \text{y} \quad T_{n=14}[\operatorname{sen}(2s^2), 0] = 2s^2 - \frac{4s^6}{3} + \frac{4s^{10}}{15} - \frac{8s^{14}}{315}$$

Sustituyendo en las integrales:

$$\begin{cases} x = \int_0^s \cos(2s^2) ds \approx \int_0^s \left(1 - 2s^4 + \frac{2s^8}{3} - \frac{4s^{12}}{45} \right) ds = \boxed{s - \frac{2s^5}{5} + \frac{2s^9}{27} - \frac{4s^{13}}{585}} \\ y = \int_0^s \operatorname{sen}(2s^2) ds \approx \int_0^s \left(2s^2 - \frac{4s^6}{3} + \frac{4s^{10}}{15} - \frac{8s^{14}}{315} \right) ds = \boxed{\frac{2s^3}{3} - \frac{4s^7}{21} + \frac{4s^{11}}{165} - \frac{8s^{15}}{4725}} \end{cases}$$

Hemos obtenido unas ecuaciones paramétricas de la clotoide con una aproximación adecuada para la construcción de curvas en vías de comunicación.

96.- Construido un depósito esférico para almacenamiento de líquidos, se le pide a un topógrafo que estime con la mayor precisión posible el volumen que puede contener. El topógrafo mide el radio R de la esfera que resulta ser de 11,35 m. con una cota de error estimado $dR < 20$ cm.

a) Aplique el concepto de diferencial para aproximar el error propagado (porcentual) cometido al calcular el volumen V del depósito.

b) Estimar el máximo error en la medida de R , para que el error propagado al calcular el volumen no supere el 3%.

Solución:

- a) $R=11,35 \pm 0.20$, es decir, se toma como valor aproximado $R = 11.35$ m. y la cota de error, $|dR| < 0.20$ m, nos indica que el verdadero valor de R está entre 11.15 y 11.55 m.

Este error de R se propaga al calcular el volumen del depósito:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 11.35^3 \approx 6124.578336 \text{ m}^3.$$

Para obtener una cota del error ΔV se usa la diferencial $\Delta V \approx dV$

$$dV = V'(R) dR = \frac{4}{3} \pi 3R^2 dR = 4\pi R^2 dR$$

El error propagado porcentual es :

$$e_{pore} \approx 100 \frac{dV}{V} = 100 \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 100 \frac{3dR}{R} = 100 \frac{3 \cdot 0.2}{11.35} \approx 5.286 < 5.3\%$$

Luego el error propagado en porcentaje es **<5,3%**

- b) Se pide estimar dR para que impone la condición de que $e_{pore} \approx 100 \frac{dV}{V} < 3$, luego:

$$100 \frac{dV}{V} = 100 \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 100 \frac{3dR}{R} < 3 \Rightarrow dR < \frac{3R}{3 \cdot 100} = \frac{11.35}{100} = 0.1135 < 0.12$$

Por lo tanto, la cota de error al medir R no debe superar los 12 cm, es decir $|dR| < \mathbf{12 \text{ cm}}$

97.- Para el control de calidad de una pieza cilíndrica de un cohete, con la medida de la altura igual al diámetro de la base, se le pide a un topógrafo que mida el radio R de la base con alta precisión y el resultado es de 6,14m. con una cota de error $dR < 6$ cm.

a) Usar diferenciales para aproximar el máximo error propagado cometido, en términos porcentuales, al calcular el volumen del cilindro.

b) Estimar el máximo error porcentual posible en la medida de R para que el error cometido al calcular el volumen no supere el 1%.

Solución:

a) $R=6,14 \pm 0.06$, es decir, se toma como valor aproximado $R = 6.14$ m. y la cota de error, $dR=0.06$ m, nos indica que el verdadero valor de R está entre 6.08 y 6.2 m.

Este error de R se propaga al calcular el volumen del depósito:

$$V = \pi R^2 2R = 2\pi R^3 = 2\pi 6.14^3 \approx 1454.403737\text{m}^3.$$

Para obtener una cota del error ΔV se usa la diferencial $\Delta V \approx dV$

$$dV = V'(R) dR = 2\pi 3R^2 dR = 6\pi R^2 dR$$

El error propagado porcentual es:

$$e_{porc} \approx 100 \frac{dV}{V} = 100 \frac{6\pi R^2 dR}{2\pi R^3} = 100 \frac{3dR}{R} = 100 \frac{3 \cdot 0.06}{6.14} \approx 2.93159609 < 3\%,$$

Luego el error propagado en porcentaje es **<3%**

b) Se pide estimar $100 \frac{dR}{R}$ con la condición de que $e_{porc} \approx 100 \frac{dV}{V} < 3$, luego:

$$100 \frac{dV}{V} = 100 \frac{3dR}{R} < 3 \Rightarrow 100 \frac{dR}{R} < \frac{1}{3} = 0.3333 < 0.34\%$$

Por lo tanto, la cota de error al medir R no debe superar **0.34%** de la medida de R .

98.- Dada la función $f(x) = e^x + 4\arctg(x)$. Se pide:

- Si es posible, hallar el polinomio de Maclaurin de f de grado 3.
- Calcular de manera aproximada el valor de $e + \pi$ utilizando el polinomio anterior.
- Calcular una cota del error cometido en la aproximación del apartado anterior.
- ¿De qué grado deber ser el polinomio de Taylor en $a = 0$ utilizado para calcular $f(0,1)$ y poder asegurar que el error sea menor de una cienmilésima?

Solución:

- a) Calculamos el polinomio de grado 3 en $a=0$ y el resto de Lagrange correspondiente:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$e^x + 4\arctg(x)$	1
1	$e^x + 4 \frac{1}{x^2+1}$	5
2	$e^x - 4 \frac{2x}{(x^2+1)^2}$	1
3	$e^x + 4 \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$	-7
4	$e^x - \frac{96x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$	

Polinomio de Maclaurin:

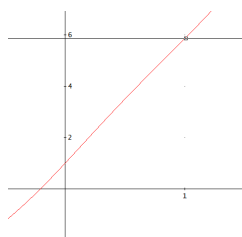
$$T_{n=3}[f(x), a=0] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + 5x + 1 \frac{x^2}{2} - 7 \frac{x^3}{3!}$$

Resto de Lagrange:

$$R_{n=3}(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \left(e^c - \frac{96c(c^2-1)}{(c^2+1)^4} \right) \frac{x^4}{4!}$$

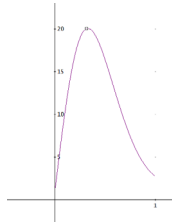
b)

$$f(x) = e^x + 4\arctg(x) = e + \pi \Rightarrow x = 1$$



$$f(1) \approx 1 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 - 7 \frac{1^3}{3!} = \frac{16}{3} \approx 5,3$$

c) Observando la derivada cuarta en valor absoluto: $|f^{(4)}(c)| = \left| e^c - \frac{96c(c^2-1)}{(c^2+1)^4} \right|$



El máximo se alcanza en un punto intermedio y su valor es inferior a 21:
Luego una cota del error puede ser:

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ x=1 \\ n=3}} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(1-0)^4}{4!} \right| \leq 21 \frac{1^4}{4!} =$$

= **0,875**

$f(1) = e + \pi \approx 5,333 \pm 0,875$

d) Si consideremos $n=3$: $R_{n=3}(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 = \left(e^c - \frac{96c(c^2-1)}{(c^2+1)^4} \right) \frac{x^4}{4!}$

Observando la derivada cuarta en valor absoluto: $|f^{(4)}(c)| = \left| e^c - \frac{96c(c^2-1)}{(c^2+1)^4} \right|$, pero ahora

$0 < c < 0,1$ resulta monótona creciente y el máximo se alcanza en $c=0,1$ y su valor es inferior a 11:

Luego una cota del error puede ser:

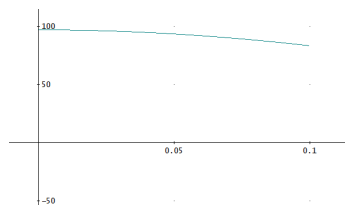
$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ x=0,1 \\ n=3}} |f^{(4)}(c)| \left| \frac{(0,1-0)^4}{4!} \right| \leq 11 \frac{0,1^4}{4!} =$$

= $4,583333 \cdot 10^{-5}$

Si consideremos $n=4$: $R_{n=4}(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5 = \left(e^c + \frac{96(5c^4-10c^2+1)}{(c^2+1)^5} \right) \frac{x^5}{5!}$

Observando la derivada quinta en valor absoluto: $|f^{(5)}(c)| = \left| e^c + \frac{96(5c^4-10c^2+1)}{(c^2+1)^5} \right|$, pero

ahora $0 < c < 0,1$ resulta monótona decreciente y el máximo se alcanza en $c=0$ y su valor es inferior a 100:



Luego una cota del error puede ser:



FÓRMULA DE TAYLOR



$$E(x) = |R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \max_{[a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \max_{\substack{a=0 \\ x=0,1 \\ n=4}} |f^{(5)}(c)| \left| \frac{(0,1-0)^5}{5!} \right| \leq 100 \frac{0,1^5}{5!} =$$

$= 8,3333 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$. La respuesta es **n=4**.



FÓRMULA DE TAYLOR



99.- Un balón se infla de tal forma que su volumen crece a razón $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Hallar la variación del radio $r = 10 \text{ cm}$.

Solución:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi 10^2 \frac{dr}{dt} = 100 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi} \approx 0,07957747154 \text{ cm/s}$$

Polinomio de Maclaurin de grado n de f

Dada una función $y=f(x)$ con derivadas hasta un cierto orden n en un punto a , se denomina **polinomio de Taylor de grado n de f en a**:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Para el valor concreto de $a=0$ el polinomio de Taylor se dice **Polinomio de Maclaurin**:

$$T_n[f(x), 0] = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$



Acotación del error

$$E(x) = |f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \max_{c \in [a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq k \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Podemos aproximar una función, $f(x)$, que cumpla el teorema de Taylor, por un polinomio $P(x)$ en un entorno de $x=a$ con la precisión deseada sin más que tomar n suficientemente grande ya que para cada x fijo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.



Función impar

Función, que a valores opuestos de la variable, hace corresponder valores también opuestos. Su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{simétrica respecto el eje OY (Función par)} \\ -f(x) & \text{simétrica respecto el origen O (Función impar)} \end{cases}$$

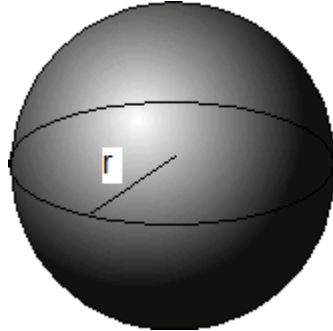
Función par

Función, que a valores opuestos de la variable, hace corresponder los mismos valores. Su gráfica es simétrica respecto el eje de ordenadas.

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{simétrica respecto el eje OY (Función par)} \\ -f(x) & \text{simétrica respecto el origen O (Función impar)} \end{cases}$$

Esfera

Esfera: sólido terminado por una superficie curva cuyos puntos equidistan todos de otro interior llamado centro.



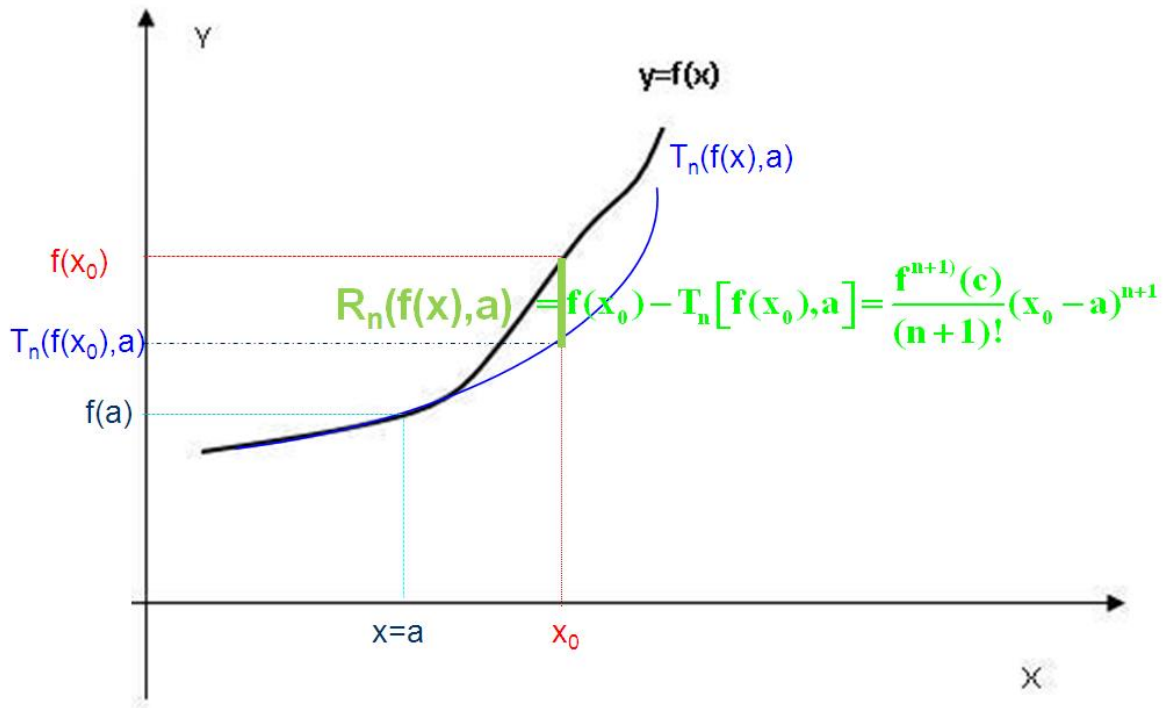
$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Resto de orden n de f(x) en a

Sea $f(x)$ una función para la cual existe el Polinomio de Taylor de orden n en el punto a , se define **resto de orden n de $f(x)$ en a** :

$$R_n[f(x), a] = f(x) - T_n[f(x), a] = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \text{ con } a < c < x \text{ ó } x < a < c \text{ expresión que se conoce como el } \textbf{resto de Lagrange o término complementario}.$$



VÍDEO EXPLICATIVO



Clotoide

La **clotoide** o **espiral de Cornu** o **espiral de Euler** o **espiral de Fresnel**

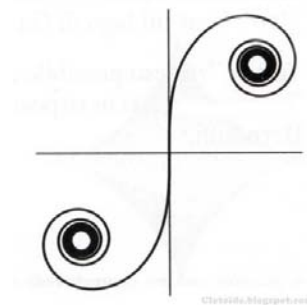
Es una curva plana en forma de espiral doble, con simetría central cuyo radio de curvatura disminuye de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida:

$$\rho \cdot s = a^2$$

ρ es el radio de la curvatura;

s longitud de la curva o distancia recorrida

a parámetro de la **clotoide**



Ecuaciones paramétricas de la **espiral de Cornu**

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \text{sen}^2(t^2) + \text{cos}^2(t^2) = 1$$

que nos lleva a unas primitivas desconocidas:

Integrales de Fresnel

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds$$

$$y(t) = \int_0^t \text{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds$$

"Cloto era una de las tres Parcas que hilan el destino de los hombres"

Diferencial

- **Diferencial de una función f en un punto a** es la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} df(a) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(a) \cdot x \end{aligned} \quad \text{siendo } f \text{ derivable en } a.$$

Suele denotarse dx a la variable de la aplicación lineal diferencial. Será, por tanto, una función de dos variables a y dx .

$$df(a)(dx) = df(a, dx) = f'(a)dx$$

- Se dice que la función $z=f(x,y)$ es **diferenciable** en el punto $P_0(x_0, y_0)$ si y solo si su incremento total en dicho punto (al pasar del punto P_0 a P) se puede escribir en la forma :

$$\Delta z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + O(\vec{v})$$

siendo $\vec{v} = \vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ y $O(\vec{v})$ un infinitésimo de orden mayor que $|\vec{v}|$

Se llama **diferencial total**, o simplemente **diferencial**, de una función $z=f(x,y)$ y se designa dz , o bien, df a la expresión.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \vec{\nabla} f \cdot (dx, dy)$$

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma $x=x(t)$, $y=y(t)$ donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

En el **plano**: siendo $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector director.

$$\text{Ecuaciones paramétricas de la recta: } \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

En el **espacio**: Siendo $P=(p_1, p_2, p_3)$ un punto cualquiera y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector director de la recta.

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$$

Fórmula de Taylor

Sea $f(x)$ una función derivable hasta el orden $n+1$, con derivadas continuas hasta el orden n en un entorno del punto a , entonces, existe $c \in (a, x)$ tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con $a < c < x$ ó bien $x < c < a$

Fórmula de Maclaurin

Sea $f(x)$ una función derivable hasta el orden $n+1$, con derivadas continuas hasta el orden n en un entorno del punto $a=0$, entonces, existe $c \in (0, x)$ tal que:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{con } a < c < x \text{ ó bien } x < c < a$$

Si $a=0$ en la fórmula de Taylor se obtiene la **fórmula de Maclaurin**:

