



Integración aproximada

- 1.- Para proceder a pintarlo, se necesita conocer las medidas del techo de cierto edificio singular. Dicho techo tiene forma geométrica de embudo invertido, similar a la de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ alrededor del eje de ordenadas OY, $0 < y < 1$. Calcular de forma aproximada mediante el **método de los trapecios**, $n = 25$, el área de la mencionada y una estimación del error cometido.

Solución

- 2.- Hallar de forma aproximada (**Simpson**, $n = 14$) la **longitud** del arco de la curva en **polares** $r = \cos \frac{\alpha}{2}$ para $0 \leq \alpha \leq \pi$. Acotar el error cometido en dicha aproximación.

Hallar n para que el error fuera menor que una milésima.

Solución

- 3.- a) Calcular de forma aproximada (**trapecios**, con $n = 20$) la distancia recorrida, en la primera hora por un móvil que evoluciona en una superficie plana describiendo, a velocidad constante, la curva dada por las ecuaciones

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, y(t) = t + 1, \text{ donde } t \text{ es el tiempo en horas.}$$

b) Acota el error cometido en la aproximación anterior y corrige el resultado del apartado a) dando sólo las cifras decimales exactas.

c) ¿Qué valor para n habría que tomar para que el error cometido fuera menor que una diezmilésima?

Solución

- 4.- Los economistas utilizan una distribución acumulativa denominada curva de Lorenz para medir la distribución de la renta entre las familias de un determinado país. Una de estas curvas es por ejemplo la función $h(x) = \frac{5x^3}{4+x^2}$.

a) Utilizar la regla de **Simpson** con $n = 60$ para estimar el coeficiente de desigualdad que viene dado por $C = \int_0^1 2(x - h(x))dx$

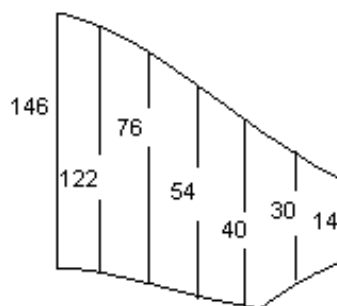
b) Hallar una cota del error cometido en la aproximación anterior.

Solución

- 5.- Una ciudad desea drenar y rellenar el pequeño pantano mostrado en la figura:

El pantano tiene una profundidad media de 5 metros. ¿Cuántos metros cúbicos de basura se requerirán para llenar esa área después de drenar el pantano?

(**trapecios**, $n = 6$)



Espaciamiento horizontal 20 metros

Solución

- 6.- Se supone que el cociente intelectual (CI) calculado con los test de David Wechsler sigue una **distribución normal** $N(100, 15)$.

a) Hallar aproximadamente (**Simpson**, $n = 20$) el porcentaje de superdotados ($X > 130$) en la población española de 19 años que a fecha de octubre pasado era 471. 895.

b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior.

Integración aproximada

c) ¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-7} al hallar aproximadamente (**Simpson**, $n = 20$) la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 2?

Solución

7.- Se quiere construir un techo ondulado comprimiendo una lámina de aluminio plana. Se pretende que cada onda tenga una altura de 5 cm sobre la línea central y un período de 6π cm. Calcular la **longitud** de la lámina de aluminio necesaria para un metro de tejado ondulado con un error menor que 1 cm. (Utilizar **trapecios**)

Solución

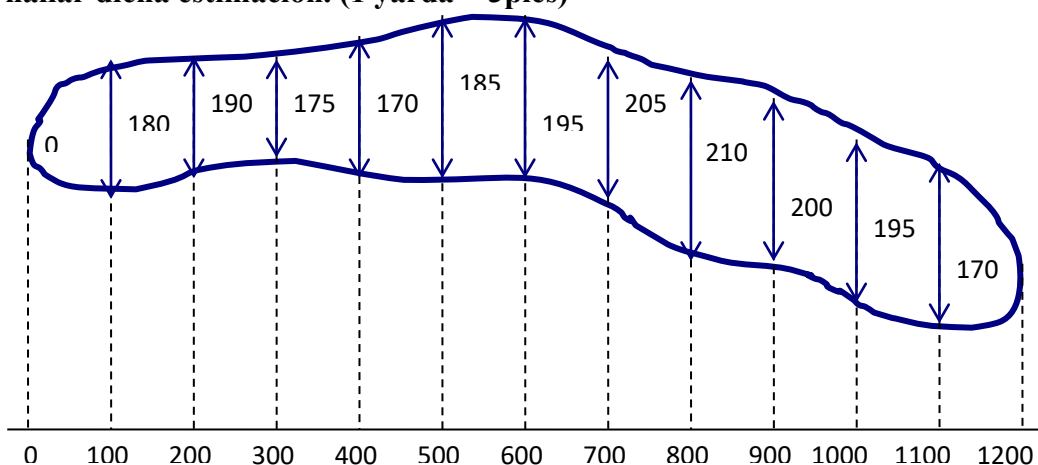
8.- Con el fin de averiguar el modelo de motor adecuado, una empresa desea conocer el trabajo necesario para mover linealmente 5m un objeto mediante una prensa. La fuerza F requerida es: $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$, donde F se mide en kilogramos y la posición x en metros. Se pide:

a) Aproximar, utilizando la regla de **Simpson** con $n = 12$, el trabajo W (en kilogramos-metro) efectuado en un ciclo, que viene dado por $W = \int_0^5 F(x) dx$.

b) Estudiar si se puede hallar una cota del error con la fórmula dada en teoría para ello.

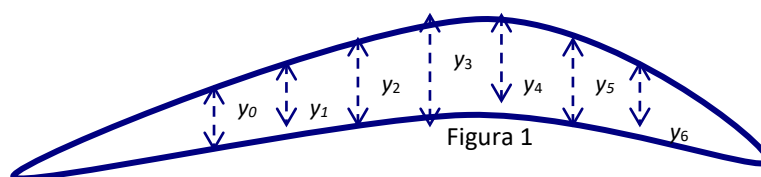
Solución

9.- La anchura, en pies, en puntos igualmente espaciados a lo largo de la calle de un hoyo de un campo de golf viene dada en la figura. La dirección desea estimar el número de yardas cuadradas de la calle como base para decidir cuánto tiempo le costaría cortar el césped a un encargado del mantenimiento del campo. Usar la regla de **Simpson** para hallar dicha estimación. (1 yarda = 3pies)



Solución

10.- El diseño de un nuevo tipo de aeroplano requiere un tanque de gasolina de sección transversal constante en cada ala. En la figura 1 se muestra un dibujo a escala de una sección transversal. El tanque debe cargar, aproximadamente, 3000 kg de gasolina cuya densidad es $0,68\text{kg/dm}^3$. Estimar la **longitud** del tanque usando la regla de **Simpson**.



- $y_0 = 4,6 \text{ dm}$
- $y_1 = 4,9 \text{ dm}$
- $y_2 = 5,5 \text{ dm}$
- $y_3 = 5,8 \text{ dm}$
- $y_4 = 6,1 \text{ dm}$
- $y_5 = 6,1 \text{ dm}$
- $y_6 = 6,4 \text{ dm}$



Integración aproximada

El espaciamiento horizontal es $h = 3$ dm. *Recuérdese que $d = \frac{M}{V}$*

Solución

- 11.- a) Hallar de forma aproximada, usando la regla de **Simpson** con $n = 30$, la **longitud** de la órbita de Marte ($a = 227,94 \times 10^6$ km, $e = 0,0934$) y acotar el error cometido en dicha aproximación ¿Es muy grande?
- b) Hallar el error relativo y expresarlo en ppm (partes por millón)

Solución

- 12.- Calcular aproximadamente la integral $\int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$ mediante el método de **Simpson**, tomando 50 subintervalos; acotar el error cometido en dicha aproximación; dar el valor de la integral con las cifras decimales exactas. ¿Cuántos subintervalos habría que tomar si se quiere que el error sea menor que una diezmilésima?

Solución

- 13.- Sea L la **longitud** del arco de la curva $y = \text{sen}x$ desde $x=0$ hasta $x=\pi$.
- a) Obtener una aproximación L_T de L usando la fórmula de los **trapezios** con un error menor que $0.015 u$.
- b) Obtener la aproximación L_S de L que proporciona la fórmula de **Simpson** con un número de subintervalos *igual* que los necesitados en el apartado anterior. Acotar el error cometido.

Solución

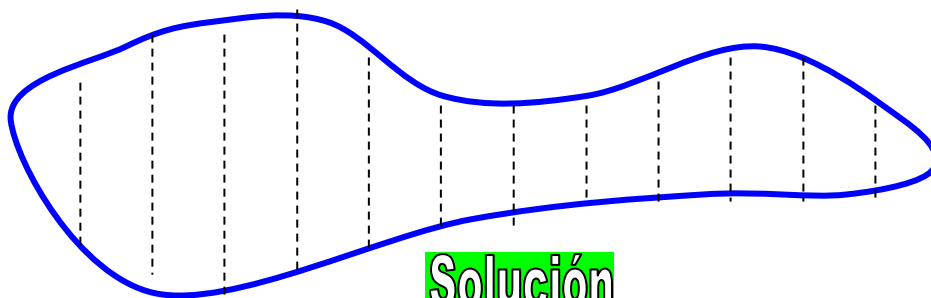
- 14.- a) Calcular de forma aproximada, utilizando la regla de **Simpson** para $n = 30$, el área barrida por un radio vector con origen en el Sol y extremo en el asteroide Apolo, cuya ecuación es $r = \frac{9}{9 + 5 \cos \alpha}$, desde $\alpha = 0$ hasta donde $\alpha = \pi/2$
- b) Estimar el error cometido en la aproximación anterior.

Solución

- 15.- En el diseño de un parque se ha previsto aprovechar una hondonada con una profundidad media de 2m para construir un lago como el de la figura. Tomadas las medidas perpendiculares a un eje horizontal, con un espaciamiento horizontal de 3m, se ha obtenido la siguiente tabla:

y	0	6	7	8	10	8	7	4	6	4	5	4	2	1	0
x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Usando la regla de **Simpson**, calcular el volumen aproximado de agua necesario para llenarlo,



Solución

- 16.- Los hilos de un tendido eléctrico, suspendidos cada dos postes, adoptan la forma de una catenaria de ecuación



Integración aproximada

$$y = 20 ch \frac{x}{20} \text{ donde } -20 \leq x \leq 20$$

dónde x e y se miden en metros. Calcular, de forma aproximada y con un error menor que 1mm, la **longitud** del cable suspendido entre dos postes utilizando la regla de **Simpson**.

Solución

- 17.-a) Calcular, utilizando el método de **Simpson** para $n = 20$, la **longitud** del menor arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ determinado por los puntos $(0,3)$ y $(2, \sqrt{5})$.
b) Acotar el error cometido en el cálculo de a).

Solución

- 18.- a) Hallar de forma aproximada (**Simpson** con 20 subintervalos) la **longitud** de la curva cuya ecuación en coordenadas **polares** es $r = 2 \operatorname{sen}(3\alpha)$.
b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior.

Solución

- 19.- Una variable aleatoria X sigue una **distribución normal** N de media 0 y varianza 2. Hallar aproximadamente (**Simpson**, $n = 30$) la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 2.
a) Acotar el error cometido en dicha aproximación y dar la probabilidad pedida con las cifras decimales exactas que permita el cálculo anterior.
b) ¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-8} ?

Solución

20.- Dada la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, hallar:

- a) Un valor aproximado del área encerrada por la función y el eje de abscisas en el intervalo $[1,3]$, usando el **método de los trapecios** con $n = 20$.
b) Una cota del error cometido. Dar el valor del área con las cifras decimales exactas que permite la aproximación anterior.

Solución

21.- Calcular de forma aproximada (método de **Simpson** con $n=20$) la **longitud** del arco correspondiente al intervalo $0 < x < \ln(10)$ de la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y acotar el error cometido en dicha aproximación

Solución

- 22.- Dentro de un parque municipal existe una zona adoquinada cuyo contorno se corresponde con la gráfica de la función en coordenadas polares $r = 4 + \cos(6\alpha)$.
a) Calcular de forma aproximada, utilizando el método de **Simpson** con $n = 60$, el **área** de dicha zona adoquinada.
b) Acotar el error cometido en el cálculo de a).
c) Si se quisiera obtener un resultado con un error menor que una milésima, ¿cuántos subintervalos habría que tomar?

Solución

23.- a) Calcular de forma aproximada (**trapecios**, con $n = 20$) la **longitud** de arco, correspondiente al intervalo $1 \leq t \leq 2$, de la curva con **ecuaciones paramétricas**



Integración aproximada

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, y(t) = t + 1$$

- b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior.
 c) ¿En cuántos subintervalos habría que dividir el intervalo $[1, 2]$ para que el error cometido fuera menor que una diezmilésima?

Solución

24.- La planta de un edificio singular tiene aproximadamente la forma de la siguiente

curva dada por sus **ecuaciones paramétricas**: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

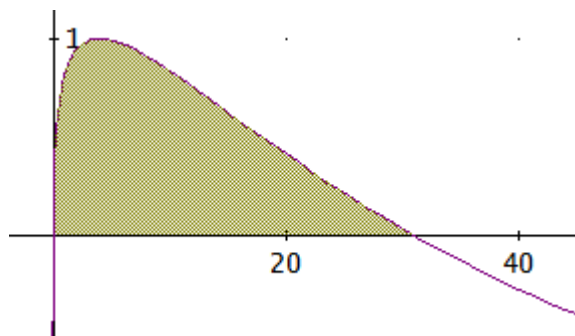
- a) Calcular de forma aproximada, utilizando el método de **Simpson** con $n = 40$, el **área** de la planta de dicho edificio.
 b) Acotar el error cometido en el cálculo de a).

c) Si se quisiera obtener un resultado con un error menor que $\frac{1}{10000}$, ¿cuántos subintervalos habría que tomar?

Solución

25.- a) Calcular aproximadamente (**Trapecios**, $n = 100$) el **área rayada** de la figura

limitada por un arco de la curva de **ecuaciones paramétricas** $\begin{cases} x = (t-1)^3 \\ y = \sin(t-1) \end{cases}$ y el eje OX^+ .



- b) Acotar el error cometido en el cálculo del apartado a).
 c) Si se quisiera obtener el **área** con un error menor que una milésima, ¿cuántos subintervalos habría que tomar?

Solución

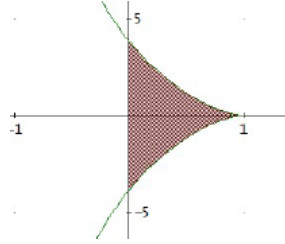
26.- Se quiere calcular el volumen de un balón de rugby obtenido mediante la rotación alrededor del eje OX de un arco de la **cicloide**.

- a) Calcular de forma aproximada el volumen de dicho balón, utilizando el método de **Simpson** con $n = 40$.
 b) Acotar el error cometido en el cálculo del apartado a).
 c) Si se quisiera obtener el **volumen** con un error menor que una diezmilésima, ¿cuántos subintervalos bastaría tomar?

Solución

27.- a) Utilizando el método de **Simpson** con 20 subintervalos, calcular de manera aproximada el **área** rayada de la figura,

Integración aproximada



limitada por los ejes coordenados y la curva de **ecuaciones paramétricas** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^3 \end{cases}$.

b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior y dar el valor del área con cifras decimales exactas. c) ¿Cuántos subintervalos serían necesarios para calcular el área con un error menor que 10^{-6} ?

Solución

28.- Queremos obtener un valor aproximado de $\ln 2$, sabiendo que $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

- Mediante la regla de los **Trapezios** ($n=6$). Calcular el error.
- Regla de **Simpson** ($n=6$). Calcular el error.
- ¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-7} ?

Solución

29.- Obtener el área correspondiente al logo del caramelo CHUPA CHUS, sabiendo que corresponde a la curva $r = \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right)$ entre 0 y 6π .

- Mediante la regla de los **trapezios** ($n=6$). Dar una cota del error.
- Regla de **Simpson** ($n=6$).

Solución



Integración aproximada

1.- Para proceder a pintarlo, se necesita conocer las medidas del techo de cierto edificio singular. Dicho techo tiene forma geométrica de embudo invertido, similar a la de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ alrededor del eje de ordenadas OY, $0 < y < 1$. Calcular de forma aproximada mediante el método de los trapecios, $n = 25$, el área de la mencionada y una estimación del error cometido.

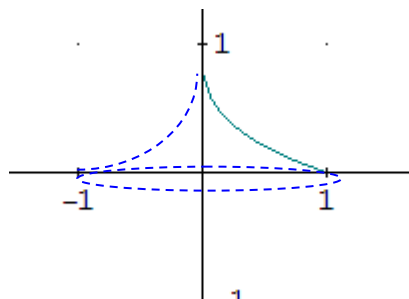
Solución:

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} \in [0,1] \Rightarrow x \in [0,1]$$

Como la curva gira alrededor del eje de ordenadas, despejamos x en función de y

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = (1-y)^3 \in [0,1]$$

$$x'(y) = -3(1-y)^2$$



Luego el área de la superficie de revolución generada viene dada por la integral:

$$S_{OY} = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1+(x')^2} dy = 2\pi \int_0^1 (1-y)^3 \sqrt{1+(-3(1-y)^2)^2} dy$$

Vamos a obtener el valor aproximado con la fórmula de los trapecios para $n = 25$. La función

$$f(y) = (1-y)^3 \sqrt{1+(-3(1-y)^2)^2}$$

El espaciamiento horizontal para $n = 25$ es $h = \frac{1-0}{25} = \frac{1}{25}$

Los puntos de la partición son de la forma $0+k\frac{1}{25}$, y los valores de la función integrando f

para estos puntos (que son los $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{25}$, que necesitamos en la fórmula de los trapecios) son:

$$f\left(k\frac{1}{25}\right) = \left(1-k\frac{1}{25}\right)^3 \sqrt{1+\left(-3\left(k\frac{1}{25}-1\right)^2\right)^2}$$

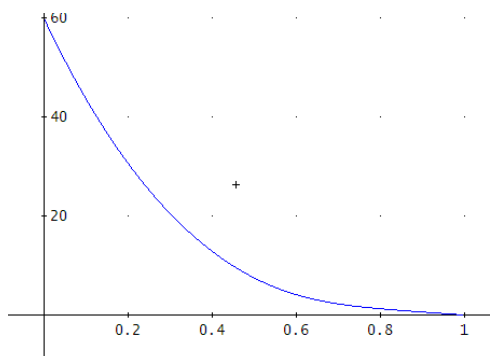
y aplicamos la fórmula de los trapecios para aproximar el valor de la integral:

$$S_{OY} = 2\pi \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \right) = 2\pi \frac{25}{2} \left(f(0) + f(25) + 2 \sum_{k=1}^{24} f(k) \right) \approx \mathbf{3.575834234 \text{ u}^2}$$

Estimación del error:

Buscamos el valor máximo, en $[0,1]$ de la segunda derivada (en valor absoluto) de la función integrando. Para ello derivamos dos veces, tomamos valor absoluto y representamos en $[0,1]$:

$$f''(x) = \frac{6(1-x)(270x^7 - 2160x^6 + 7560x^5 - 15120x^4 + 18945x^3 - 15300x^2 + 7830x - 2340)}{(9x^4 - 36x^3 + 54x^2 - 36x + 10)^{3/2}}$$



Observamos que la función derivada segunda en valor absoluto es estrictamente decreciente en $[0,1]$, luego el máximo se alcanza en 0 (el valor es aproximadamente $59.95678443 < 60$).

$$|E| \leq \frac{h^2}{12} (b-a)M < \left(\frac{1}{25}\right)^2 \frac{1}{12} (1-0)60 \approx \mathbf{0.008}$$

Integración aproximada

2.- Hallar de forma aproximada (Simpson, $n = 14$) la longitud del arco de la curva en polares $r = \cos \frac{\alpha}{2}$ para $0 \leq \alpha \leq \pi$. Acotar el error cometido en dicha aproximación. Hallar n para que el error fuera menor que una milésima.

Solución:

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\alpha = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \, d\alpha \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

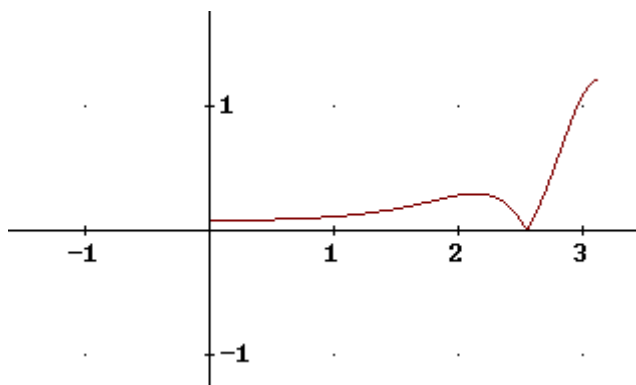
$$L = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3 \cdot 14} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^6 f\left((2k+1) \frac{\pi}{14} \right) + 2 \sum_{k=1}^6 f\left(2k \frac{\pi}{14} \right) + f(\pi) \right] \approx \mathbf{2.422112056}$$

Acotación del error

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(\alpha) \right| \mid a \leq \alpha \leq b \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{3\sqrt{2} \left(27\cos^4(\alpha) + 180\cos^3(\alpha) + 820\cos(\alpha) + 15(2\text{sen}^2(\alpha) + 51) \right)}{64(3\cos(\alpha) + 5)^{7/2}} \right| \mid 0 \leq \alpha \leq \pi \right\}$$



Cota del valor absoluto de la derivada cuarta de f en $[0, \pi]$: $M=1.3 > 1.21875$

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{\pi}{14}\right)^4}{180} (\pi - 0) 1.3 \approx \mathbf{5.753181403 \cdot 10^{-5}}$$

$$2.422112056 - 5.753181403 \cdot 10^{-5} < \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \, d\alpha < 2.422112056 + 5.753181403 \cdot 10^{-5}$$

$$\mathbf{2.422}054524 < \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \, d\alpha < \mathbf{2.422}169587$$

Una aproximación de la longitud buscada con las cifras exactas es: $\mathbf{2.422}$

Hallar n para que el error fuera menor que una milésima.

$$|R_n| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^4}{180} (\pi - 0) 1.3 < 10^{-3} \Rightarrow |n| > \frac{\sqrt[4]{585\pi^5}}{3} \approx 6.856540611$$

Luego, basta tomar $\mathbf{n = 8}$, ya que tiene que ser par.



Integración aproximada

3.- a) Calcular de forma aproximada (trapezios, con $n = 20$) la distancia recorrida, en la primera hora por un móvil que evoluciona en una superficie plana describiendo, a velocidad constante, la curva dada por las ecuaciones

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, y(t) = t + 1, \text{ donde } t \text{ es el tiempo en horas.}$$

b) Acota el error cometido en la aproximación anterior y corrige el resultado del apartado a) dando sólo las cifras decimales exactas.

c) ¿Qué valor para n habría que tomar para que el error cometido fuera menor que una diezmilésima?

Solución:

a) La distancia recorrida por el móvil en la primera hora es igual a la longitud del arco de la curva descrito para $0 \leq t \leq 1$, luego:

Luego la longitud del arco de curva entre 0 y 1 viene dada por la integral:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Las derivadas de las funciones x e y son:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow x'(t) = t^2$$

$$y(t) = t + 1 \Rightarrow y'(t) = 1$$

Para aplicar la fórmula de los trapezios para $n=20$, la función f es la función integrando $f(t) = \sqrt{t^4 + 1}$ y el espaciamiento horizontal es $h = \frac{1-0}{20} = \frac{1}{20}$. Los puntos (abscisas) de la partición

son de la forma $t = 0 + k \frac{1}{20} = k \frac{1}{20}$ y los valores de la función f que interesan (los $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{20}$, que necesitamos en la fórmula de los trapezios) son:

$$f\left(k \frac{1}{20}\right) = \sqrt{\left(k \frac{1}{20}\right)^4 + 1}.$$

y el valor aproximado de la integral por el método de los trapezios es:

$$L = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b) \right) = \frac{1/20}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{k=1}^{19} f\left(\frac{k}{20}\right) + f(20) \right) \approx \mathbf{1.089724041 \text{ u.}}$$

longitud.

b)

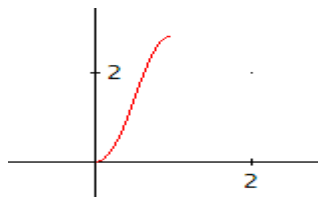
Buscamos el valor máximo, en $[0,1]$ de la segunda derivada (en valor absoluto) de la función integrando $\sqrt{t^4 + 1}$:

$$M = \max \left\{ \left| f''(t) \right| \mid a \leq t \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{2t^2(t^4 + 3)}{(t^2 + 1)^{3/2}} \right| \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

Observamos que la función es estrictamente creciente en $[0,1]$, luego el máximo se alcanza en $t=1$



Integración aproximada



Sustituyendo $t = 1$ en la expresión en valor absoluto se obtiene: $2,828427124 < 3$

Por comodidad hemos tomado 3 como cota, en consecuencia una estimación del error cometida en la aproximación del valor de la integral mediante la fórmula de los trapecios es

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^2}{12}(1-0)3 \approx \mathbf{0,000625}$$

Luego, $1.08972 - 0.000625 < L < 1.08972 + 0.000625$, es decir,

$1.089095 < L < 1.09035$, luego cifras comunes en ambos extremos solo hay dos $\Rightarrow \mathbf{L \approx 1,0}$.

c)

Hemos de plantear la inecuación $\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{12}(1-0)3 < 0,0001 \Rightarrow |n| > 50$

Como n ha de ser positivo necesitamos tomar al menos $\mathbf{n=51}$ para obtener un resultado con un error menor que 0.0001



Integración aproximada

4.- Los economistas utilizan una distribución acumulativa denominada curva de Lorenz para medir la distribución de la renta entre las familias de un determinado país. Una de estas curvas es por ejemplo la función $h(x) = \frac{5x^3}{4+x^2}$.

a) Utilizar la regla de Simpson con $n = 60$ para estimar el coeficiente de desigualdad que viene dado por $C = \int_0^1 2(x - h(x)) dx$.

b) Hallar una cota del error cometido en la aproximación anterior.

Solución:

a) Utilizar la regla de Simpson, $n = 60$, para estimar el coeficiente de desigualdad:

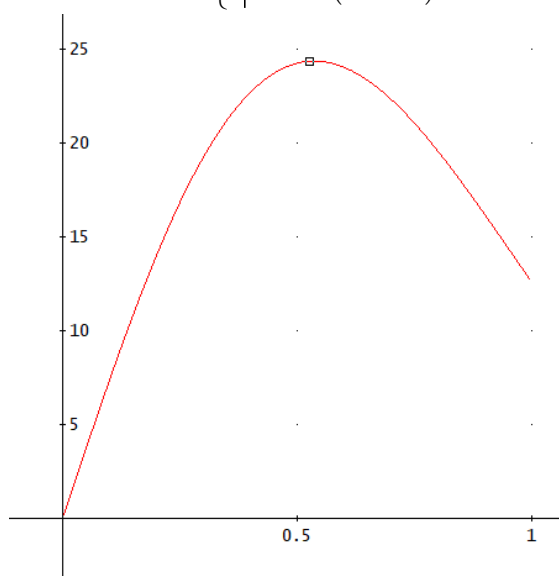
$$C = \int_0^1 2(x - h(x)) dx = \int_0^1 2 \left(x - \frac{5x^3}{4+x^2} \right) dx \Rightarrow f(x) = 2 \left(x - \frac{5x^3}{4+x^2} \right)$$

$$C = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] = 1$$

$$= \frac{1}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^{29} f\left(\frac{2k+1}{60}\right) + 2 \sum_{k=1}^{29} f\left(\frac{2k}{60}\right) + f(1) \right] \approx \mathbf{0.4628710338}$$

b) Acotación del error:

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \mid / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{960x(x^4 - 40x^2 + 80)}{(x^2 + 4)^5} \right| \mid / 0 \leq x \leq 1 \right\}$$



Una cota superior de la derivada cuarta en valor absoluto es $M = 25$.

$$\left| R_n \right| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{60}\right)^4}{180} (1-0) 25 \approx \mathbf{1.071673525 \cdot 10^{-8}}$$

$$0.4628710338 + 1.071673525 \cdot 10^{-8} < C < 0.4628710338 - 1.071673525 \cdot 10^{-8}$$

Luego, el coeficiente de desigualdad se encuentra en el intervalo:

$$\mathbf{0.462871023 < C < 0.4628710445}$$

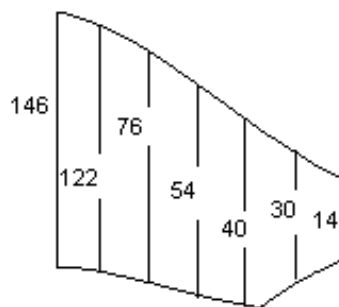


Integración aproximada



5.- Una ciudad desea drenar y rellenar el pequeño pantano mostrado en la figura:

El pantano tiene una profundidad media de 5 metros. ¿Cuántos metros cúbicos de basura se requerirán para llenar ese área después de drenar el pantano? (trapezios, $n = 6$)



Espaciamiento horizontal 20 metros

Solución:

$$S \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_6 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)] =$$

$$\frac{20}{2} [146 + 14 + 2(122 + 76 + 54 + 40 + 30)] \approx 8040 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow V = S \times \text{profundidad} = 8040 \times 5 = \boxed{40200 \text{ m}^3}$$

Integración aproximada

6.- Se supone que el cociente intelectual (CI) calculado con los test de David Wechsler sigue una distribución normal $N(100, 15)$.

- a) Hallar aproximadamente (Simpson, $n = 20$) el porcentaje de superdotados ($X > 130$) en la población española de 19 años que a fecha de octubre pasado era 471. 895.
 b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior.
 c) ¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-7} ?

Solución:

$$a) P(X > 130) = 1 - P(X < 130) = 1 - P\left(\frac{X - 100}{15} < \frac{130 - 100}{15}\right) = 1 - P(Z < 2) \text{ donde } Z \text{ es una } N(0,1)$$

$$P(Z < 2) = \int_{-\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{Aproximamos la integral mediante Simpson } n=20 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{20} = \frac{1}{10}$$

$$I = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

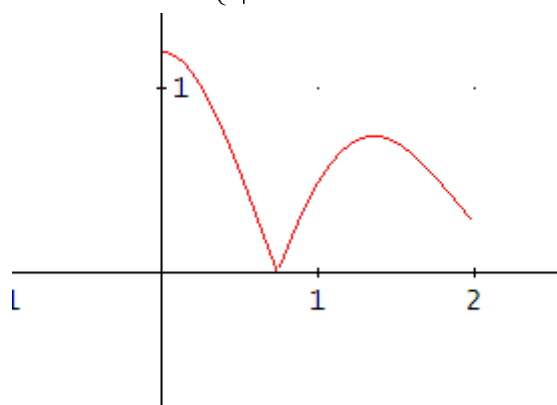
$$= \frac{1}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^9 f\left(\frac{2k+1}{10}\right) + 2 \sum_{k=1}^9 f\left(\frac{2k}{10}\right) + f(2) \right] \approx 0.4772498074$$

Luego, la probabilidad $P(X > 130) = 1 - P(Z < 2) = 1 - (0.5 + 0.4772498074) = 0.02275019259$ y el porcentaje 2.275%.

El número aproximado de "superdotados" en la población de personas de 19 años es $0.02275 \cdot 471895$, es decir, unos **10736**

b) Una cota del error

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \mid a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^4 - 6x^2 + 3) \right| \mid 0 \leq x \leq 2 \right\}$$



El máximo de la cuarta derivada se alcanza en $x=0$ y una cota es: $M = 1.5$, luego la cota de error con esta cota de la derivada es

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{180} (2-0) 1.5 \approx 1.666666666 \cdot 10^{-6} < \mathbf{0.000002}$$

$$c) |R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^4}{180} (2-0) 1.5 < 10^{-7} \Rightarrow |n| > 40.41031009$$

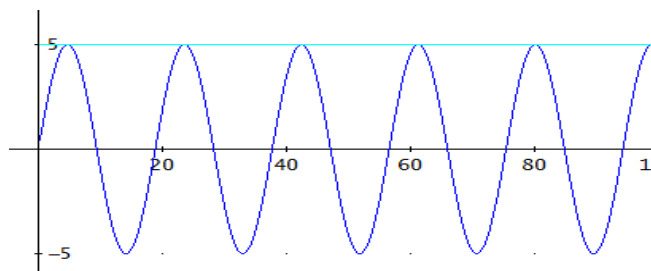
Basta tomar **$n = 42$** .

7.- Se quiere construir un techo ondulado comprimiendo una lámina de aluminio plana. Se pretende que cada onda tenga una altura de 5 cm sobre la línea central y un período de 6π cm. Calcular la longitud de la lámina de aluminio necesaria para un metro de tejado ondulado con un error menor que 1 cm. (Utilizar trapecios)

Solución:

Vamos a considerar la longitud en cm.

La función que describe la onda es $y = 5\text{sen} \frac{x}{3}$ y su gráfica en dicho intervalo es la de la figura



La longitud de la lámina viene dada por $\int_0^{100} \sqrt{1+(y')^2} dx$

La derivada de la función $y = 5\text{sen} \frac{x}{3}$ es $y' = \frac{1}{3} 5 \cos \frac{x}{3}$

Luego, la longitud de arco entre 0 y 100 es

$L = \int_0^{100} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{100} \sqrt{1+\left(\frac{1}{3} 5 \cos \frac{x}{3}\right)^2} dx$. La función que tendremos que usar para

aproximar, por el método de los trapecios, la longitud pedida es la función integrando

$$f(x) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{3} 5 \cos \frac{x}{3}\right)^2}.$$

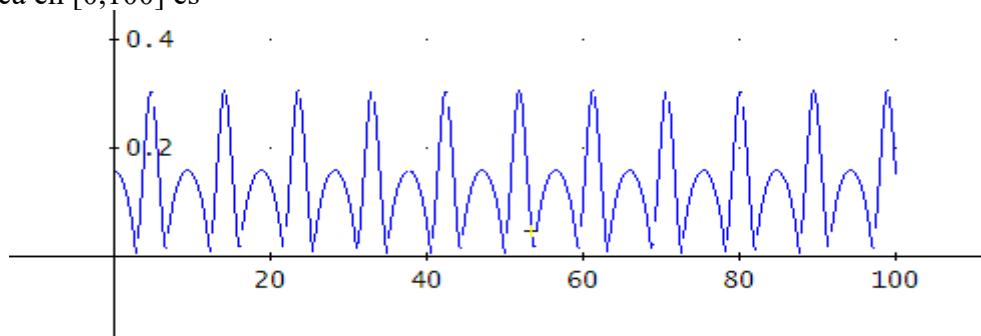
El error, e , viene acotado por la inecuación $e \leq \frac{h^2}{12} (100 - 0)M$ donde:

$M = \max \left\{ |f''(x)|, 0 \leq x \leq 100 \right\}$ y hemos de imponer la condición de que $e < 1\text{cm}$.

Calcularemos, el máximo de la función segunda derivada en $[0,100]$

$$|f''(x)| = \left| \frac{25 \left(4 \cos \left(\frac{2x}{3} \right) \left(25 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) + 9 \right) + 25 \text{sen}^2 \left(\frac{2x}{3} \right) \right)}{108 \left(25 \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) + 9 \right)^{3/2}} \right|$$

La gráfica en $[0,100]$ es



Observamos perfectamente en la figura que $M < 0,4$



Integración aproximada

$$\text{luego error} \leq \left| \frac{h^2}{12} (100-0)M \right| < \frac{\left(\frac{100}{n}\right)^2}{12} (100-0)0.4 < 1 \Rightarrow n > \frac{100\sqrt{3}}{3} \approx 182.57$$

Como n ha de ser un número entero y positivo, entonces $n = 183$, por tanto $h = \frac{100-0}{183}$

La longitud aproximada pedida, según la fórmula de los trapecios, es

$$L = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) = \frac{100-0}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{k=1}^{182} f\left(\frac{100k}{183}\right) + f(100) \right) \approx \mathbf{150.519}$$



Integración aproximada

8.- Con el fin de averiguar el modelo de motor adecuado, una empresa desea conocer el trabajo necesario para mover linealmente 5m un objeto mediante una prensa. La fuerza F requerida es: $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$, donde F se mide en kilogramos y la posición x en metros. Se pide:

a) Aproximar, utilizando la regla de Simpson con $n = 12$, el trabajo W (en kilogramos-metro) efectuado en un ciclo, que viene dado por $W = \int_0^5 F(x) dx$.

b) Estudiar si se puede hallar una cota del error con la fórmula dada en teoría para ello.

Solución:

a)

Se trata de calcular, de forma aproximada con la regla de Simpson, la integral:

$$W = \int_0^5 F(x) dx = \int_0^5 100x\sqrt{125 - x^3} dx$$

La función $F(x)$ de la fórmula es, en este caso, la función integrando $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$ y el espaciamiento horizontal para $n = 12$ es:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{12} = \frac{5}{12}$$

Los puntos de la partición son los valores $x_k = 0 + k \frac{5}{12} = k \frac{5}{12}$ y los valores que toma F en estos puntos (que son los $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{12}$, que necesitamos en la regla de Simpson) son:

$y\left(k \frac{5}{12}\right) = F\left(k \frac{5}{12}\right) = 100\left(k \frac{5}{12}\right)\sqrt{125 - \left(k \frac{5}{12}\right)^3}$ y el valor aproximado de la integral es:

$$I = \frac{h}{3} \left[F(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} F(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} F(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{5}{12} \left[F(0) + 4 \sum_{k=0}^5 F\left((2k+1)\frac{5}{12}\right) + 2 \sum_{k=1}^5 F\left(2k \frac{5}{12}\right) + F(5) \right] \approx \underline{\underline{10233,58418 \text{ kg-m}}}$$

b) $f^{IV}(x) = -\frac{375(x^9 + 1050000x^3 + 25000000)}{4 \cdot (125^3 - x^{7/2})}$

No puede acotarse el error,

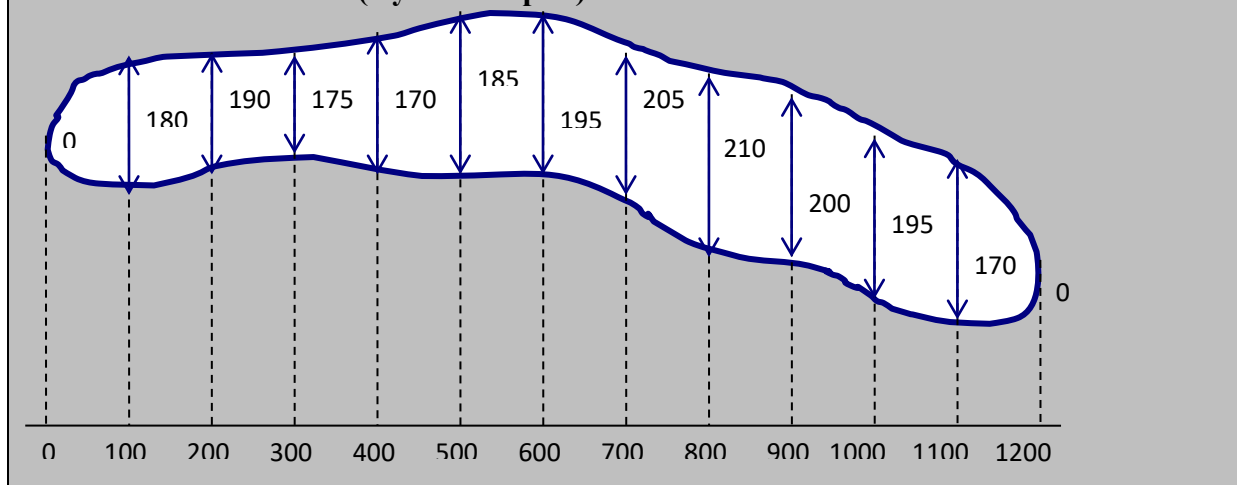
pues la derivada cuarta de F no está acotada en el intervalo $[0, 5]$.



Integración aproximada



9.- La anchura, en pies, en puntos igualmente espaciados a lo largo de la calle de un hoyo de un campo de golf viene dada en la figura. La dirección desea estimar el número de yardas cuadradas de la calle como base para decidir cuánto tiempo le costaría cortar el césped a un encargado del mantenimiento del campo. Usar la regla de Simpson para hallar dicha estimación. (1 yarda = 3pies)



Solución:

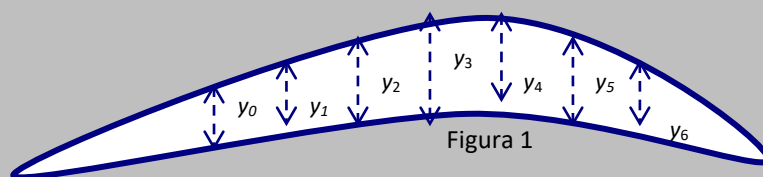
En este ejercicio podemos aplicar directamente la regla de Simpson para aproximar el área pedida, siendo el espaciamento horizontal $h= 100$, $n =12$ y los valores y_i $i= 1...12$ los que muestra la figura.

$$S \approx \frac{100}{3} \cdot (0+0+2(190+170+195+210+195) + 4(180 + 175 + 185+205+200+170)) \approx$$

$$2.126666666 \cdot 10 \text{ pies}^2 = \mathbf{2,362962 \text{ yardas}^2}$$

Integración aproximada

10.- El diseño de un nuevo tipo de aeroplano requiere un tanque de gasolina de sección transversal constante en cada ala. En la figura 1 se muestra un dibujo a escala de una sección transversal. El tanque debe cargar, aproximadamente, 3000 kg de gasolina cuya densidad es $0,68 \text{ kg/dm}^3$. Estimar la longitud del tanque usando la regla de Simpson.



$y_0 = 4,6 \text{ dm}$
 $y_1 = 4,9 \text{ dm}$
 $y_2 = 5,5 \text{ dm}$
 $y_3 = 5,8 \text{ dm}$
 $y_4 = 6,1 \text{ dm}$
 $y_5 = 6,1 \text{ dm}$
 $y_6 = 6,4 \text{ dm}$

El espaciamiento horizontal es $h = 3 \text{ dm}$. *Recuérdese que $d = \frac{M}{V}$*

Solución:

El volumen del tanque es el área de la sección transversal por la longitud (por tratarse de un sólido de Cavalieri).

Por otro lado, el volumen del tanque es $V = \frac{M}{d} = \frac{3000}{0,68} = 4411,764705 \text{ dm}^3$.

Vamos a calcular de manera aproximada el área de la sección transversal con la regla de Simpson y para $n=6$, teniendo en cuenta que el espaciamiento horizontal es dato y vale $h = 2 \text{ dm}$

$$S = \frac{h}{3} \left[y_0 + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} y_{2k+1} + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} y_{2k} + y_n \right] = \frac{3}{3} \left[y_0 + 4 \sum_{k=0}^2 y_{2k+1} + 2 \sum_{k=1}^2 y_{2k} + y_n \right] = \\
 = \frac{3}{3} (4,6 + 4(4,9 + 5,8 + 6,1) + 2(5,5 + 6,1) + 6,4) = 101,4 \text{ dm}^2$$

Como $V = S \cdot l \Rightarrow l = \frac{V}{S} = \frac{4411,764705}{101,4} \approx \mathbf{43,51 \text{ dm}}$



Integración aproximada

- 11.- a) Hallar de forma aproximada, usando la regla de Simpson con $n = 30$, la longitud de la órbita de Marte ($a = 227,94 \times 10^6$ km, $e = 0,0934$) y acotar el error cometido en dicha aproximación ¿Es muy grande?
 b) Hallar el error relativo y expresarlo en ppm (partes por millón)
 c) Hallar n para que el error sea menor que 1 km.

Solución:

a)

Una ecuación polar de Marte es: $r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \alpha} = \frac{227,94 \cdot 10^6 (1 - 0,0934^2)}{1 - 0,0934 \cos \alpha}$, para

calcular la longitud de la órbita se halla $r'(\alpha) = -\frac{527596873297956 \cdot \text{sen}(\alpha)}{(1 - 0,0934 \cos \alpha)^2}$ la longitud de la

órbita viene dada por la integral:

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\alpha = 2 \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{227,94 \cdot 10^6 (1 - 0,0934^2)}{1 - 0,0934 \cos \alpha} \right)^2 + \left(-\frac{527596873297956 \cdot \text{sen}(\alpha)}{(467 \cos \alpha - 5000)^2} \right)^2} \, d\alpha$$

Para aproximar esta integral con el método de Simpson tenemos en cuenta que la función f es la función integrando:

$$f(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{227,94 \cdot 10^6 (1 - 0,0934^2)}{1 - 0,0934 \cos \alpha} \right)^2 + \left(-\frac{527596873297956 \cdot \text{sen}(\alpha)}{(467 \cos \alpha - 5000)^2} \right)^2}, \text{ el espaciamento}$$

horizontal para $n = 30$ es $h = \frac{\pi - 0}{30} = \frac{\pi}{30}$ y los puntos de la partición son $\alpha = 0 + k \frac{\pi}{30}$ y el valor

aproximado de la integral aplicando la regla de Simpson es:

$$L = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(f(0) + 4 \sum_{k=0}^{14} f\left((2k+1) \frac{\pi}{30} \right) + 2 \sum_{k=1}^{14} f\left(2k \frac{\pi}{30} \right) + f(\pi) \right) \approx \boxed{714530342}, \text{ luego la longitud de la}$$

órbita mide aproximadamente $L \approx 2(714530342) = \boxed{1429060684 \text{ km}}$.

b) Cota de error

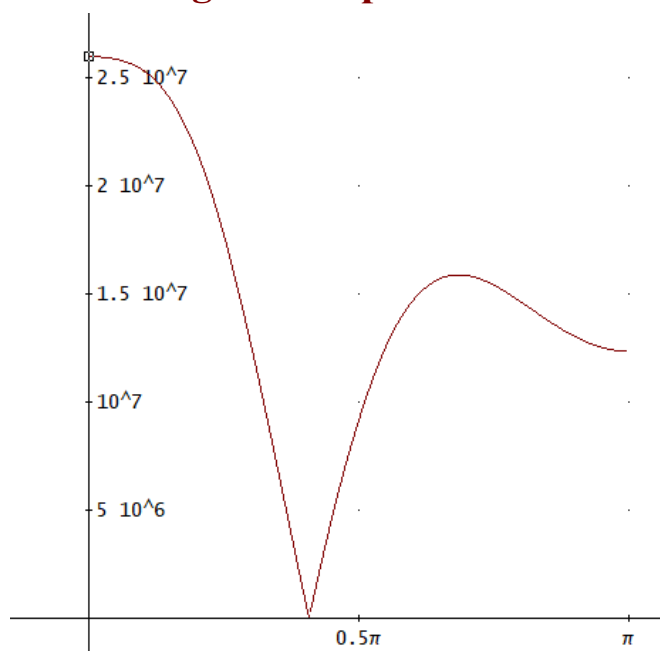
$$\text{Error} \leq \left| \frac{h^4}{180} (b - a) M \right| \text{ donde } M = \max \{ f^{(4)}(x), a \leq x \leq b \}$$

Hallamos primero M o una cota superior de $f^{(4)}(x)$ próxima a M .

La derivada cuarta de $f(\alpha)$ en $[0, \pi]$ es una expresión *enorme* cuya representación gráfica, es la que sigue:

El valor máximo de f en $[0, \pi]$ se alcanza en $\alpha = 0$ y vale $25977116,96 < 25977117$, luego:

Integración aproximada



$$\text{Error} \leq \left| \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^4}{180} (\pi - 0) 25977117 \right| < 54,53 \text{ km para la integral, luego para la longitud es}$$

$< 2 \cdot 54,53 = 109,06$ ¿es mucho o poco?

El error relativo sería $\approx \frac{109,06}{1429060863} < 0,08 \cdot 10^{-6}$, se diría que el error relativo es menor que

0,08 ppm (partes por millón).

Obsérvese que en este caso es importante tener en cuenta el valor de los resultados, si las cifras que se van a obtener son muy grandes o pequeñas, por eso es siempre mejor usar el concepto de error relativo.

$$\text{c) } \left| \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^4}{180} (\pi - 0) 25977117 \right| < 1 \Rightarrow |n| > \frac{\sqrt[4]{116897026500\pi^5}}{30} \approx 81.52052205$$

Basta tomar **n = 82**.



Integración aproximada

12.- Calcular aproximadamente la integral $\int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$ mediante el método de Simpson, tomando 50 subintervalos; acotar el error cometido en dicha aproximación; dar el valor de la integral con las cifras decimales exactas. ¿Cuántos subintervalos habría que tomar si se quiere que el error sea menor que una diezmilésima?

Solución:

$I = \int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln x}$ y el espaciamento horizontal para $n=50$ es $h = \frac{3-2}{50} = \frac{1}{50}$ y el valor aproximado de la integral aplicando la regla de Simpson es:

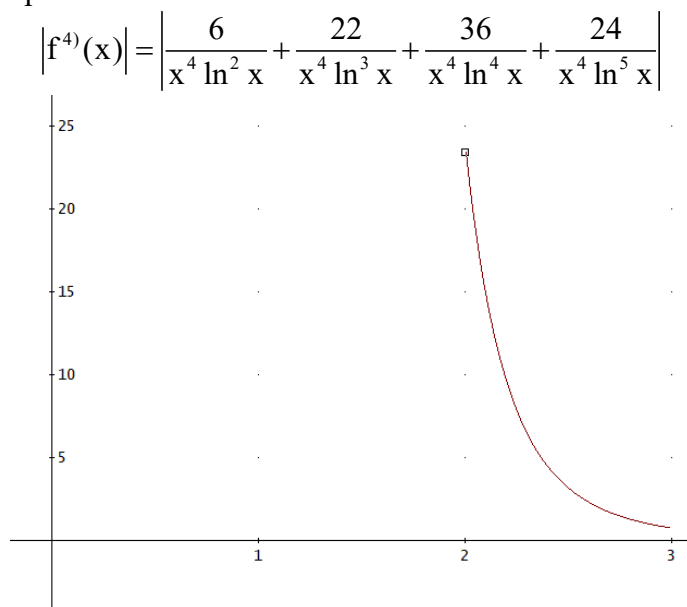
$$I = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left(f(2) + 4 \sum_{k=0}^{24} f\left(2 + (2k+1)\frac{1}{50}\right) + 2 \sum_{k=1}^{24} f\left(2 + 2k\frac{1}{50}\right) + f(3) \right) \approx \underline{\underline{1.118424819}}$$

Acotación del error:

$$\text{Error} \leq \left| \frac{h^4}{180} (b-a)M \right| \text{ donde } M = \max \{ f^{(4)}(x), a \leq x \leq b \}$$

Siendo M una cota superior del valor absoluto de:



Como esta derivada cuarta es decreciente en $[2,3]$, su valor máximo lo alcanzará en $x=2: f^{(4)}(2) = 24.03139665$

Tomamos $M = 25$, y ya acotamos el error:

$$\text{Error} \leq \left| \frac{\left(\frac{1}{50}\right)^4}{180} (3-2)25 \right| \leq \underline{\underline{2.222222222 \cdot 10^{-8}}}$$

Cifras decimales exactas en el cálculo aproximado:



Integración aproximada

$$1.118424819 - 2.222222222 \cdot 10^{-8} < \int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx < 1.118424819 + 2.222222222 \cdot 10^{-8}$$

$$1.118424796 < \int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx < 1.118424841$$

Podemos asegurar que son exactas las cifras **1.118424**

¿Cuántos subintervalos habría que tomar si se quiere que el error sea menor que una diezmilésima?

$$\text{Error} \leq \left| \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{180} (3-2)25 \right| < 10^{-4} \Rightarrow |n| > \frac{5\sqrt[4]{180}}{3} \approx 6.104735835$$

Bastaría tomar **8 subintervalos**.



Integración aproximada

13.- Sea L la longitud del arco de la curva $y = \text{sen} x$ desde $x=0$ hasta $x=\pi$.

a) Obtener una aproximación L_T de L usando la fórmula de los trapecios con un error menor que $0.015 u$.

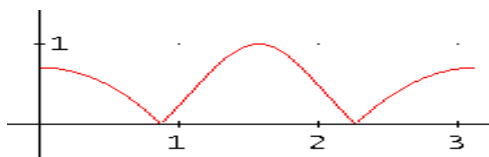
b) Obtener la aproximación L_S de L que proporciona la fórmula de Simpson con un número de subintervalos *igual* que los necesitados en el apartado anterior. Acotar el error cometido.

Solución:

a) Longitud del arco de la curva $y = \text{sen} x$, entre 0 y π .

La longitud del arco pedida viene dada por la integral

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^\pi \sqrt{1+(\cos x)^2} dx \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+(\cos x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{\cos^4 x + 2 \cos^2 x - 1}{\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}}$$



$$M = \max \left\{ |f''(x)| / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{\cos^4 x + 2 \cos^2 x - 1}{\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}} \right| / 0 \leq x \leq \pi \right\}$$

El máximo de la derivada en $[0,\pi]$ es $M = 1$, luego:

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M = \frac{\left(\frac{\pi-0}{n}\right)^2}{12} (\pi-0) 1 < 0.015 \Rightarrow |n| > \frac{5\sqrt{2}\pi^{3/2}}{3} \approx 13.12467495$$

Como n ha de ser un número natural, tomamos $n = 14$

$$L_T = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) = \frac{\pi}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{k=1}^{13} f\left(k \frac{\pi}{14}\right) + f(\pi) \right) \approx \mathbf{3.820 \pm 0.015}$$

b) **Simpson con $n = 14$** (obsérvese que n está tomado correctamente pues es par):

$$L_S = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a+(2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a+2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^6 f\left((2k+1) \frac{\pi}{14}\right) + 2 \sum_{k=1}^6 f\left(2k \frac{\pi}{14}\right) + f(\pi) \right] \approx \mathbf{3.82019761}$$

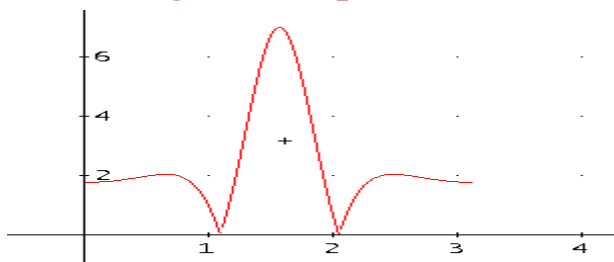
Acotación del error:

$$M = \max \left\{ |f^{(4)}(x)| / a \leq x \leq b \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{\cos^8 x + 9 \cos^6 x - \cos^2 x (5 \text{sen}^4 x - 24 \text{sen}^2 x - 16) - \text{sen}^2 x - 6}{\sqrt{(1+\cos^2 x)^7}} \right| / 0 \leq x \leq \pi \right\}$$



Integración aproximada



Una cota superior de la derivada en $[0, \pi]$ es $M = 7$, luego:

$$\text{Error} = |R_n| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{14}\right)^4}{180} (b-a) M < \frac{h^4}{180} (\pi - 0) 7 \approx \mathbf{0.0003097866909} < \mathbf{0.0004}$$



Integración aproximada



14.- a) Calcular de forma aproximada, utilizando la regla de Simpson para $n = 30$, el área barrida por un radio vector con origen en el Sol y extremo en el asteroide Apolo, cuya ecuación es $r = \frac{9}{9 + 5 \cos \alpha}$, desde $\alpha = 0$ hasta donde $\alpha = \pi/2$

b) Estimar el error cometido en la aproximación anterior.

Solución:

a) Aproximación por Simpson para $n=30$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{9 + 5 \cos \alpha} \right)^2 d\alpha \Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{9 + 5 \cos \alpha} \right)^2 \text{ y } h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{30} = \frac{\pi}{60}$$

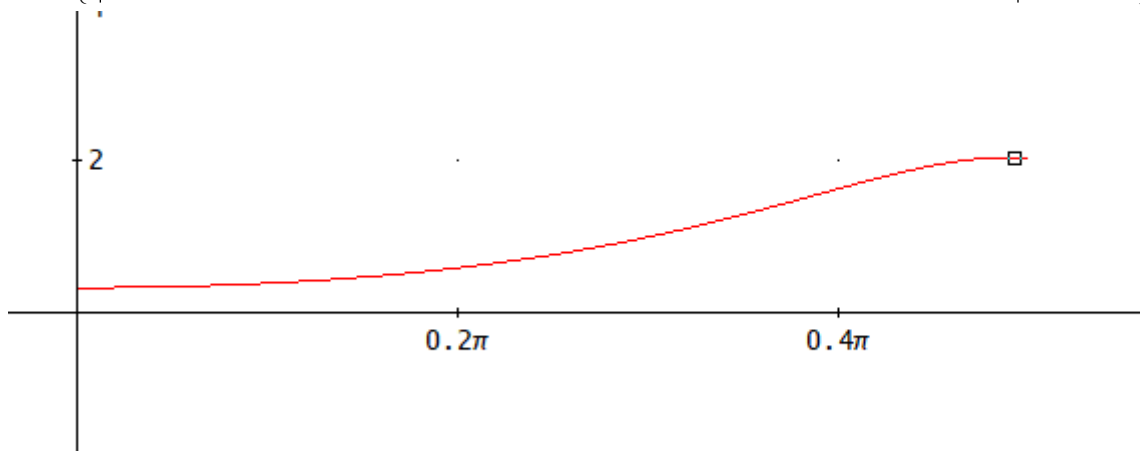
$$S = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{60} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^{14} f\left((2k+1) \frac{\pi}{60} \right) + 2 \sum_{k=1}^{14} f\left(2k \frac{\pi}{60} \right) + f\left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \approx \mathbf{0.4521461651}$$

b): Cota de error

$$M = \max \left\{ |f^{(4)}(\alpha)| / a \leq \alpha \leq b \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{405(1500 \cos^4 \alpha + 4725 \cos^3 \alpha - 4790 \cos^2 \alpha - 27 \cos \alpha (100 \sin^2 \alpha + 273) - 20(125 \sin^4 \alpha + 7))}{(9 + 5 \cos x)^6} \right| / 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



Observamos que una cota es 2,1, luego una cota del error es:

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^4}{180} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) 2.1 \approx 1.377403416 \cdot 10^{-7} < \mathbf{0.0000002}$$

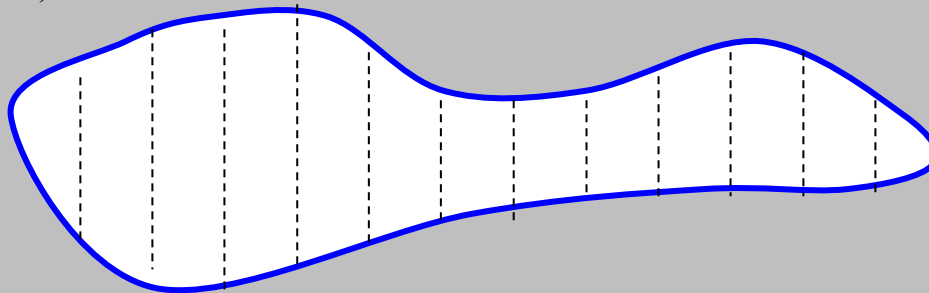


Integración aproximada

15.- En el diseño de un parque se ha previsto aprovechar una hondonada con una profundidad media de 2m para construir un lago como el de la figura. Tomadas las medidas perpendiculares a un eje horizontal, con un espaciamento horizontal de 3m, se ha obtenido la siguiente tabla:

y	0	6	7	8	10	8	7	4	6	4	5	4	2	1	0
x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Usando la regla de Simpson, calcular el volumen aproximado de agua necesario para llenarlo,



Solución:

El volumen del lago es aproximadamente igual al área aproximada de la sección por la profundidad media.

El área aproximada de la sección, usando la regla de Simpson y teniendo en cuenta que las medidas se han tomado con un espaciamento horizontal de 3 m es:

$$S = \frac{h}{3} \left[y_0 + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} y_{2k+1} + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} y_{2k} + y_n \right] = \frac{3}{3} \left[y_0 + 4 \sum_{k=0}^6 y_{2k+1} + 2 \sum_{k=1}^6 y_{2k} + y_n \right] =$$

$$= \frac{3}{3} (0 + 4(6 + 8 + 8 + 4 + 4 + 4 + 1) + 2(7 + 10 + 7 + 6 + 5 + 2) + 0) = 214$$

El valor aproximado del volumen es $214 \times 2 =$ **428 metros cúbicos**.



Integración aproximada

16.- Los hilos de un tendido eléctrico, suspendidos cada dos postes, adoptan la forma de una catenaria de ecuación

$$y = 20 ch \frac{x}{20} \text{ donde } -20 \leq x \leq 20$$

dónde x e y se miden en metros. Calcular, de forma aproximada y con un error menor que 1mm, la longitud del cable suspendido entre dos postes utilizando la regla de Simpson.

Solución:

La longitud del cable suspendido entre dos postes es: $L = \int_{-20}^{20} \sqrt{1+(y')^2} dx =$

$$2 \int_0^{20} \sqrt{1+(y')^2} dx \text{ donde } y = 20ch\left(\frac{x}{20}\right) \Rightarrow y' = sh\left(\frac{x}{20}\right)$$

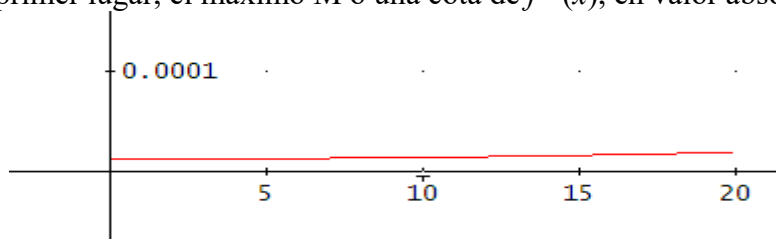
La función $f(x)$ que necesitamos es la función integrando:

$$f(x) = 2\sqrt{1+(y')^2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{e^{x/20}}{2} - \frac{e^{-x/20}}{2}\right)^2} = \frac{e^{x/20}}{160000} + \frac{e^{-x/20}}{160000}$$

Una cota del error cometido viene dado por la expresión:

$$\frac{h^4}{180}(b-a)M \text{ donde } M = \max\{|f^{(4)}(x)|, a < x < b\} = \max\left\{\left|\frac{e^{x/20}}{160000} + \frac{e^{-x/20}}{160000}\right|, 0 < x < 20\right\}.$$

Calculamos, en primer lugar, el máximo M o una cota de $f^{(4)}(x)$, en valor absoluto, en $[0,20]$



El máximo se alcanza en $x=20$, es decir, $\frac{e}{160000} + \frac{e^{-1}}{160000} \approx 1.928850793 \cdot 10^{-5}$

Luego una cota superior de $f^{(4)}(x)$ en $[0,20]$ es $2 \cdot 10^{-5} < 0,0001$ (como se observa en la gráfica)

$$\frac{h^4}{180}(b-a)M < \frac{\left(\frac{20-0}{n}\right)^4}{180}(20-0)0.0001 < 0.001 \Rightarrow |n| > \frac{2\sqrt{3}10^{3/4}}{3} \approx 6.493358309$$

El valor positivo y par más pequeño es $n=8$, en consecuencia, $h = \frac{20-0}{8} = \frac{20}{8}$

$$L = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a+(2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a+2kh) + f(b) \right] =$$
$$= \frac{20}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^3 f\left((2k+1)\frac{20}{8}\right) + 2 \sum_{k=1}^3 f\left(2k\frac{20}{8}\right) + f(20) \right] \approx \mathbf{47.0084}$$

Obsérvese que nos quedamos con solo 3 cifras decimales pues el error < 0.001 , por lo tanto, no podemos dar información fiable desde la cuarta cifra decimal en adelante.

Nota: Si tomamos como función $f(x)$ el integrando sin el factor 2, el error queda dividido por 2, ahora bien como hemos tomado el intervalo $[0,20]$, en lugar de $[-20,20]$ quedaría compensado.



Integración aproximada

17.-a) Calcular, utilizando el método de Simpson para $n = 20$, la longitud del menor arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ determinado por los puntos $(0,3)$ y $(2, \sqrt{5})$.
 b) Acotar el error cometido en el cálculo de a).

Solución:

$$\text{a) } x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

El arco de circunferencia cuya longitud hemos de calcular corresponde a la función $\sqrt{9-x^2}$. Aplicamos la fórmula de cálculo de la longitud para una función dada en forma explícita:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2} dx$$

La función $f(x)$ que necesitamos es la función integrando: $\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}$ con

$$h = \frac{2-0}{20} = \frac{1}{10}. \text{ El valor aproximado de la integral con la fórmula de Simpson es:}$$

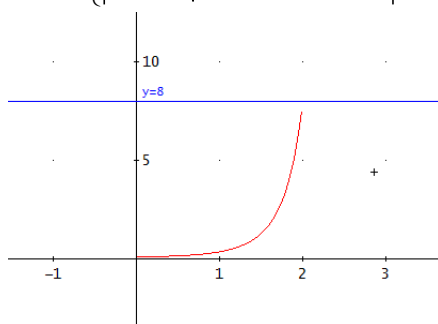
$$L = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a+(2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a+2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^9 f\left((2k+1)\frac{1}{10}\right) + 2 \sum_{k=1}^9 f\left(2k\frac{1}{10}\right) + f(2) \right] \approx \mathbf{2.189184198}$$

b) Hallamos ahora una cota del error cometido en a)

$$\text{error} \leq \frac{h^4}{180} (b-a)M \text{ donde}$$

$$M = \max \left\{ |f^{(4)}(x)|, a < x < b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{9(8x^4 + 216x^2 + 243)}{\sqrt{(9-x^2)^9}} \right|, 0 < x < 2 \right\}$$



La función es estrictamente creciente por lo que el máximo se obtiene sustituyendo $x=2$ en $|f^{(4)}(x)|$ y se obtiene 7.953246582.

También se puede observar en la gráfica que $\max_{[0,2]} |f^{(4)}(x)| < 8$

$$\text{Luego } \frac{h^4}{180} (b-a)M < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{180} (2-0)8 \approx \mathbf{8.8888888} \cdot 10^{-6} < 9 \cdot 10^{-6} < \mathbf{10^{-5}}$$



Integración aproximada

17.- La función de error $\text{err}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ debe evaluarse numéricamente pues no existe una expresión elemental para la primitiva de e^{-t^2} .

a) Utilizar la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar $\text{err}(1)$

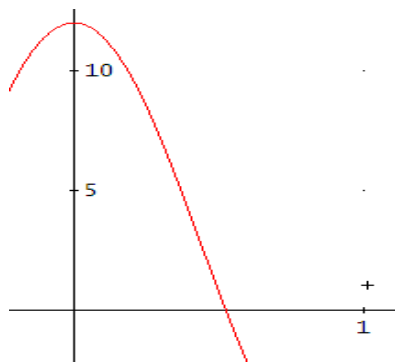
b) En $[0, 1]$, $\left| \frac{d^4}{dt^4} e^{-t^2} \right| \leq 12$. Dar una cota superior para el valor absoluto del error cometido en el resultado del apartado anterior.

Solución:

a)

$$\text{err}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt \Rightarrow f(t) = e^{-t^2}, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{err}(1) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{30} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^4 f\left(\frac{2k+1}{10}\right) + 2 \sum_{k=1}^4 f\left(\frac{2k}{10}\right) + f(1) \right] \approx \mathbf{0.8427017130} \end{aligned}$$



b) $|E| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M$, siendo M una cota superior del valor absoluto de la derivada cuarta de f en $[0, 1]$;

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(t) \right|, a < t < b \right\} = \max \left\{ \left| (16t^4 - 48t^2 + 12)e^{-t^2} \right|, 0 < t < 1 \right\}$$

por el dibujo vemos que puede tomarse $M = 12$.

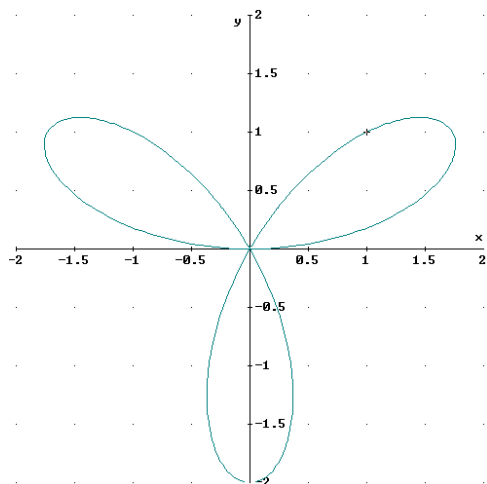
$$|E| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{180} (1-0) 12 \approx \mathbf{0.000006}$$

Integración aproximada

18.- a) Hallar de forma aproximada (Simpson con 20 subintervalos) la longitud de la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 2 \operatorname{sen}(3\alpha)$.
 b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior.

Solución:

a)



$$r = 2 \operatorname{sen}(3\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \Rightarrow r'(\alpha) = 6 \cos(3\alpha)$$

Los pétalos comienzan y acaban en el origen; resolvemos $r = 0$ y nos quedamos con las soluciones entre 0 y $\pi/2$.
 $2\operatorname{sen}(3\alpha) = 0; \alpha = 0, \pi/3$.

La longitud de la curva es tres veces la longitud del primer pétalo: $L = 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2} d\alpha = 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{(2 \operatorname{sen}(3\alpha))^2 + (6 \cos(3\alpha))^2} d\alpha$.

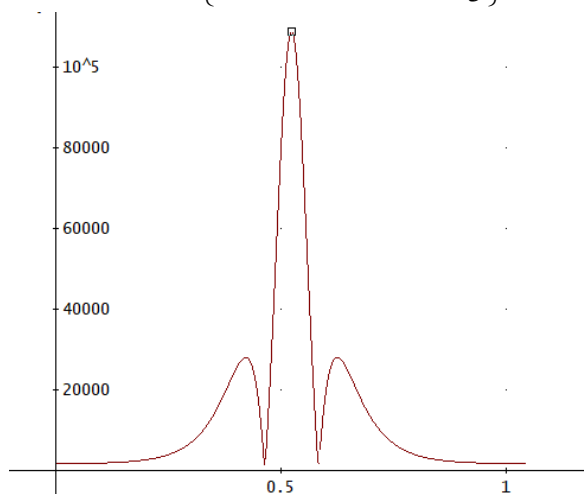
$$f(\alpha) = 3\sqrt{(2 \operatorname{sen}(3\alpha))^2 + (6 \cos(3\alpha))^2} \quad \text{y} \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{20} = \frac{\pi}{60}$$

$$L = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] = \#12:$$

$$\frac{\pi}{3} \left(f(0) + 4 \sum_{k=0}^9 f\left(\frac{(2k+1)\pi}{60}\right) + 2 \sum_{k=1}^9 f\left(\frac{2k\pi}{60}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \approx \mathbf{13.36496032}$$

b) Acotación del error:

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M, \text{ siendo } M = \max \left\{ |f^{(4)}(x)| \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$





Integración aproximada



Puede tomarse: $M = 110000$

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^4}{180} \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) 110000 \approx \mathbf{0.004809980184}$$

$$13.36496032 - 0.004809980184 < L < 13.36496032 + 0.004809980184$$

$$13.36015033 < L < 13.36977030$$

La longitud de la curva es aproximadamente: $L = \mathbf{13.36}$ con cifras decimales exactas.



Integración aproximada



19.- Una variable aleatoria X sigue una distribución normal N de media 0 y varianza 2. Hallar aproximadamente (Simpson, n = 30) la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 2.

a) Acotar el error cometido en dicha aproximación y dar la probabilidad pedida con las cifras decimales exactas que permita el cálculo anterior.

b) ¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-8} ?

Nota: Función de densidad de una $N(\mu, \sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Solución:

a) Cálculo mediante la regla de Simpson:

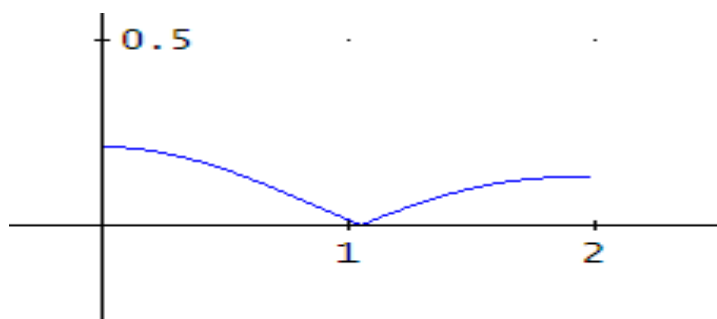
$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = I \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \text{ y } h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{30} = \frac{1}{15}$$

$$I = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^{14} f\left(\frac{2k+1}{15}\right) + 2 \sum_{k=1}^{14} f\left(\frac{2k}{15}\right) + f(2) \right] \approx \mathbf{0.4213504021}$$

b) Acotación del error:

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \mid / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^4}{32\sqrt{\pi}} - \frac{3x^2}{8\sqrt{\pi}} + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \right) \right| \mid / 0 \leq x \leq 2 \right\}$$



Puede tomarse como cota superior:
 $M = 0.5$.

Una cota del error cometido es:

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{15}\right)^4}{180} (2-0) 0.5 \approx \mathbf{1.097393689 \cdot 10^{-7}}$$

$$0.4213504021 - 1.097393689 \cdot 10^{-7} < P(0 < X < 2) < 0.4213504021 + 1.097393689 \cdot 10^{-7}$$

$$0.4213505118 < P(0 < X < 2) < 0.4213502923$$

Luego, $P(0 < X < 2) \approx \mathbf{0.42135}$ expresada con cifras exactas.

c) Cálculo de n para que el error sea menor que 10^{-8}

$$\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^4}{180} (2-0) 0.5 < 10^{-8} \Rightarrow |n| > 54.60241725$$

Basta tomar $\mathbf{n = 56}$.

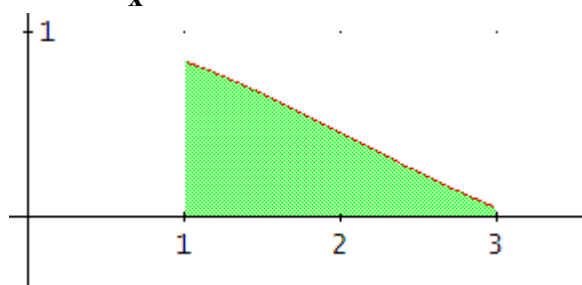
20.- Dada la función $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, hallar:

- a) Un valor aproximado del área encerrada por la función y el eje de abscisas en el intervalo $[1,3]$, usando el método de los trapecios con $n = 20$.
- b) Una cota del error cometido. Dar el valor del área con las cifras decimales exactas que permite la aproximación anterior.

Solución:

a) El área viene dada por la integral:

$$A = \int_1^3 \frac{\text{sen } x}{x} dx$$



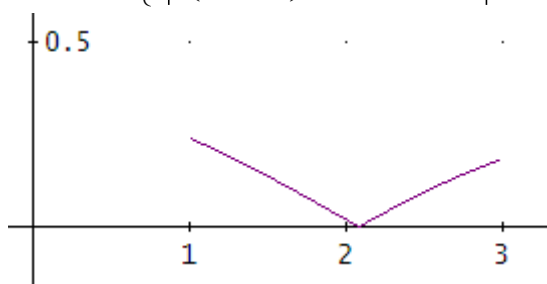
Cálculo del área mediante la regla de los trapecios:

$$I = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) = \frac{1}{20} \left(f(1) + 2 \sum_{k=1}^{19} f\left(1+k \frac{1}{10}\right) + f(3) \right) \approx \mathbf{0.9025323711}$$

Siendo $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{20} = \frac{1}{10}$

b) Cota del error cometido:

$$M = \max \left\{ |f''(x)| \mid a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \text{sen } x - \frac{2 \cos x}{x^2} \right| \mid 1 \leq x \leq 3 \right\}$$



Puede tomarse $M = 0.5$

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{12} (3-1) 0.5 \approx \mathbf{0.0008333333333}$$

$$0.9025323711 - 0.0008333333333 < \int_1^3 \frac{\text{sen } x}{x} dx < 0.9025323711 + 0.0008333333333$$

$$0.9016990377 < \int_1^3 \frac{\text{sen } x}{x} dx < 0.9033657044$$

Luego, $\int_1^3 \frac{\text{sen } x}{x} dx \approx \mathbf{0.90}$ expresada con cifras exactas.

Integración aproximada

21.- Calcular de forma aproximada (método de Simpson con $n=20$) la longitud del arco correspondiente al intervalo $0 < x < \ln(10)$ de la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y acotar el error cometido en dicha aproximación.

Solución:

Debemos plantear la integral que nos permite calcular la longitud:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{\ln 10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\ln 10} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \int_0^{\ln 10} ch(x) dx =$$

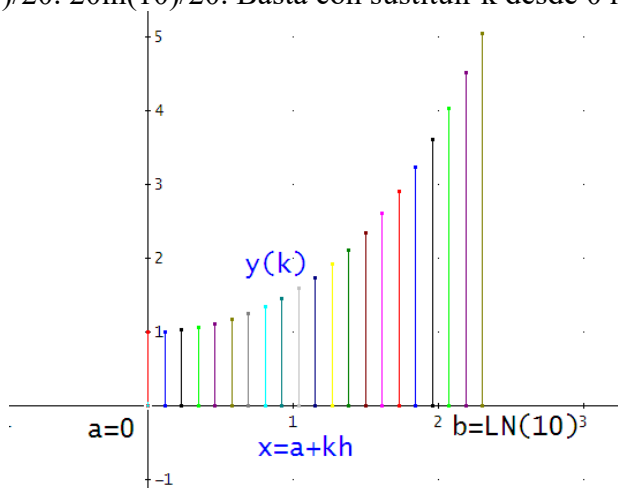
Obsérvese que $f(x) = ch(x)$ (catenaria). Para resolver la integral utilizamos:

Fórmula de Simpson o de las parábolas

Teniendo en cuenta que: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\ln 10 - 0}{20} = \frac{\ln 10}{20}$

Debemos especificar las abscisas de la forma $x = a + kh$ que nos permitan calcular las ordenadas $y(k) = f(a + kh)$

Los valores de la ordenada (en este caso la catenaria) para las abscisas: $x=0, \ln(10)/20, 2\ln(10)/20, \dots, 19\ln(10)/20, 20\ln(10)/20$. Basta con sustituir k desde 0 hasta 20.



$$L = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

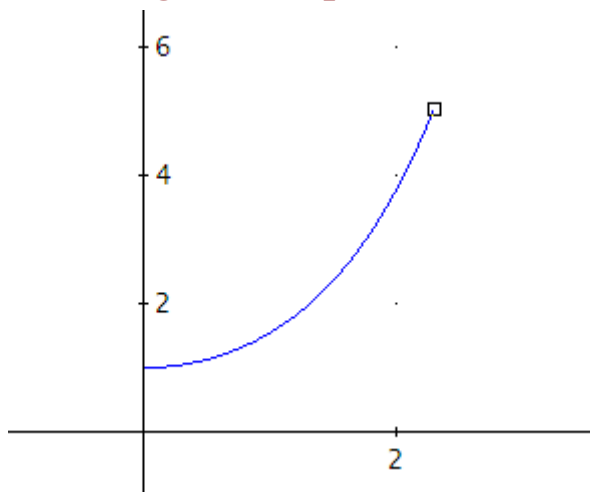
$$= \frac{\ln 10}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^9 f\left((2k+1) \frac{\ln 10}{20} \right) + 2 \sum_{k=1}^9 f\left(2k \frac{\ln 10}{20} \right) + f(\ln 10) \right] \approx \mathbf{4.950004823}$$

Acotación del error:

Si $f^{(4)}(x)$ es una función acotada en $[a, b]$ y llamamos $M = \max\{|f^{(4)}(x)| / a \leq x \leq b\}$, se

tiene entonces que: $|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a)M$

Integración aproximada



$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \operatorname{ch}(x) \right| / 0 \leq x \leq \ln(10) \right\}$$

Una cota superior de la derivada cuarta en valor absoluto puede ser $M=6$.

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < |R_n| \leq \frac{\left(\frac{\ln 10}{20}\right)^4}{180} (\ln 10 - 0) 6 \approx \mathbf{1.348457322 \cdot 10^{-5}}$$

$$4.950004823 - 1.348457322 \cdot 10^{-5} < \int_0^{\ln 10} \operatorname{ch}(x) dx < 4.950004823 + 1.348457322 \cdot 10^{-5}$$

$$4.949991338 < \int_0^{\ln 10} \operatorname{ch}(x) dx < 4.950018307$$

Por tanto, la longitud y el área de la catenaria entre 0 y $\ln 10$ es aproximadamente **4,9**

Integración aproximada

22.- Dentro de un parque municipal existe una zona adoquinada cuyo contorno se corresponde con la gráfica de la función en coordenadas polares $r = 4 + \cos(6\alpha)$.

a) Calcular de forma aproximada, utilizando el método de Simpson con $n = 60$, el área de dicha zona adoquinada.

b) Acotar el error cometido en el cálculo de a).

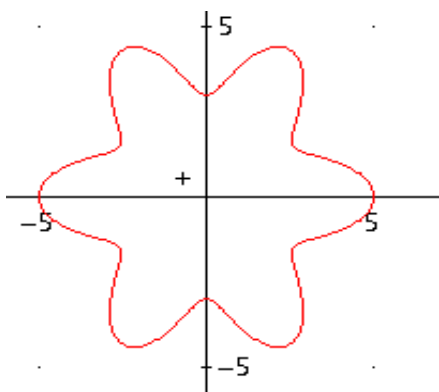
c) Si se quisiera obtener un resultado con un error menor que una milésima, ¿cuántos subintervalos habría que tomar?

Nota: La fórmula del área de un sector curvilíneo limitado por una curva $r = r(\alpha)$ en

coordenadas polares es $A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2} r(\alpha)^2 d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (4 + \cos(6\alpha))^2 d\alpha$

Solución:

a)



$$f(\alpha) = \frac{1}{2} (4 + \cos(6\alpha))^2$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi - 0}{60} = \frac{\pi}{30}$$

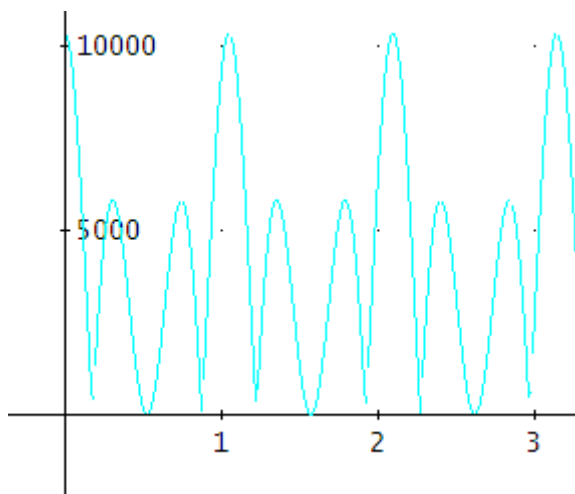
$$A = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{30} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^{29} f\left((2k+1) \frac{\pi}{30} \right) + 2 \sum_{k=1}^{29} f\left(2k \frac{\pi}{30} \right) + f(2\pi) \right] \approx \mathbf{51.83627878 \text{ u}^2}$$

b)

$E \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \cdot M$, siendo M una cota de la derivada cuarta de f en valor absoluto en el intervalo $(0, 2\pi)$.

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \mid a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| 5184 \cos(12\alpha) + 5184 \cos(6\alpha) \right| \mid 0 \leq \alpha \leq 2\pi \right\}$$





Integración aproximada



Luego, puede tomarse $M = 11000$

$$E \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^4}{180}(2\pi-0) \cdot 11000 \approx \mathbf{0.046175809}$$

c)

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^4}{180}(2\pi-0) \cdot 11000 < \frac{1}{1000} \Rightarrow |n| > 156.4065298$$

Basta tomar, $\mathbf{n = 158}$.

Integración aproximada

23.- a) Calcular de forma aproximada (trapezios, con $n = 20$) la longitud de arco, correspondiente al intervalo $1 \leq t \leq 2$, de la curva con ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad y(t) = t + 1$$

b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior.

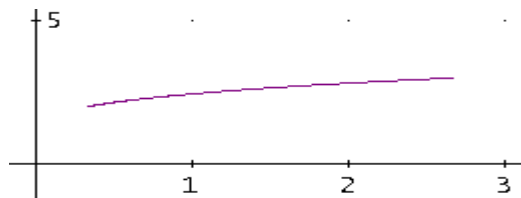
c) ¿En cuántos subintervalos habría que dividir el intervalo $[1, 2]$ para que el error cometido fuera menor que una diezmilésima?

Solución

a)

Las derivadas de las funciones x e y son

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{3}t^3 \\ y(t) = t + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x'(t) = t^2 \\ y'(t) = 1 \end{array} \right\}$$



Luego la longitud del arco de curva entre 1 y 2 viene dada por la integral:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_1^2 \sqrt{(t^2)^2 + (1)^2} dt = \int_1^2 \sqrt{t^4 + 1} dt$$

La función integrando es $f(t) = \sqrt{t^4 + 1}$ con $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{20} = \frac{1}{20}$

El valor aproximado de la integral es

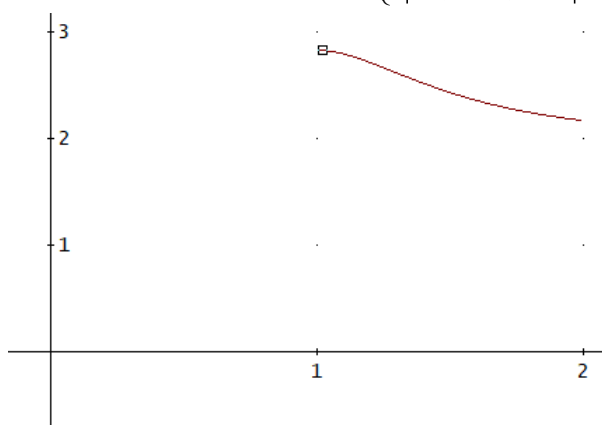
$$L = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) = \frac{1}{20} \left(f(1) + 2 \sum_{k=1}^{19} f\left(1+k\frac{1}{20}\right) + f(2) \right) \approx \mathbf{2.564568906}$$

unidades lineales

b)

Máximo, en $[1,2]$ de la segunda derivada (en valor absoluto) de la función integrando:

$$M = \max \left\{ \left| f''(t) \right| / a \leq t \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{2t^2(t^4 + 3)}{(t^4 + 1)^{3/2}} \right| / 1 \leq t \leq 2 \right\}$$



Observamos que la función es estrictamente decreciente en $[1,2]$ luego el máximo se alcanza en $t = 1$

Por comodidad tomamos 3 como cota, en consecuencia, una estimación del error cometida en la aproximación del valor de la integral mediante la fórmula de los trapezios es



Integración aproximada



$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{20}\right)^2}{12} (2-1) 3 \approx \mathbf{0.000625}$$

Luego $2.564568906 - 0.000625 < L < 2.564568906 + 0.000625$

Es decir $2.563943905 < L < 2.565193905$

Por tanto, $L = \mathbf{2.56 u}$, cifras decimales exactas.

c)

Nos planteamos la inecuación

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{12} (2-1) 3 < \frac{1}{10000} = 10^{-4} \Rightarrow |n| > 50$$

Luego necesitamos tomar al menos $\mathbf{n=51}$ para obtener un resultado con un error menor que 0.0001



Integración aproximada



24.- La planta de un edificio singular tiene aproximadamente la forma de la siguiente

curva dada por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

a) Calcular de forma aproximada, utilizando el método de Simpson con $n = 40$, el área de la planta de dicho edificio.

b) Acotar el error cometido en el cálculo de a).

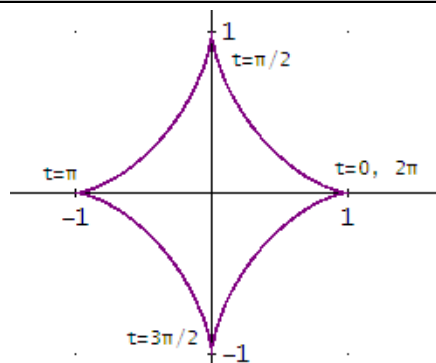
c) Si se quisiera obtener un resultado con un error menor que $\frac{1}{10000}$, ¿cuántos subintervalos habría que tomar?

Nota: La fórmula del área encerrada por una curva dada

por sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ y el eje OX es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt$$

Solución:



a)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt = 4 \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t (-3 \sin t \cos^2 t) dt = 12 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t \cos^2 t) dt$$

$$f(t) = 12 \sin^4 t \cos^2 t \quad \text{con } h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{40} = \frac{\pi}{80}$$

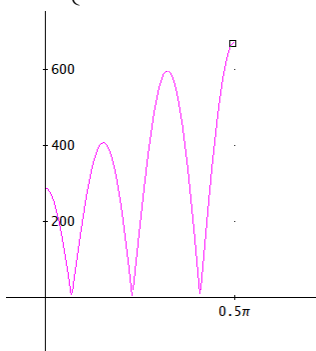
$$A = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^{19} f\left((2k+1) \frac{\pi}{80} \right) + 2 \sum_{k=1}^{19} f\left(2k \frac{\pi}{80} \right) + f\left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \approx \mathbf{1.178097245}$$

b)

$E \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \cdot M$, siendo M una cota de la derivada cuarta de f en valor absoluto en el intervalo $(0, \pi/2)$.

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| 5552 \cos^6 x - 24864 \cos^4 x + 10272 \cos^2 x - 672 \right| / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$





Integración aproximada



Luego, puede tomarse $M = 670$

$$E \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{\pi}{80}\right)^4}{180} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) 670 \approx \underline{1.390470301 \cdot 10^{-5}}$$

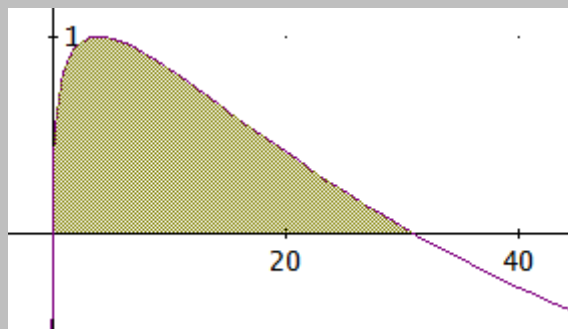
c)

$$E \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4}{180} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) 670 < \frac{1}{10000} \Rightarrow |n| > \mathbf{24.42589133}$$

Luego, ha de ser $\mathbf{n \geq 26}$.

Integración aproximada

25.- a) Calcular aproximadamente (Trapezios, $n = 100$) el área rayada de la figura limitada por un arco de la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = (t-1)^3 \\ y = \text{sen}(t-1) \end{cases}$ y el eje OX^+ .



b) Acotar el error cometido en el cálculo del apartado a).

c) Si se quisiera obtener el área con un error menor que una milésima, ¿cuántos subintervalos habría que tomar?

Solución:

a) Primeramente, calculamos los puntos de intersección con el eje de abscisas:

$$y = \text{sen}(t-1) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 1 - \pi \Rightarrow x < 0 \\ 1 \Rightarrow x = 0 \\ 1 + \pi \Rightarrow x = \pi^3 \end{cases} \quad \text{y resulta que: } x'(t) = 3(t-1)^2$$

Se trata entonces de calcular la integral:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_1^{1+\pi} \text{sen}(t-1)3(t-1)^2 dt \Rightarrow f(t) = 3(t-1)^2 \text{sen}(t-1)$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1+\pi-1}{100} = \frac{\pi}{100}$$

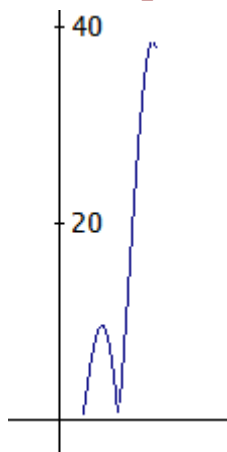
$$A = \left[\frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left(f(1) + 2 \sum_{k=1}^{99} f\left(1+k \frac{\pi}{100}\right) + f(1+\pi) \right) \approx$$

$$\mathbf{17.60637798} \text{ u}^2$$

b) Acotación del error

$$M = \max \left\{ |f''(x)| / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ |12(x-1)\cos(x-1) - 3(x^2 - 2x - 1)\text{sen}(x-1)| / 1 \leq x \leq 2 \right\}$$

Integración aproximada



$M=40$ (o bien, más ajustado 37.69911185)

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) M < \frac{\left(\frac{\pi}{100}\right)^2}{12}(1+\pi-1) 40 \approx \mathbf{0.01033542556}$$

c) Para que el error fuera menor que una milésima:

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) M < \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{12}(1+\pi-1) 40 < \frac{1}{1000} \Rightarrow |n| > 321.4875667.$$

Habría de ser al menos $\mathbf{n = 322}$.



Integración aproximada



26.- Se quiere calcular el volumen de un balón de rugby obtenido mediante la rotación alrededor del eje OX de un arco de la cicloide.

a) Calcular de forma aproximada el volumen de dicho balón, utilizando el método de Simpson con $n = 40$.

b) Acotar el error cometido en el cálculo del apartado a).

c) Si se quisiera obtener el volumen con un error menor que una diezmilésima, ¿cuántos subintervalos bastaría tomar?

Solución:

a) La fórmula para obtener un volumen de revolución de este tipo es:

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) x'(t) dt. \text{ Se realizarán todos los cálculos aproximando la integral sin}$$

tener en cuenta el factor π , por el que se multiplicará al final para obtener el volumen aproximado.

Arco de la cicloide de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t - \text{sent} \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) x'(t) dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \Rightarrow f(t) = (1 - \cos t)^3 \text{ con } h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi-0}{40} = \frac{\pi}{20}$$

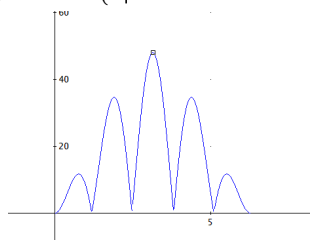
$$I = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^{19} f\left((2k+1) \frac{\pi}{20} \right) + 2 \sum_{k=1}^{19} f\left(2k \frac{\pi}{20} \right) + f(2\pi) \right] \approx \boxed{15,70796326}$$

Luego el volumen aproximado del balón es: $\pi I \approx \boxed{49,348032198 \text{ u}^3}$

b) $E \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \cdot M$, siendo M una cota de la derivada cuarta de f en valor absoluto en el intervalo $(0, 2\pi)$.

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right| \mid a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| -81 \cos^3 x + 48 \cos^2 x + 57 \cos x - 24 \right| \mid 0 \leq x \leq 2\pi \right\}$$



Luego, puede tomarse $M = 50$

$$E \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{\pi}{20} \right)^4}{180} (2\pi-0) 50 \approx \boxed{0,001062568349}$$

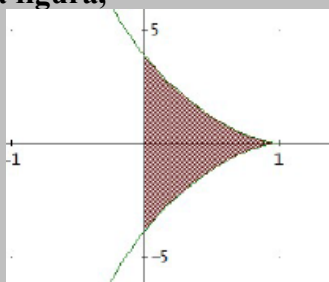
c)

$$E \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{2\pi}{n} \right)^4}{180} (2\pi-0) 50 < \frac{1}{10000} \Rightarrow |n| > \boxed{7221862413}$$

Luego, ha de ser $\boxed{n \geq 74}$, ya que n ha de ser un número par.

Integración aproximada

27.- a) Utilizando el método de Simpson con 20 subintervalos, calcular de manera aproximada el área rayada de la figura,



limitada por los ejes coordenados y la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^3 \end{cases}$.

b) Acotar el error cometido en la aproximación anterior y dar el valor del área con cifras decimales exactas. c) ¿Cuántos subintervalos serían necesarios para calcular el área con un error menor que 10^{-6} ?

Solución:

a) Primeramente, calculamos los puntos de intersección con el eje de abscisas:

$$x = \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{y resulta que: } x'(t) = -\text{sent}$$

$$y = t^3 = 0 \Rightarrow t = 0$$

Se trata entonces de calcular la integral:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{\pi/2}^0 t^3(-\text{sent})dt = \int_0^{\pi/2} t^3 \text{sent} dt \Rightarrow f(t) = t^3 \text{sent}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{20} = \frac{\pi}{40}$$

$$A = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{120} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^9 f\left((2k+1) \frac{\pi}{40} \right) + 2 \sum_{k=1}^9 f\left(2k \frac{\pi}{40} \right) + f\left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \approx \boxed{1,402199878} u^2$$

Ahora bien, por la simetría respecto el eje de abscisas el área total será $2(1,402199878) = \boxed{2,804399755} u^2$

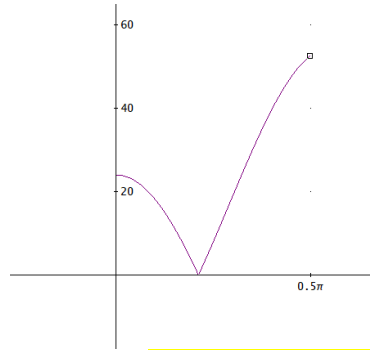
b) Acotación del error: $E \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \cdot M$, siendo M una cota de la derivada cuarta de f en valor absoluto en el intervalo $(0, \pi/2)$.

$$M = \max \left\{ |f^{(4)}(t)| \mid a \leq t \leq b \right\} = \max \left\{ |(24-12t^2)\text{cost} + (t^3-36t)\text{sent}| \mid 0 \leq t \leq \pi/2 \right\}$$

Luego, puede tomarse $M = 53$



Integración aproximada



$$E \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{\pi}{40}\right)^4}{180}(\pi/2-0)53 \approx 1.759878829 \cdot 10^{-5}$$

Luego $2,804399755 - 1,759878829 \cdot 10^{-5} < A < 2,804399755 + 1,759878829 \cdot 10^{-5}$

Es decir $2,804382156 < A < 2,804417353$

Por tanto, $A = 2,804$ u, cifras decimales exactas.

c) Para que el error fuera menor que una millonésima:

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180}(b-a) \cdot M < \frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4}{180}(\pi/2-0)53 < 10^{-6} \Rightarrow |n| > 40.96384247.$$

Habría de ser al menos $n=42$, ya que tiene que ser par



Integración aproximada



28.- Queremos obtener un valor aproximado de $\ln 2$, sabiendo que $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

a) Mediante la regla de los trapecios ($n=6$). Calcular el error.

b) Regla de Simpson ($n=6$). Calcular el error.

c) ¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-7} ?

Solución:

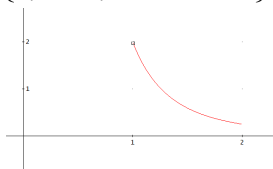
a) Cálculo del área mediante la regla de los trapecios: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$I = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) = \frac{1}{6} \left(f(1) + 2 \sum_{k=1}^5 f\left(1+k\frac{1}{6}\right) + f(2) \right) \approx \mathbf{0,6948773448}$$

$$\text{Siendo } h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

Cota del error cometido:

$$M = \max \left\{ |f''(x)| / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{2}{x^3} \right| / 1 \leq x \leq 2 \right\}$$



Puede tomarse $M = 2$

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{12} (2-1) 2 \approx \mathbf{0,004629629629}$$

$$0,6948773448 - 0,004629629629 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 0,6948773448 + 0,004629629629$$

$$0,6885175508 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 0,6977768101$$

Luego, $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \mathbf{0,6}$ expresada con cifras exactas.

b) Aproximamos la integral mediante Simpson $n=6 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{6}$

$$I = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a+(2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a+2kh) + f(b) \right] =$$
$$= \frac{1}{3} \left[f(1) + 4 \sum_{k=0}^2 f\left(1 + \frac{2k+1}{6}\right) + 2 \sum_{k=1}^2 f\left(1 + \frac{2k}{6}\right) + f(2) \right] \approx \mathbf{0,6931697931}$$

Una cota del error

$$M = \max \left\{ |f^{(4)}(x)| / a \leq x \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{24}{x^5} \right| / 1 \leq x \leq 2 \right\}$$

El máximo de la cuarta derivada se alcanza en $x=0$ y una cota es: $M = 24$, luego la cota de error con esta cota de la derivada es



Integración aproximada

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^4}{180} (2-1) 24 \approx 0,0001028806584 < \mathbf{0,0002}$$

$$0,6931697931 - 0,0001028806584 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 0,6931697931 + 0,0001028806584$$

$$0,6930669124 < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 0,6932726737$$

Luego, $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \mathbf{0,693}$ expresada con cifras exactas.

$$\text{c) } |R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{180} (2-1) 24 < 10^{-7} \Rightarrow |n| > 33,98088489$$

Basta tomar $\mathbf{n = 34}$.



Integración aproximada

29.- Obtener el área correspondiente al logo del caramelo CHUPA CHUS, sabiendo que corresponde a la curva $r = \text{sen}\left(\frac{4\alpha}{3}\right)$ entre 0 y 6π .

a) Mediante la regla de los trapecios ($n=6$). Dar una cota del error.

b) Regla de Simpson ($n=6$).

Solución:

a) Cálculo del área mediante la regla de los trapecios: $f(x) = \frac{1}{2} \text{sen}^2\left(\frac{4\alpha}{3}\right)$

$$I = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right) = \frac{\pi}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{k=1}^5 f(0+k\pi) + f(6\pi) \right) =$$

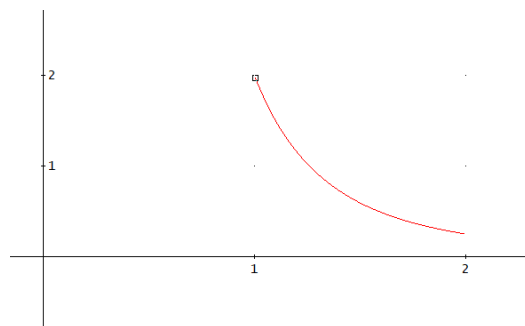
$$= \frac{\pi}{2} (f(0) + 2(f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + f(4\pi) + f(5\pi)) + f(6\pi)) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(0 + 2 \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 0 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right) + 0 \right) = \frac{3\pi}{2} \approx \mathbf{4,712388980}$$

Siendo $h = \frac{b-a}{n} = \frac{6\pi-0}{6} = \pi$

Cota del error cometido:

$$M = \max \left\{ |f''(\alpha)| / a \leq \alpha \leq b \right\} = \max \left\{ \left| \frac{16}{9} \cos\left(\frac{8\alpha}{3}\right) \right| / 0 \leq \alpha \leq 6\pi \right\}$$



Puede tomarse $M = 2$

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M < \frac{\pi^2}{12} (6\pi-0) 2 = \pi^3 \approx \mathbf{31.00627668}$$



Integración aproximada

b) Aproximamos la integral mediante Simpson $n=6 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{6\pi-0}{6} = \pi$

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{(n-2)/2} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f(a + 2kh) + f(b) \right] = \\ &= \frac{\pi}{3} \left[f(0) + 4 \sum_{k=0}^2 f((2k+1)\pi) + 2 \sum_{k=1}^2 f(2k\pi) + f(6\pi) \right] = \\ &= \frac{\pi}{3} (f(0) + 4(f(\pi) + f(3\pi) + f(5\pi)) + 2(f(2\pi) + f(4\pi)) + f(6\pi)) = \\ &= \frac{\pi}{3} \left(0 + 4 \left(\frac{3}{8} + 0 + \frac{3}{8} \right) + 2 \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right) + 0 \right) = \frac{3\pi}{2} \approx \mathbf{4.712388980} \end{aligned}$$

Una cota del error

$$M = \max \left\{ \left| f^{(4)}(\alpha) \right| \mid a \leq \alpha \leq b \right\} = \max \left\{ \left| -\frac{1024}{21} \cos\left(\frac{8\alpha}{3}\right) \right| \mid 0 \leq \alpha \leq 6\pi \right\}$$

El máximo de la cuarta derivada se alcanza en $x=0$ y una cota es: $M = 1024/81$, luego la cota de error con esta cota de la derivada es

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M < \frac{\pi^4}{180} (6\pi-0) \frac{1024}{81} \approx \mathbf{128.9564433}$$

Longitud de un arco de curva

Sea $y=f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y con derivada continua en (a, b) .

La longitud de la curva $y=f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$, es : $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

- Si la curva viene dada en paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

- Si la curva viene dada en coordenadas polares $r = f(\theta)$, entonces:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

- Para una curva en el espacio definida por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la longitud de una

arco de curva es: $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$

Fórmula de los trapecios

Sustituiremos en este caso la función f por una poligonal con vértices en la gráfica de f . Para la misma partición anterior P_n , llamemos A_i , al punto (x_i, y_i) y consideremos los trapecios de bases y_{i-1} e y_i , y lados $x_i - x_{i-1}$ y $A_{i-1}A_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

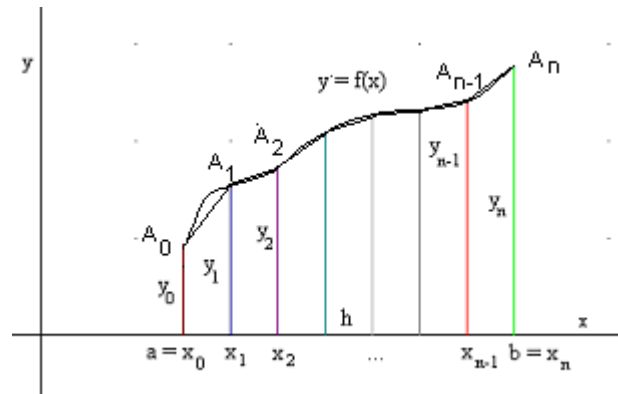


Imagen 2

La suma de las áreas de estos trapecios constituye una aproximación de I mejor que la dada por las fórmulas (1) y (2):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h = \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + \dots + y_{n-1})] \quad (3)$$

Error en la fórmula de los trapecios:

Puede demostrarse que existe un número $c \in [a, b]$ tal que el error cometido en la aproximación anterior es de la forma:

$$R_n = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(c)$$

Si $f''(x)$ es una función acotada en $[a, b]$ y llamamos $M = \max\{|f''(x)| \mid a \leq x \leq b\}$, se tiene entonces que:

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M$$

La estimación por el método de los trapecios es exacta para polinomios de primer grado (tienen nula la segunda derivada). El factor clave como indicador del error es h^2 . Si reducimos h a la mitad, el error se reduce en un factor 4.

Fórmula de Simpson o de las parábolas

En esta ocasión, imponemos que la partición P_n dé lugar a un número par de subintervalos en $[a, b]$, haciendo $n = 2m$.

Se trata de sustituir el área limitada por la función f , el eje OX y las rectas $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$ ($i = 1, 3, 5, \dots$) por el área limitada por la parábola que pasa por los puntos A_{i-1}, A_i, A_{i+1} , el eje OX y las rectas $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$.

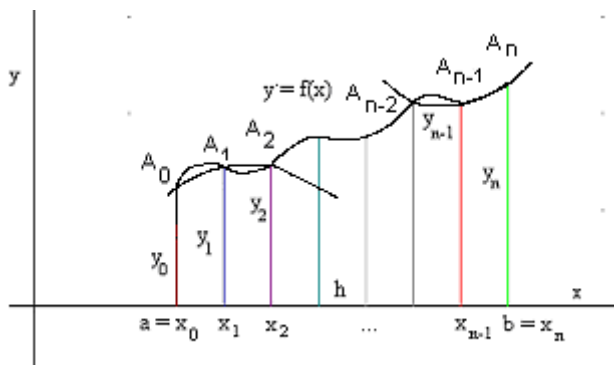


Imagen 3

La parábola que pasa por $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$ tiene de ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$, pudiendo considerar $x_0 = 0, x_1 = h$ y $x_2 = 2h$.

Por tanto, una aproximación del área total es:

$$\begin{aligned}
 I = \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)] = \\
 &= \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})] \quad (4)
 \end{aligned}$$

Error en la fórmula de Simpson:

Puede demostrarse que existe un número $c \in [a, b]$ tal que el error cometido en la aproximación anterior es de la forma:

$$R_n = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(c)$$

Si $f^{(4)}(x)$ es una función acotada en $[a, b]$ y llamamos $M = \max\{|f^{(4)}(x)| / a \leq x \leq b\}$, se tiene entonces que:

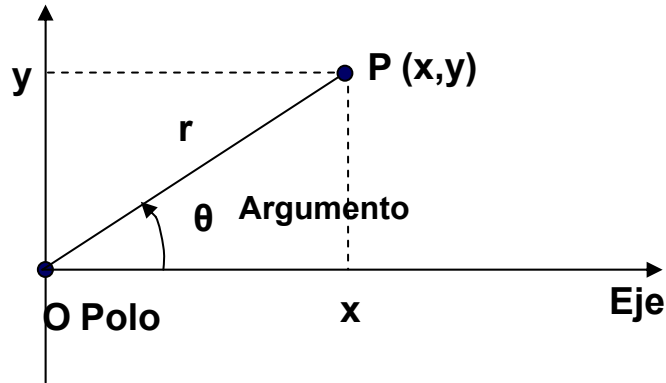
$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)M$$

El método de Simpson es exacto para todo polinomio de grado tres (tiene nula la derivada cuarta).

Coordenadas polares

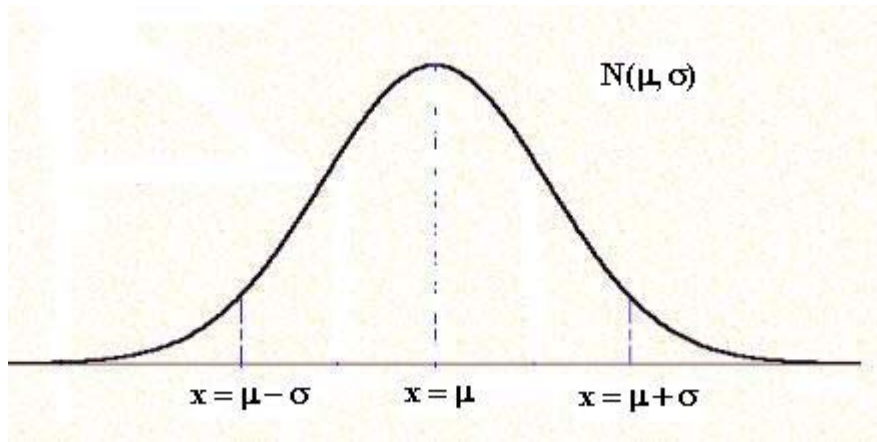
Sea O un punto fijo del plano, denominado “**polo**” y sea la semirrecta de origen O, denominada “**eje polar**”. Entonces cualquier punto del plano P, queda determinado por el par (r, θ) siendo r la distancia euclídea del punto P al polo ($r > 0$) y θ el **argumento**, el ángulo formado por el eje

polar y el segmento OP en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj).
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



Distribución Normal.

Una variable aleatoria continua X se dice que tiene una **distribución normal** o de **Laplace-Gauss** de media μ y desviación típica σ : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ es su función de densidad.



es la llamada “**campana de Gauss**”.

La función de distribución es: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$

La **esperanza matemática o media** es μ y la **varianza** es σ^2 . Se denota $N(\mu, \sigma)$.

La Normal tipificada o estándar

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \equiv N(0, 1)$$

Fórmula de los rectángulos

En este método sustituiremos la función f por una función escalonada que la aproxime en el intervalo $[a, b]$.

Sea $P_n = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea h la amplitud de cada subintervalo de la partición, $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i = 1, \dots, n$, es decir, $h = \frac{b-a}{n}$.

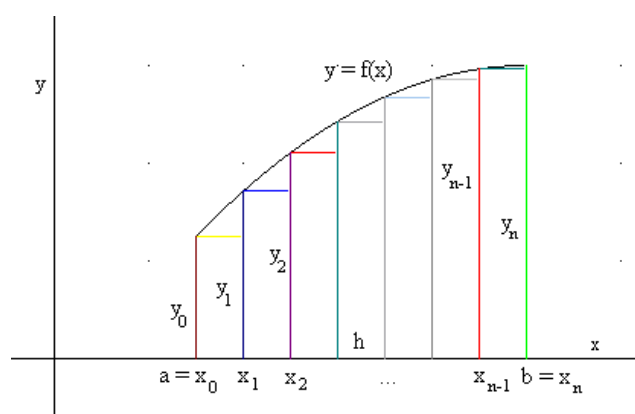


Imagen 1

Si consideramos los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura y_{i-1} , para $i = 1, \dots, n$, la suma de sus áreas constituye una aproximación del valor de I :

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}(y_0 + \dots + y_{n-1}) \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que la función f de la **Imagen 1** es creciente, la expresión anterior nos daría una aproximación por defecto del valor exacto de la integral I .

También pueden considerarse los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura y_i , para $i = 1, \dots, n$, obteniéndose otra aproximación de I (en este caso, para la función de la **Imagen 1**, por exceso):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx y_1 h + y_2 h + \dots + y_n h = h(y_1 + \dots + y_n) = \frac{b-a}{n}(y_1 + \dots + y_n) \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) se llaman **fórmulas de los rectángulos**. El error cometido al aplicarlas disminuye a medida que aumenta n .

Área de una curva en coordenadas polares

Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, siendo $f(\theta)$ continua en $[\theta_1, \theta_2]$. El **área** del sector limitado por la curva $r = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ es:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

Área de una figura plana

- Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. El **área** de la región del plano determinada por $f(x)$, el eje OX, y las abscisas $x=a$, $x=b$ es $\int_a^b |f(x)| dx$
- Si la curva viene dada en paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)| dt$
- Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, el **área** de la región del plano comprendida entre sus gráficas es $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Área de una curva en coordenadas polares

Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, siendo $f(\theta)$ continua en $[\theta_1, \theta_2]$. El **área** del sector limitado por la curva $r = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ es:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

Área de una figura plana

- Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. El **área** de la región del plano determinada por $f(x)$, el eje OX, y las abscisas $x=a$, $x=b$ es $\int_a^b |f(x)| dx$
- Si la curva viene dada en paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)| dt$
- Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, el **área** de la región del plano comprendida entre sus gráficas es $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma $x=x(t)$, $y=y(t)$ donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

En el **plano**: siendo $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector director.

$$\text{Ecuaciones paramétricas de la recta: } \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

En el **espacio**: Siendo $P=(p_1, p_2, p_3)$ un punto cualquiera y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector director de la recta.

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$$

Volúmenes de cuerpos de revolución

Se llama **sólido de revolución** al generado por la rotación de una región del plano alrededor de un eje situado en él. Si la región está definida por $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ y $f(x)$ es continua en $[a, b]$ el **volumen** es:

a) $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ alrededor del eje OX.

b) $V = \pi \int_c^d x^2 dy$ alrededor del eje OY.

c) Si la generatriz es una curva cerrada, $V = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx$.

d) Si la curva viene dada en paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) x'(t) dt$

e) Si la curva viene dada en coordenadas polares $r = f(\theta)$, al girar alrededor del eje polar se obtiene: $V = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \sin \theta d\theta$

Volúmenes por secciones

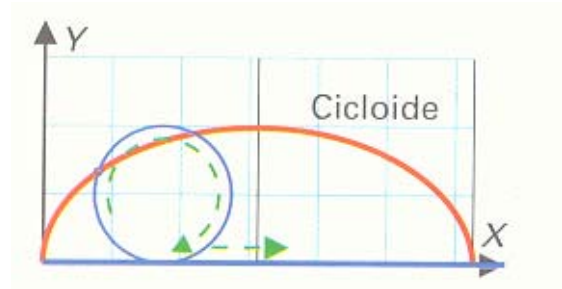
Dado un cuerpo, si se conoce la expresión del área $A(x)$ de toda sección producida en ese cuerpo, por un plano perpendicular al eje OX en función de la abscisa x del punto donde el plano corta al eje, el **volumen** es: $V = \int_a^b A(x) dx$.

Cicloide

Es el lugar descrito por un punto fijo P de una circunferencia que rueda sin deslizarse por una recta fija.

En coordenadas cartesianas, las ecuaciones

$$\text{paramétricas son: } \begin{cases} x = r (t - \text{sent} t) \\ y = r (1 - \cos t) \end{cases}$$



Problema propuesto por Johan **BERNOULLI** (1696)

- Entre todas las curvas que unen dos puntos del plano la curva de descenso más rápido (**braquistócrona**) es la cicloide. Un ejemplo de arco de cicloide son las pistas de salto de esquí.
- Es **tautocrona**: si invertimos una cicloide y dejamos caer rodando dos canicas a diferente altura (sin rozamiento), las dos llegarán al punto más bajo al mismo tiempo.
- Es **isócrona**: el período de un péndulo no varía cuando este oscila entre dos cicloides, siendo la trayectoria otra cicloide.