



## Integrales

1.- Calcular las **derivadas** de las siguientes funciones:

a)  $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t} (\sin t + \cos t) dt$

b)  $G(x) = \int_0^{x^3} \sin x \cos t dt$ .

**Solución**

2. a) Estudiar la **convergencia** y, cuando sea posible, calcular las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{(3-x)^2}$$

b) Estudiar la **convergencia** y, en su caso, calcular el valor de la **integral** y el **área** encerrada entre la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$  y el eje de abscisas (OX) en el intervalo  $[-2, 2]$ .

**Solución**

3.- Hallar el **área** de la región contenida entre las curvas:

$$Y_1 = \frac{1}{x^2 - 1}, Y_2 = \frac{1}{x^3 + x} :$$

- a) En el intervalo  $[2, 3]$
- b) Para  $x \geq 3$

**Solución**

4.- Calcular  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  y  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

**Solución**

5.- Analizar el carácter de las siguientes **integrales** impropias

a)  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  con  $p > 0$

b)  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^3} dx$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

**Solución**

6.- Dada la función  $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$  se pide:

- a) **Área** encerrada por la función y el eje de abscisas
- b) **Volumen** engendrado al girar la curva alrededor del eje de abscisas

**Solución**

7.- Hallar la **longitud** de las siguientes curvas, dadas en coordenadas polares.

a)  $r^2 = 3\sin(2\alpha)$

b)  $r = 2\sin(3\alpha)$

**Solución**



## Integrales



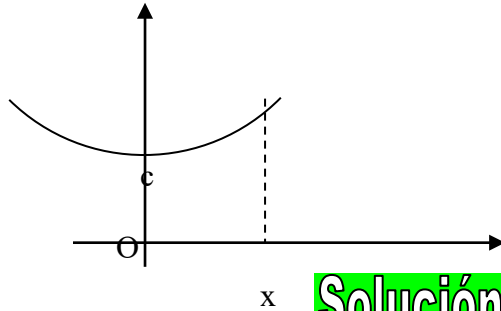
8.- Calcular el **área** encerrada dentro de la curva  $\begin{cases} x(t) = 3 + 2 \cos t \\ y(t) = 2 + 5 \sin t \end{cases}$

**Solución**

9. Dos alumnos de la Escuela sostienen una cinta por sus extremos, a la misma altura. La cinta describe una curva que se denomina catenaria, y cuya ecuación

$$\text{es: } y = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c}\right)$$

Calcular la **longitud** de la cinta hasta un cierto valor de la abscisa  $x$ .



**Solución**

10.- Un depósito esférico de 50 m de radio está al 21,6 % de su capacidad ¿Cuál es la profundidad del agua?

**Solución**

11.- Hallar el **volumen** del sólido cuya base es la región limitada por el eje  $x$  y el arco de curva  $y = \operatorname{sen} x$  entre  $x = 0$  y  $x = \pi$  y cuyas secciones planas perpendiculares al eje  $x$  son cuadrados con base en la región.

**Solución**

12.- Calcular la **longitud** y el **área** encerrada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\cos(t)[2 - \cos(2t)]}{4} \\ y(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)[2 + \cos(2t)]}{4} \end{cases}$$

**Solución**

13.- Dada la **hipérbola**  $x^2 - y^2 = 1$ . Hallar:

a) El **área** encerrada por la **hipérbola** y la recta que pasa por su **foco** de abscisa positiva.

b) El **área** encerrada por la **hipérbola** y su **asíntota** siendo  $x \geq 1$ .

c) La **superficie** de revolución del **casquete** hiperbólico formado al girar la **hipérbola** respecto del eje  $X$  siendo  $x \in [1, \sqrt{2}]$ .

**Solución**



## Integrales

14.- Para un arco de *cicloide*  $\begin{cases} x(t) = a(t - \text{sent}) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$ . Se pide:

- El *área* encerrada por la curva y el eje de abscisas.
- La *longitud*.
- El *volumen* engendrado por la rotación del área encerrada por la curva y el eje X alrededor del eje OX.
- El *volumen* engendrado por la rotación del área encerrada por la curva y el eje X alrededor del eje OY.
- La *superficie* de revolución del cuerpo formado al girar un arco de la *cicloide* respecto del eje X.

### Solución

15.- Para la *cardioide* de ecuación  $r = 1 + \cos \alpha$ . Se pide:

- El *área* encerrada por la curva y el eje de abscisas.
- La *longitud*.
- El *volumen* engendrado por la rotación del *área* encerrada por la curva y el eje X alrededor del eje OX.
- La *superficie* de revolución del cuerpo formado al girar la curva respecto del eje X.

### Solución

16.- Determinar la curva que pasa por el punto  $(4\pi^2, 1)$  y cuya *pendiente*, en cada punto  $(x, y)$ , tal que  $x > 0$ , es  $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ .

### Solución

17.- Hallar el valor de  $\mu$  que cumpla que  $\int_0^2 f(x) dx = 2\mu$ , siendo

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 5 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{¿Existe algún punto } c \text{ del intervalo } [0, 2] \text{ tal que}$$

$f(c) = \mu$ ? ¿Contradice esto el *teorema del valor medio* integral?

### Solución

18.- Dadas las funciones  $f(x) = \text{sen}(2x)$  y  $g(x) = \text{tg}x$ , se pide:

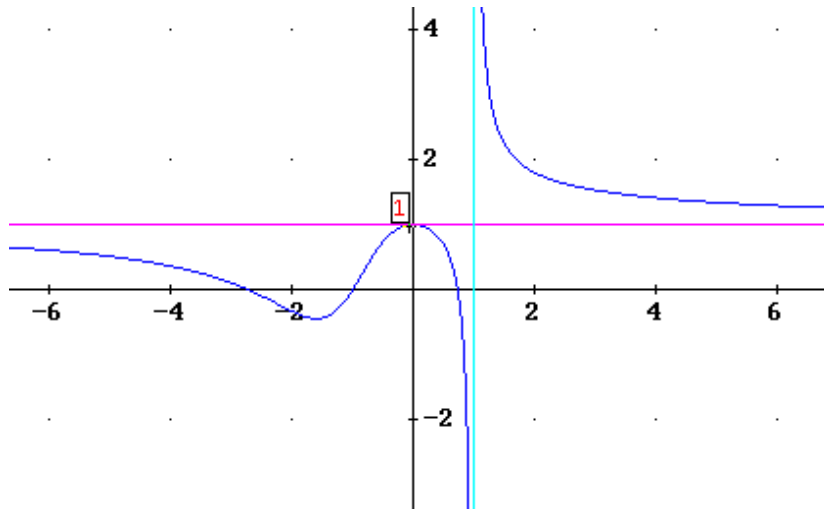
- Hallar los puntos de intersección de dichas funciones entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .
- Hallar el *área* de la región limitada por dichas funciones entre los puntos de corte hallados en el apartado anterior.

### Solución



## Integrales

19.- Dada la función  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2}$ , cuya gráfica es la de la figura, se pide:



- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$ ,  $x = -2$  y el eje  $Y$ .
- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$  y el eje  $X$  en el intervalo  $[-1, 0]$ .
- ¿Cómo podrías calcular el **área** encerrada por  $f(x)$  y la recta  $y = 1$  en  $[2, \infty)$ ?

**Solución**

20.- Analizar, aplicando algún criterio de **convergencia** el carácter de las integrales siguientes:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx, \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx .$$

**Solución**

21.- Para la función  $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-3}$ , determinar:

- El **área** encerrada por la función y el eje de abscisas.
- El **volumen** generado al girar el recinto limitado por la curva  $y = f(x)$  y el eje de abscisas alrededor de dicho eje.

**Solución**

22.- Calcular la **longitud** de una elipse de semiejes 3 y 4.

**Solución**

23.- a) Hallar el **área** limitada por la curva  $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$  y sus asíntotas.

b) Hallar el **volumen** generado por la curva cuando gira alrededor del eje  $x$ , entre 0 y  $1/2$ .

**Solución**

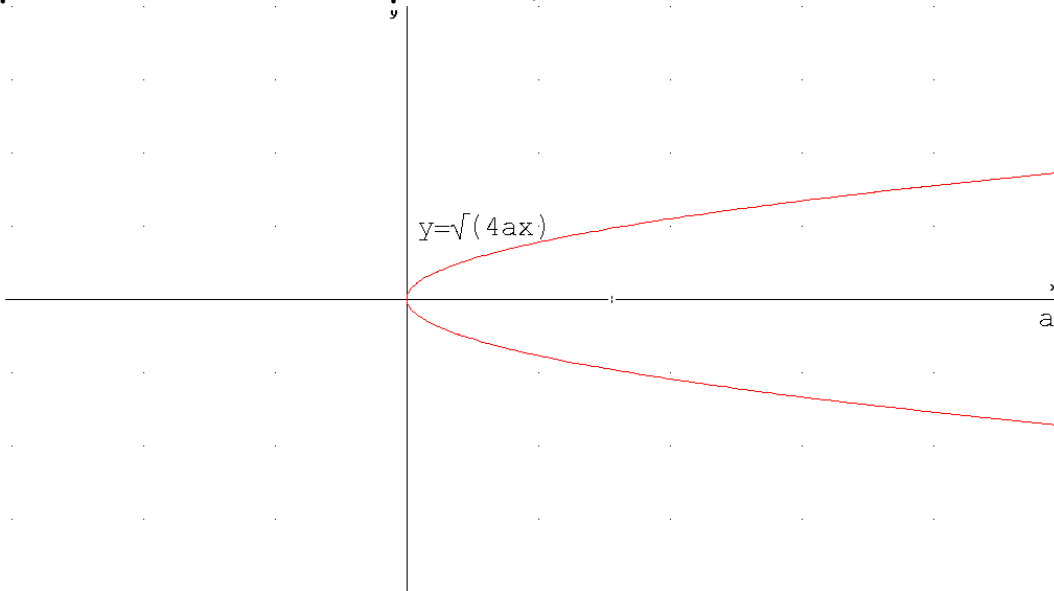


## Integrales

24.- Una vaca está atada a uno de los vértices de un prado de forma cuadrada de lado 10 m. Sabiendo que la longitud de la cuerda es 12 m, calcular la **superficie** de hierba que puede comer la vaca.

**Solución**

25.- Un faro tiene forma de espejo parabólico como el de la figura. Sabiendo que el material reflectante del faro tiene un precio de 10 euros/m<sup>2</sup>, hallar el precio de dicho material para a=0,15m.



**Solución**

26.- Calcular la **superficie** y el **volumen** encerrado por las siguientes figuras geométricas:

- Esfera**
- Cilindro** recto de radio R y altura H
- Cono** recto de radio R y altura H
- Tronco de cono** recto de radios R<sub>1</sub> y R<sub>2</sub> y altura H

**Solución**

27.- a) Calcular el **volumen** del sólido de revolución engendrado al girar la región

limitada por las funciones  $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$  alrededor del eje de abscisas.

b) Sean  $\begin{cases} r = 2 \\ r = \sqrt{8\text{sen}(2\alpha)} \end{cases}$  las ecuaciones en coordenadas polares de dos curvas planas. Calcular el **área** común a ambas en el primer cuadrante

**Solución**

28.- Hallar el **área** común a los círculos  $r=2 \cos(\alpha)$ ,  $r=1$ ,  $r=2 \text{sen}(\alpha)$

**Solución**



## Integrales



29.- Hallar:

a) **Longitud** total de la curva, dada en **coordenadas polares**,  $r = \operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ .

b) **Área** de la **superficie de revolución** obtenida al girar, alrededor del eje de abscisas, la curva de **ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \operatorname{sen} t \end{cases} \text{ para } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

c) **Área** limitada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Solución**

30.- Calcular  $\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$

**Solución**

31.- a) La base de un sólido es la región comprendida entre las **parábolas**  $x = y^2$ ,  $x = 3-2y^2$ . Hallar el **volumen** del sólido sabiendo que las secciones perpendiculares al eje son triángulos **equiláteros**.

b) Hallar la **longitud** del primer lazo (en el primer cuadrante) de la curva  $r = 2 \operatorname{sen}(3\alpha)$

c) Analizar, sin calcular, la **convergencia** de la integral  $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

**Solución**

32.- Dada la curva plana  $y^2 = (2-x)^3/x$  (**cisoide**), se pide:

a) **Longitud** del arco de curva para  $x \in [1, 2]$

b) **Área** de la región comprendida entre la **cisoide** y su **asíntota**.

c) **Volumen** que engendra la región comprendida entre la **cisoide** y su **asíntota** al girar alrededor del eje de abscisas.

d) **Área** de la **superficie de revolución** para  $x \in [1, 2]$ .

**Solución**

33.-a) Hallar el **área** de la porción de **esfera** generada al girar, en torno al eje  $y$ , la gráfica de la función  $y = \sqrt{9-x^2}$  en  $0 \leq x \leq 2$ .

b) Hallar la **longitud** de arco de la curva dada por las **ecuaciones paramétricas**

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \text{ en el intervalo } 1 \leq t \leq 2$$

c) Estudiar, sin calcular, la **convergencia** de la integral  $\int_0^3 \frac{1}{x^2 - 2x} dx$ .

**Solución**



## Integrales

34.- Hallar el **perímetro** de la curva  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

### Solución

35.- a) Hallar el **perímetro** del recinto limitado por la curva  $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$  y la recta  $y=1$ .

b) Hallar la **longitud** de las siguientes curvas:

- **cardioide**  $\begin{cases} x = 2\sin t - \sin(2t) \\ y = 2\cos t - \cos(2t) \end{cases}$
- **espiral**  $r = e^\alpha$  para  $\alpha < 0$

### Solución

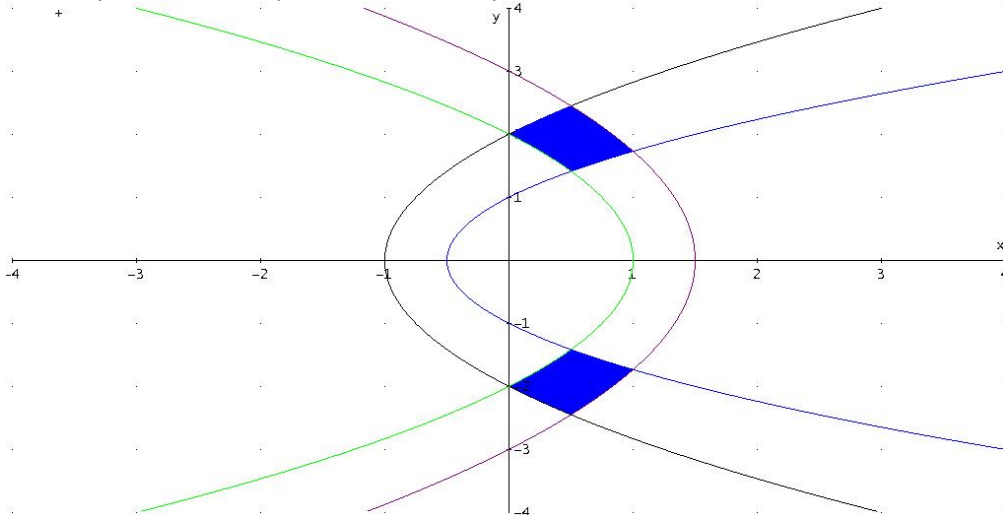
36.- Estudiar la naturaleza de la siguiente integral en función de los valores de  $p$   $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$  y calcularla cuando sea **convergente**.

### Solución

37.- a) Hallar la **longitud** del arco de curva dada en **polares**  $r=4+2\sec(\alpha)$  en el intervalo  $[2\pi/3, 4\pi/3]$ .

b) Hallar el **área** marcada en la figura que encierran las **parábolas**:

$$y^2 = 2(x+1/2); y^2=4(x+1); y^2=6(3/2-x); y^2=4(1-x).$$



### Solución

38.- a) Estudiar si la integral  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} d\alpha$  es **impropia** y, en su caso, decir de qué tipo es. A continuación, calcularla aplicando la definición.

b) Hallar el **área** generada en la rotación de la mitad superior de la **cardioide**  $r = a(1 - \cos \theta)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , alrededor de su eje polar.

### Solución



## Integrales

39.- En cada instante  $t$ , la posición de un móvil viene determinada por las coordenadas:  $x = a \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ ,  $y = a \cdot \sin^3\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

Se pide:

- Longitud** del camino recorrido por el móvil entre los instantes  $t = 0$  y  $t = 1$ .
- Área** de la superficie obtenida por la revolución de la curva descrita por el móvil desde el inicio ( $t = 0$ ) hasta volver a la posición inicial, al girar alrededor del eje OX.
- Volumen** del sólido obtenido en el apartado anterior.

**Solución**

40.- Calcular el **área** delimitada por la curva  $r = \cos\theta$ .

**Solución**

41.- Calcular el **volumen** del elipsoide.

**Solución**

42.- Hallar el **volumen** engendrado por la rotación de la **circunferencia**  $x^2 + (y-4)^2 = 1$  al girar alrededor del eje OX.

**Solución**

43.- La curva  $r = a \sin(2\alpha)$  gira alrededor del eje polar. Calcular el **volumen** obtenido.

**Solución**

44.- Hallar la **longitud** total de la curva dada por las **ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

**Solución**

45.- Calcular la **longitud** del primer paso de la espiral de Arquímedes  $r = a\theta$  con  $a > 0$ .

**Solución**

46.- Dada la curva  $r = 3\cos(3\alpha)$

- Estudiar el **dominio** de  $r$ .
- Hallar el **área** limitada por los tres lazos de la curva del enunciado.

**Solución**

47.- a) Hallar la **longitud** del arco de la curva:

$$\begin{aligned} x &= \cos t + t \sin t \\ y &= \sin t - t \cos t \end{aligned}$$

desde el punto  $(1, 0)$  hasta el punto  $(-1, \pi)$ .

- Realizar una gráfica aproximada de la **longitud** que se pide.



## Integrales

c) Hallar el **área** encerrada entre la función  $\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}$  y el eje  $x$  entre  $0$  y  $\pi$ .

### Solución

48.- Dada la curva  $r^2 = 4 \cos(2\alpha)$ . Calcular:

- Dominio** de  $r$
- El **área** limitada por la curva dada (Explicar los límites de integración)

### Solución

49.- Se consideran las curvas cuyas ecuaciones en coordenadas polares son  $r = \sqrt{\alpha}$  y  $r = \sqrt{2(\alpha - 1)}$ . Calcular:

- El **área** encerrada entre ambas curvas entre sus puntos de intersección: el origen de coordenadas y el punto de intersección en el segundo cuadrante
- Perímetro** del recinto anterior.

### Solución

50.- Hallar la **longitud** del arco de la curva  $r = 1 + \cos\alpha$  (**cardioide**) que está situado en el primer cuadrante, respondiendo a los siguientes apartados:

- Dibujar la gráfica de la curva dada y sobre la gráfica resaltar la **longitud**  $L$  del arco de la curva que está situado en el primer cuadrante.
- Indicar y explicar los límites de integración.
- Escribir la fórmula teórica para calcular la **longitud** de una curva en forma polar.
- Solución del problema.

### Solución

51.- Sea la función  $f(x) = \sin x - x \cos x$ . Calcular aproximadamente el valor de:

- El **área** encerrada por  $f(x)$  y las rectas  $x = -\pi$ ,  $x = \pi$  y el eje  $OX$ .
- La **longitud** del arco de curva de la función  $y = f(x)$  entre los puntos  $(-\pi, -\pi)$  y  $(\pi, \pi)$ .
- La **superficie** de revolución generada por el arco de curva anterior al girar alrededor del eje de abscisas.

### Solución

52.- Hallar el **área** encerrada entre las funciones  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  y  $g(x) = \frac{1}{x^3}$  para  $x \geq 3$

### Solución



## Integrales

- 53.- Para la función  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  se pide: a) Representar la función  
 b) Calcular el **área** encerrada entre la función y el eje de abscisas  
 c) Calcular el **volumen** generado al girar el recinto limitado por  $f(x)$  y el eje de abscisas alrededor de dicho eje.

### Solución

- 54.- Para la curva dada en forma **paramétrica**  $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \end{cases}$  se pide, para el

intervalo  $1 \leq t \leq 10$ :

- a) Representar la gráfica  
 b) **Longitud** del arco  
 c) **Superficie** encerrada entre la curva y el eje de abscisas  
 d) **Volumen** de revolución engendrado al girar el área comprendida entre la curva  
 e) **Superficie** engendrada al girar alrededor del eje OX el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas

### Solución

- 55.- Hallar la **superficie de revolución** generado por la **lemniscata** de ecuación

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 4 \cos(t) \\ y(t) &= 4 \sin(t) \cos(t) \end{aligned} \right\} \text{al girar alrededor del eje de abscisas.}$$

### Solución

- 56.- Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  siendo  $p$  un número real tal que  $p > 1$  se pide

- a. Calcular paso a paso la integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  siendo  $a > 1$  un número real  
 b. Indicar de qué tipo de integral **impropia** se trata.

### Solución

- 57.- Dadas las siguientes curvas por sus **ecuaciones polares**:  $r_1(\alpha) = 2 \sin(2\alpha)$ ;  $r_2(\alpha) = 1$ , se pide:

- Calcular el **dominio** de las funciones  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 \geq 0$  ;  $r_2 \geq 0$ )
- Estudiar las **simetrías** de  $r_1$  y  $r_2$
- Obtener las intersecciones de  $r_1$  y  $r_2$
- Hacer un gráfico esquemático de ambas curvas
- Calcular el valor del **área** encerrada entre  $r_1$  y  $r_2$

### Solución

- 58.- Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  siendo  $p$  un número real tal que  $p < 1$  se pide

- a. Calcular paso a paso la integral  $\int_0^a f(x) dx$  siendo  $a > 1$  un número real.



## Integrales

b. Indicar de qué tipo de integral *impropia* se trata.

### Solución

59.- Dadas las siguientes curvas por sus *ecuaciones polares*:  $r_1(\alpha) = 2 \cos(2\alpha)$ ;  $r_2(\alpha) = 1$ , se pide:

- Calcular el *dominio* de las funciones  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 > 0$ ;  $r_2 > 0$ )
- Estudiar las *simetrías* de  $r_1$  y  $r_2$
- Obtener las intersecciones de  $r_1$  y  $r_2$
- Hacer un gráfico esquemático de ambas curvas
- Calcular el valor del *área* encerrada entre  $r_1$  y  $r_2$

### Solución

60.- Para la curva dada en forma *paramétrica*  $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \end{cases}$  se pide, para el

intervalo  $0 \leq x \leq 1$ :

- Longitud* de la curva en el intervalo  $x \in [0, 1]$  el eje de abscisas.
- Área* encerrada entre la curva y el eje de abscisas en dicho intervalo.

### Solución

61.- Dada la función  $f(x) = x^2$  obtener los siguientes volúmenes de revolución

- Volumen* engendrado al girar el área encerrada por la curva y el eje OX, entre  $x=0$  y  $x=2$ , alrededor del eje OX.
- Volumen* engendrado al girar el área encerrada por la curva y el eje OX, entre  $x=0$  y  $x=2$ , alrededor del eje OY.

### Solución

62.- Determinar las *áreas* siguientes:

a) Encerrada por la función  $f(x)$  y el eje OX siendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{x^4+6} & \text{si } -6 < x < 6 \\ \frac{3}{x^2-x-20} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Encerrada por la curva  $r(\theta) = |a \operatorname{sen}(2\theta)|$  con  $a > 0$

c) De la *superficie* engendrada al girar alrededor del eje OX, el lazo de la curva  $9y^2 = x(3-x)^2$

### Solución

63.- Calcular:

a) La *longitud* del arco de la *parábola*  $y = x^2 - 2x + 5$  comprendido entre los puntos  $(1, 4)$  y  $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$ .

b) El *área* interior a la *circunferencia* de centro el origen y radio 1 (ecuación en *coordenadas polares*  $r = 1$ ) y exterior a la curva  $r = \cos^2 \alpha$ .

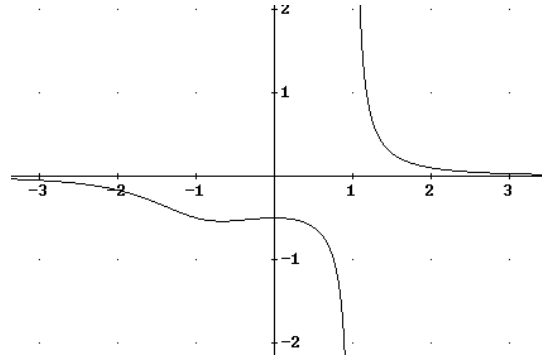


## Integrales

### Solución

64.- Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 - 2}$ , cuya gráfica es la de la figura, se pide:

- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$ ,  $x = -2$  y el eje  $Y$ .
- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$ , y el eje  $X$  en  $[2, \infty)$ .
- Estudiar la **convergencia** de  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- Estudiar la **convergencia** de  $\int_0^\infty f(x) dx$ .



### Solución

65.- Calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

### Solución

66.- Considerando la **circunferencia** de radio  $R$  en **coordenadas polares**, hallar:

- El **área** del círculo.
- La **longitud** de la circunferencia.
- El **volumen** de la esfera.
- La **superficie** de la esfera.

### Solución

67.- La tasa de variación en la población de conejos es  $\frac{dP}{dt} = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16,1}$  ( $t$

tiempo en años) Hallar:

- Al cabo de cuánto tiempo es **máxima** dicha población.
- Si la población inicial de conejos es de 50 unidades, hallar el número **máximo** de conejos.
- ¿Se extinguirán los conejos?

### Solución

68.- a) Demostrar que si  $y = \arg \operatorname{th} x$ , entonces  $y' = \frac{1}{1 - x^2}$

b) Calcular la **derivada** de la siguiente función:  $F(x) = \int_{\ln x}^{x^3} e^{t^2} dt$

c) Calcular el **volumen** engendrado al girar el **área** encerrada por la curva  $y = x^2$  el eje  $OX$ , entre  $x=0$  y  $x=2$ , alrededor del eje  $OX$ .

d) Calcular  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

### Solución



## Integrales



- 69.- a) Demostrar que si  $y = \arg \operatorname{sh} x$ , entonces  $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- b) Calcular la **derivada** de la siguiente función:  $F(x) = \int_{e^2}^{x^3} \frac{\ln t}{t} dt$
- c) Estudiar la **convergencia** y, en su caso, calcular el valor de la **integral** de  $f(x) = \operatorname{tg} x$  en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- d) Calcular  $\Gamma(4)$

### Solución

- 70.- a) Demostrar la siguiente relación:  $\arg \operatorname{sh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
- b) Calcular la **derivada** de la siguiente función:  $F(x) = \int_x^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt$
- c) La curva  $y^2 = e^{-2x}$  gira alrededor de su **asíntota**. Hallar el **volumen** del cuerpo limitado por la **superficie** engendrada entre la curva, el eje de **abscisas** (OX) cuando  $x > 0$ .
- d) Calcular  $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ , sabiendo que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

### Solución

- 71.- a) Demostrar la siguiente relación:  $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x)$
- b) Calcular la **derivada** de la siguiente función:  $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt$
- c) La **integral**  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ , ¿es **impropia**? Calcularla.
- d) Calcular  $\beta(4, 5)$

### Solución

- 72.- Dada la función  $f(x) = e^{-x^2}$ . Se pide:
- a) Calcular el **área** encerrada por la función  $f(x)$  y su **asíntota**.
- b) Calcular el **volumen** generado por la función  $f(x)$  al girar alrededor de su **asíntota**.
- c) Hallar la **longitud** de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$ .
- d) La función  $f(x)$  gira alrededor de su **asíntota**. Calcular la **superficie** obtenida en el intervalo  $[-1, 1]$ .

### Solución

- 73.- a) Hallar el **área** del lazo de la estrofoide  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{array} \right.$
- b) Calcular el **volumen** de un lazo de la estrofoide  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{array} \right.$  al girar alrededor del **eje de simetría**.



## Integrales

c) Hallar la **longitud** del lazo de la estrofoide  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}; y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right.$

d) Calcular la **superficie** generada por el lazo de la estrofoide

$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}; y(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{array} \right.$  al girar alrededor del eje de **abscisas**.

### Solución

74.- a) Hallar el **área** de un lazo de la curva  $r(\alpha) = 2\text{sen}(2\alpha)$ .

b) La curva  $r(\alpha) = 2\text{sen}(2\alpha)$  gira alrededor del **eje polar**. Calcular el **volumen** obtenido.

c) Determinar la **longitud** de un lazo de la curva  $r(\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$ .

d) La curva  $r(\alpha) = \cos(\alpha)$  gira alrededor del **eje polar**. Calcular la **superficie** engendrada.

### Solución

75.- Dada la curva en **coordenadas polares**  $r = e^\alpha$ , con  $\alpha < 0$ , se pide:

a) El **área** de la región entre la curva y el eje OX.

b) La **longitud** de la curva.

### Solución

76. Hallar el **área** limitada por las regiones:  $x^2+y^2 \geq 2x$ ;  $x^2+y^2 \leq 4x$ ;  $y \leq x$ ;  $y \geq 0$

### Solución

77.- a) Sea  $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ 4 + \text{sen } x & \text{si } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

a<sub>1</sub>) Hallar  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

a<sub>2</sub>) Hallar el valor de k tal que  $I = \pi \cdot k$

a<sub>3</sub>) ¿Existe algún punto c del intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tal que  $f(c) = k$ ?

a<sub>4</sub>) ¿Contradice esto el **Teorema del valor medio integral**?

b) Hallar el **área** interior a la **circunferencia** de centro el origen y radio 1

(ecuación en **coordenadas polares**  $r = 1$ ) y exterior a la curva  $r = \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ .

### Solución

78.- a) Hallar el **volumen** engendrado por la rotación del **área** encerrada en la circunferencia de ecuación  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$  cuando gira alrededor del eje OX.

b) Dada la curva (en **coordenadas polares**):  $r = \text{sen } \alpha + \cos \alpha$  calcular su **longitud**.

### Solución



## Integrales

79.- Dada la curva 
$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} .$$

a) Calcular el **área** encerrada por la curva y el eje OY en el segundo cuadrante ( $x < 0$ ,  $y > 0$ ).

b) El **área** del apartado anterior gira alrededor del eje OY, calcular el **volumen** de revolución obtenido.

### Solución

80.- **Área** interior simultáneamente a las dos curvas siguientes dadas en **coordenadas polares**:  $r = \sin^2 \alpha$  y  $r = \frac{1}{2}$  (circunferencia de centro en el polo y radio  $\frac{1}{2}$ ).

### Solución

81.- La **elipse** de ecuación  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  gira alrededor del **eje de abscisas**.

Calcular el **volumen** y la **superficie del cuerpo de revolución** que se obtiene.

### Solución

82.- Calcular las **derivadas** de las siguientes funciones:

a)  $F(x) = \int_5^{x^3} \ln(t^2) dt$ ; b)  $G(x) = \int_{5x}^{x^4} (\ln x) \sqrt{t} dt$ ; c)  $H(x) = \int_2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{sen} t dt$ .

d)  $I(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\operatorname{tg} x} \operatorname{sen} x \cos t dt$ ; e)  $J(x) = \int_3^{\ln x} \operatorname{tg} t dt$ ; f)  $K(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} t dt$ ;

g)  $L(x) = \int_1^{x^3} \cos t dt$ ; h)  $M(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos x \operatorname{sen} t dt$ ; i)  $N(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} t dt$

### Solución

83.- Hallar el **área** de la región comprendida entre la curva en **polares**  $r = 7 + \cos(6\alpha)$  y la **circunferencia** de centro el origen y radio 6.

### Solución

84.- Calcular la **longitud** de la curva  $9y^2 = x(3 - x)$

### Solución

85.- Calcular el **volumen** del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje de abscisas del arco de la curva  $y = \ln x$  comprendido entre 0 y 1. Indica, en su



## Integrales

caso, si la *integral* que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

### Solución

86.- Calcular la *superficie* del elipsoide de revolución engendrada por la rotación alrededor del eje de *abscisas* de la *elipse* cuyas ecuaciones *paramétricas* son:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

### Solución

87.- Hallar el *volumen* del sólido generado al girar, alrededor del eje OX, el arco de la curva  $y = \operatorname{sen}^2 x$  comprendido entre  $x = 0$  y  $x = \pi$ .

### Solución

88.- Calcular la *longitud* de la curva  $y = \sqrt{x(1-x)}$ . Indica, en su caso, si la *integral* que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

### Solución

89.- Hallar la *superficie* del sólido generado por la *astroide* de ecuación

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \text{ al girar alrededor del eje OY.}$$

### Solución

90.- Calcular el *volumen* del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje de *abscisas* del arco de la curva  $y = xe^{-x}$  para  $x \geq 0$ . Indica, en su caso, si la *integral* que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

### Solución

91.- Calcular el *área* comprendida entre las curvas en polares:

a)  $r = 1 + \cos \alpha$  y  $r = \cos \alpha$ .

b)  $r = 1 - \cos \alpha$  y  $r = -\cos \alpha$ .

### Solución



## Integrales

92.- Calcular el **volumen** del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje de abscisas de la curva  $y = \frac{1}{x^4 + 1}$ . Indica, en su caso, si la integral que has utilizado es **impropia**, a qué tipo pertenece y si es **convergente** o **divergente**.

### Solución

93.- Las curvas, en **polares**,  $r = \text{sen}(2\alpha)$  y  $r = \text{cos}(2\alpha)$ , se cortan dando lugar a varios recintos interiores comunes a ambas curvas, todos de la misma **área**. Calcular el **área** de uno de estos recintos.

### Solución

94.- Plantear la integral que da la **longitud** del primer arco de la espiral  $r = \sqrt{\alpha}$  (**coordenadas polares**).

### Solución

95.- Calcular el **volumen** obtenido por la rotación de la curva  $y^2 = \frac{3-x}{\sqrt[3]{x}}$  alrededor del eje de abscisas. Indica, en su caso, si la integral que has utilizado es **impropia**, a qué tipo pertenece y si es **convergente** o **divergente**.

### Solución

96.- Calcular la **superficie de revolución** engendrada por la rotación alrededor del eje de abscisas del bucle derecho de la curva  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}(3t) \end{cases}$

### Solución

97.-

a) Hallar el **área** limitada por las regiones

$$x^2 + y^2 \geq 2x; \quad x^2 + y^2 \leq 4x; \quad y \leq x; \quad y \geq 0.$$

b) Hallar el **área** limitada por las curvas

$$\left. \begin{matrix} x = 1 + \cos t \\ y = \text{sent} \end{matrix} \right\}; \quad \left. \begin{matrix} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 2\text{sent} \end{matrix} \right\}; \quad \left. \begin{matrix} x = t \\ y = t \end{matrix} \right\}; \quad \left. \begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$$

c) Hallar el **área** limitada por las curvas

$$r = 2 \cos \alpha; \quad r = 4 \cos \alpha; \quad \text{tg} \alpha = 1; \quad \text{sen} \alpha = 0$$

### Solución

98.- Hallar el **volumen** del sólido obtenido al hacer girar la región comprendida entre  $y=x^2$  e  $y=2x$  alrededor del eje X.



## Integrales

### Solución

99.- Hallar la *superficie* engendrada por la rotación de la *circunferencia* de ecuación  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$  cuando gira alrededor del eje OX.

### Solución

100.- a) Hallar el *área* interior al *círculo*  $r=1$  y exterior a la *cardioide*  $r=1-\cos\alpha$ .  
b) Determinar la longitud de la cardioide  $r=1-\cos\alpha$

### Solución

101.- Obtener el *área* de la *superficie* generada por la curva  $r = \sqrt{2 \cos(2\alpha)}$  al girar alrededor del eje polar.

### Solución

102.- Hallar el *volumen* engendrado al rotar la curva  $y^2 = x^2 - x^4$  alrededor del eje de abscisas.

### Solución

103.- Estudiar si el *área* de la región comprendida entre la curva de ecuaciones  $\left. \begin{array}{l} x(t) = 2 + g(t) \\ y(t) = 2\cos^2(t) \end{array} \right\}$  y su *asíntota* es finita o no.

### Solución

104.- Hallar la *longitud* de la elipse de ecuación  $r = \frac{5}{3 - 2 \cos \alpha}$ .

### Solución

105.- Hallar el *volumen* engendrado al rotar la curva  $y^2 = \frac{x^2(3-x)}{1+x}$  (Trisectriz de Maclaurin) alrededor del eje de abscisas.

### Solución

106.- Hallar el *volumen* del cuerpo intersección de los cilindros:  
 $x^2 + y^2 = r^2; y^2 + z^2 = r^2$

### Solución

107.- Dada la curva en *coordenadas polares*  $r = \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ , se pide:

a) *Período* de la curva.

b) *Dominio* de  $r(\alpha)$ .

c) *Longitud* de la curva (para valores de  $\alpha$  dentro del dominio de la función).

### Solución



## Integrales

108.- Hallar el *área* encerrada entre la curva  $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$  y su *asíntota*.

**Solución**

109.- Hallar la *superficie* de revolución engendrada al rotar la curva  $y^2 = x - (3 - x)^2$  alrededor del eje de abscisas.

**Solución**

110.- Dada la curva en *coordenadas polares*  $r = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ , se pide:

a) *Período* de la curva.

b) *Dominio* de  $r(\alpha)$ .

c) *Longitud* de la curva (para valores de  $\alpha$  dentro del dominio de la función).

**Solución**

111.- Hallar el *área* encerrada entre la curva  $\begin{cases} x = \frac{1}{\operatorname{tg} t} \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$  y su *asíntota*.

**Solución**

112.- Hallar la *superficie* de revolución engendrada al rotar la curva  $x^2 = (y + 1)^2 - y^4$  alrededor del eje de ordenadas.

**Solución**

113.- Dada la curva en *coordenadas polares*  $r = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , se pide:

a) *Período* de la curva.

b) *Dominio* de  $r(\alpha)$ .

c) *Área* encerrada por la curva y el eje OY (para valores de  $\alpha$  dentro del dominio de la función).

**Solución**

114.- Hallar el *volumen* engendrado al girar el área encerrada entre la curva  $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$  y su *asíntota* alrededor de dicha asíntota.

**Solución**

115.- Hallar la *longitud* de la curva  $y^2 = (x + 1)^2 - x^4$ .

**Solución**

116.- Determinar la curva que pasa por el punto  $(e, 2)$  y cuya *pendiente* en cada punto  $(x, y)$ , tal que  $x > 0$ , es  $\ln \sqrt{x}$ .

**Solución**



## Integrales

117.- Calcular las **derivadas** de las siguientes funciones:

a)  $F(x) = \int_3^{\ln x} \cos t \, dt$ .

b)  $G(x) = \int_{\cos x}^{\ln x} \cos x \, \sin t \, dt$ .

**Solución**

118.- Calcular:

a) La **longitud** de la curva en **polares**  $r^2 = 5 \cos(2\alpha)$

b) El **área** encerrada por uno de los bucles de la curva anterior.

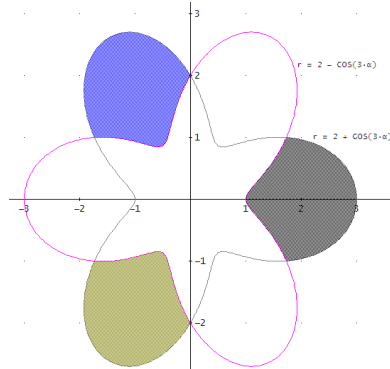
c) El **área** interior común a la curva anterior y a  $r^2 = 5 \sin(2\alpha)$ .

**Solución**

119.- Dada la función  $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ , calcular el **volumen** engendrado al girar la curva alrededor del eje de ordenadas.

**Solución**

120.- Hallar el **área** sombreada de la figura que es simultáneamente exterior a la curva en polares  $r = 2 + \cos(3\alpha)$  e interior a  $r = 2 - \cos(3\alpha)$ .



**Solución**

121.- Las ecuaciones paramétricas  $\begin{cases} x = \frac{4t}{1+t^3} \\ y = \frac{4t^2}{1+t^3} \end{cases}$  describen la curva denominada

**Folium de Descartes**, se pide:

a) El intervalo de  $t$  para el que las anteriores ecuaciones describen el lazo.

b) La **longitud** del lazo.

c) La **superficie** de revolución engendrada al girar el lazo alrededor del eje de abscisas.

d) El **volumen** engendrado al girar el lazo alrededor del eje de abscisas.

**Solución**

122.- Hallar la **longitud** de las siguientes curvas:

a) Arco de la parábola  $y=x^2-2x+5$  entre  $x=1$  y  $x=3/2$ .

b)  $x(t)=2\cos t$ ;  $y(t)=2\sin t$ .



## Integrales



c)  $r = \text{sen}^3(\alpha / 3)$ .

**Solución**

123.- Hallar el área de la *superficie* engendrada por la revolución alrededor del eje OX, del arco de la curva  $y=e^{-x}$  para  $x>0$ .

**Solución**

124.- Hallar la *superficie* de revolución engendrada al rotar la curva  $y^2 = x^4 - x^2$  alrededor del eje de abscisas.

**Solución**

125.- Hallar *volumen* del sólido generado por la curva de ecuación  $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = 2\text{sen}^2 t \end{cases}$  al girar alrededor del eje de abscisas.

**Solución**



## Integrales

### EJERCICIOS PROPUESTOS

P1.- Calcular, si son *convergentes*, las integrales:

a)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{5-2x} dx$       b)  $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx$  con  $a > 0$ .

P2.- Calcular  $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

P3.- Hallar p y q para que  $2 \int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^3 t dt = \beta(p, q)$  y calcular  $\int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^3 t dt$ .

P4.- Lo mismo para  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^6 t dt$ .

P5.- Determínese si las integrales siguientes *convergen* o *divergen*:

a)  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$     b)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$     c)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$     d)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x}$     e)  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx$

P6.- Hallar el *área* común al círculo  $\rho_1 = 3 \cos \alpha$  y a la *cardioide*  $\rho_2 = 1 + \cos \alpha$ .

P7.- Hallar el *volumen* del cuerpo intersección de los cilindros  $x^2 + y^2 = r^2$ ;  $y^2 + z^2 = r^2$

P8.- La curva  $y^2 = 2xe^{-2x}$  gira alrededor de su *asíntota*. Hallar el *volumen* del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

**Solución**



## Integrales



1. - Calcular las *derivadas* de las siguientes funciones:

a)  $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t}(\text{sent} + \text{cost})dt$

b)  $G(x) = \int_0^{x^3} \text{senx} \cos t dt$ .

**Solución:**

a)

Sea  $G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$

Consideramos la función continua en R:  $f(t)=e^{-t}(\text{sent}+\text{cost})$  y  $g(x)=x^2$  una función derivable.

Entonces:

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t}(\text{sent} + \text{cost})dt = \int_x^a e^{-t}(\text{sent} + \text{cost})dt + \int_a^{x^2} e^{-t}(\text{sent} + \text{cost})dt = \int_a^{x^2} e^{-t}(\text{sent} + \text{cost})dt - \int_a^x e^{-t}(\text{sent} + \text{cost})dt = \int_a^{g(x)} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = G(g(x)) - G(x)$$

Derivando:

$$F'(x) = G'(g(x))g'(x) - G'(x) = f(g(x))g'(x) - f(x) = f(x^2)2x - f(x) = e^{-x^2}(\text{sen}(x^2)+\text{cos}(x^2))2x - e^{-x}(\text{sen}x+\text{cos}x)$$

$$F'(x)=2xe^{-x^2}(\text{sen}(x^2)+\text{cos}(x^2))-e^{-x}(\text{sen}x+\text{cos}x)$$

b)

Sea  $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Consideramos la función continua en R:  $f(t)=\text{cost}$  y  $g(x)=x^3$  una función derivable. Entonces:

$$G(x) = \int_0^{x^3} \text{senx} \cos t dt = \text{senx} \int_0^{x^3} \cos t dt = \text{senx} \int_0^{g(x)} f(t)dt = \text{senx} \cdot F(g(x))$$

Derivando el producto

$$G'(x) = (\text{senx})'G(x) + \text{senx} \cdot G'(g(x)) \cdot g'(x) = \text{cos} x \cdot G(x) + \text{senx} \cdot f(g(x)) \cdot g'(x) = \text{cos} x \int_0^{x^3} \text{cost} dt + \text{senx} \cos(x^3) 3x^2 = \text{cos} x (\text{sen}(x^3) - \text{sen}0) + 3x^2 \text{senx} \cos(x^3)$$

$$G'(x) = \text{cos} x \text{sen}(x^3) + 3x^2 \text{senx} \cos(x^3)$$



3. - Hallar el **área** de la región contenida entre las curvas

$$y_1 = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y_2 = \frac{1}{x^3 + x} :$$

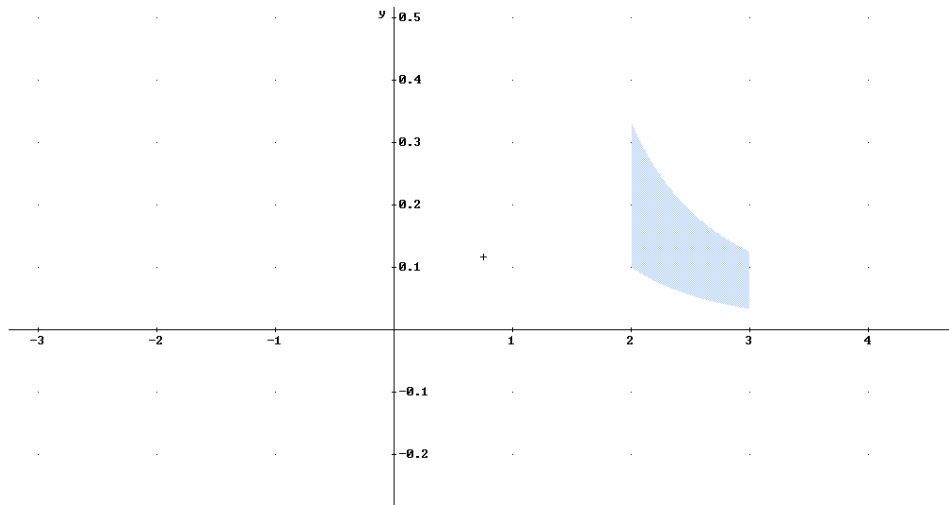
a) En el intervalo [2,3]

b) Para  $x \geq 3$

**Solución:**

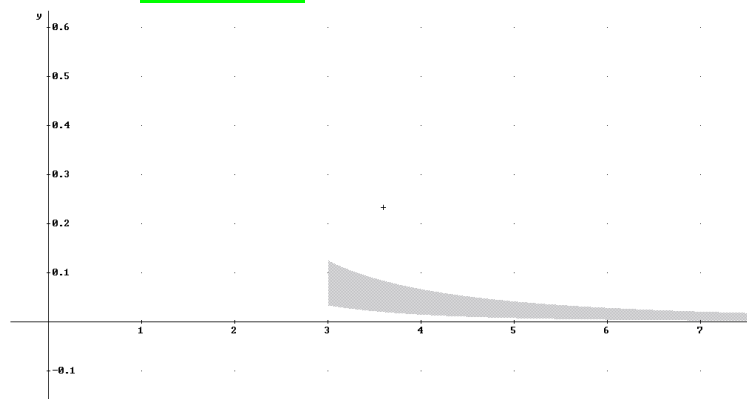
a)

$$A = \int_2^3 \left( \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^3 + x} \right) dx = \int_2^3 \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)} dx = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ u}^2$$



b)

$$\begin{aligned} A &= \int_3^\infty \left( \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^3 + x} \right) dx = \int_2^\infty \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)} dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]_2^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right) - \ln \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \\ &= 0 - 0 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \text{ u}^2 \end{aligned}$$





## Integrales



4. - Calcular  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  y  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

**Solución:**

Sabemos que:  $\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx$ , luego  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$ , además

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ y resulta } \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)} = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$



## Integrales



5. - Analizar el carácter de las siguientes integrales *impropias*:

a)  $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^p} dx$  con  $p > 0$

b)  $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x \cos x}{x^3} dx$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

**Solución:**

a)  $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^p} dx$  con  $p > 0$

$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^p} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{\text{sen}x}{x^p} dx$  y como  $\frac{\text{sen}x}{x^p} \leq \left| \frac{\text{sen}x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$  resulta

$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^p} dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{1}{x^p} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^k = \frac{1}{p-1}$  convergente, por tanto la integral original

es **CONVERGENTE** si  $p > 1$ .

¿Qué ocurre cuando  $0 < p < 1$ ?

En este caso, procedemos a resolver la integral por partes:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x^p} \Rightarrow du = -px^{-p-1} dx \\ dv = \text{sen}x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^p} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{\text{sen}x}{x^p} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\cos x}{x^p} \right]_1^k - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{p \cos x}{x^{p+1}} dx = \cos 1 - p \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$  pero si

$0 < p \leq 1 \Rightarrow 1 < p+1 \leq 2$  y procediendo como antes:  $\frac{\cos x}{x^{p+1}} \leq \left| \frac{\cos x}{x^{p+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{p+1}}$  resulta

$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{1}{x^{p+1}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{-p} \frac{1}{x^p} \right]_1^k = \frac{1}{p}$  convergente y también la integral original es

**CONVERGENTE** si  $0 < p \leq 1$ .

b)  $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x \cos x}{x^3} dx$

Por comparación:  $\frac{\text{sen}x \cos x}{x^3} \leq \left| \frac{\text{sen}x \cos x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3}$  resulta

$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x \cos x}{x^3} dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{1}{x^3} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_1^k = \frac{1}{2}$  **CONVERGENTE**.

c)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$  Integral impropia de tercera especie (intervalo no acotado de función no

acotada en  $x=0$ ).

$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = I_1 + I_2$



## Integrales



Estudiemos cada integral por separado:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

pero si  $0 < x < 1$  entonces  $(1+x)\sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$  y sabemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \text{ si } p < 1, \text{ en particular } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} \text{ es CONVERGENTE.}$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_1^K \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

$(1+x)\sqrt{x} \geq x^{3/2} \Rightarrow \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$  y sabemos que  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$  si  $p > 1$ , en particular

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ es CONVERGENTE.}$$

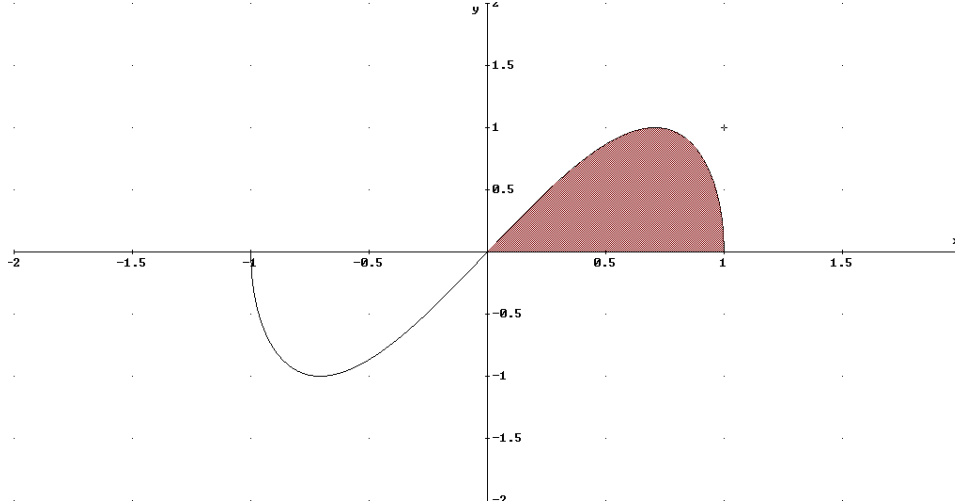
Por tanto  $I = I_1 + I_2$  es **CONVERGENTE**.

6.- Dada la función  $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$  se pide:

a) **Área** encerrada por la función y el eje de abscisas.

b) **Volumen** engendrado al girar la curva alrededor del eje de abscisas

**Solución:**



a)

$$A = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx = 2 \left[ -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

DERIVE:

#1: 2·AREA(x, 0, 1, y, 0, f(x))

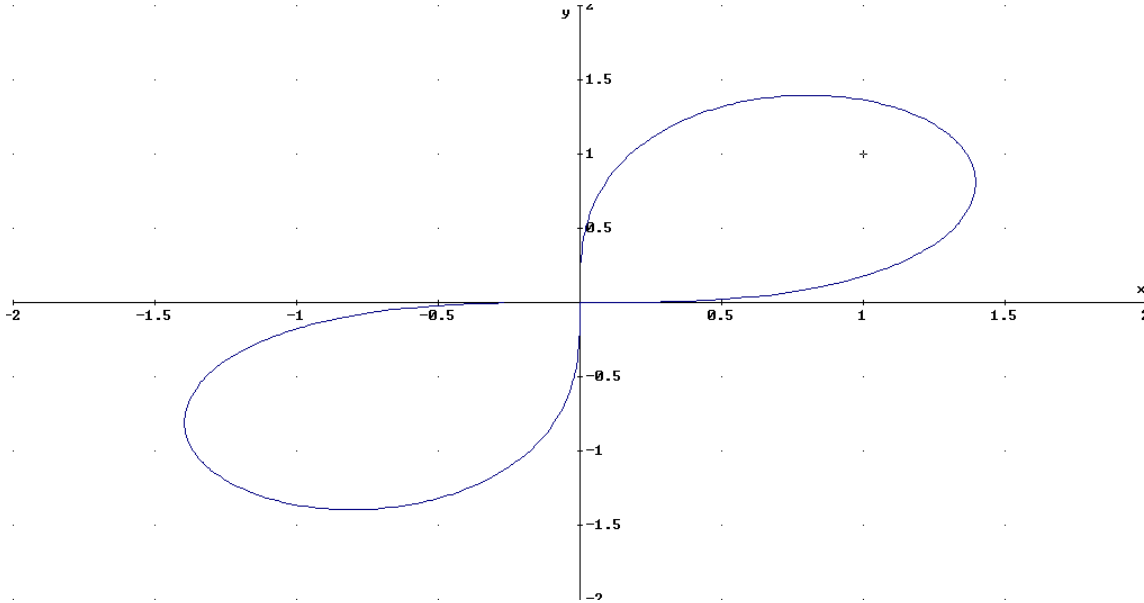
b)  $V = 2 \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = 2\pi \int_0^1 4x^2(1-x^2) dx = 8\pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{16}{15} \pi \text{ u}^3$

DERIVE:

#2: 2·VOLUME\_OF\_REVOLUTION(f(x), x, 0, 1)

7.- Hallar la **longitud** de las siguientes curvas, dadas en coordenadas polares.  
 a)  $r^2 = 3\text{sen}(2\alpha)$   
 b)  $r = 2\text{sen}(3\alpha)$

**Solución:**



a)

$$r^2 = 3\text{sen}(2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{3\text{sen}(2\alpha)} \Rightarrow r' = \frac{6\cos(2\alpha)}{2\sqrt{3\text{sen}(2\alpha)}} = \frac{3\cos(2\alpha)}{\sqrt{3\text{sen}(2\alpha)}}$$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2} d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\sqrt{3\text{sen}(2\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{3\cos(2\alpha)}{\sqrt{3\text{sen}(2\alpha)}}\right)^2} d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{3}{\text{sen}(2\alpha)}} d\alpha$$

Integral que no es posible resolver, salvo por métodos aproximados.

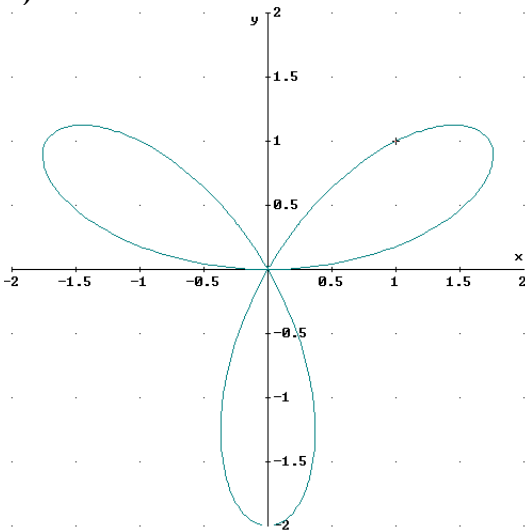
DERIVE:

#4:  $2 \cdot \text{POLAR\_ARC\_LENGTH} \left( \sqrt{3 \cdot \text{SIN}(2 \cdot \alpha)}, \alpha, 0, \frac{\pi}{2} \right)$

#5:  $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\text{SIN}(2 \cdot \alpha)}} d\alpha$

#6: **9.081122899**

b)



Para calcular el área podemos usar dos procedimientos:

Como los pétalos comienzan y acaban en el origen, resolvemos  $r = 0$  y nos quedamos con las soluciones entre  $0$  y  $\pi/2$ .

$2\text{sen}(3\alpha)=0$ ;  $\alpha = 0, \pi/3$ .

La longitud del primer pétalo viene dada por

$L_1=\text{POLAR\_ARC\_LENGTH}(2\text{sen}(3\alpha),\alpha,0,\pi/3)=4.454964406$  u.

Luego la longitud de la curva completa es

$L=3L_1=13.36489321$  u.

O bien mediante la fórmula:

$$L = 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2} d\alpha = 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{(2\text{sen}(3\alpha))^2 + (6\text{cos}(3\alpha))^2} d\alpha = 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{4 + 32\text{cos}^2(3\alpha)} d\alpha$$

Que se resuelve por métodos aproximados



## Integrales



8.- Calcular el **área** encerrada dentro de la curva  $\begin{cases} x(t) = 3 + 2 \cos t \\ y(t) = 2 + 5 \operatorname{sen} t \end{cases}$

**Solución:**

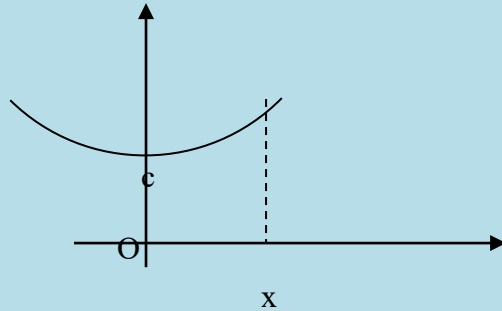
Usamos la fórmula para el cálculo del área de una curva cerrada dada por unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |y(t)x'(t)| dt &= \int_0^{2\pi} |(2 + 5 \operatorname{sen} t)(-2 \operatorname{sen} t)| dt = \int_0^{2\pi} (4 \operatorname{sen} t + 10 \operatorname{sen}^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \left( 4 \operatorname{sen} t + 10 \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \\ &= \left[ 4 \cos t - 5t + \frac{5}{2} \operatorname{sen}(2t) \right]_0^{2\pi} = 4 + 10\pi - 4 = \boxed{10\pi} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

9. Dos alumnos de la Escuela sostienen una cinta por sus extremos, a la misma altura. La cinta describe una curva que se denomina catenaria, y cuya ecuación es:

$$y = c \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c}\right)$$

Calcular la **longitud** de la cinta hasta un cierto valor de la abscisa  $x$ .



**Solución:**

$$\text{Nota: } \operatorname{ch}\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}; \operatorname{sh}\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{e^{x/c} - e^{-x/c}}{2}$$

$$f(x) = c \operatorname{ch}\frac{x}{c} \Rightarrow f'(x) = c \frac{1}{c} \operatorname{sh}\frac{x}{c} = \operatorname{sh}\frac{x}{c}$$

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\operatorname{sh}\frac{x}{c}\right)^2} dx = (*)$$

$$\text{como } 1 + \left(\operatorname{sh}\frac{x}{c}\right)^2 = \left(\operatorname{ch}\frac{x}{c}\right)^2;$$

$$(*) = \int_0^x \sqrt{\left(\operatorname{ch}\frac{x}{c}\right)^2} dx = \int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{c} dx = c \operatorname{sh}\frac{x}{c} \Big|_0^x = c \operatorname{sh}\frac{x}{c} - c \operatorname{sh}0 = c \operatorname{sh}\frac{x}{c}$$

**10.- Un depósito esférico de 50 m de radio está al 21,6 % de su capacidad ¿Cuál es la profundidad del agua?**

**Solución:**

Consideramos una circunferencia de centro  $O(0,0)$  y de radio  $r=50$  y despejamos  $x$  en función de  $y$ :

$x^2 + y^2 = 50^2 \Rightarrow x = \sqrt{2500 - y^2}$  y como el volumen de una esfera de radio  $r=50$  es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 50^3 = \frac{500000}{3}\pi \text{ resulta el volumen}$$

$$\text{del agua: } V_{\text{agua}} = 0,216 \frac{500000}{3}\pi = 36000\pi .$$

Planteamos el volumen ocupado por el agua como una integral:

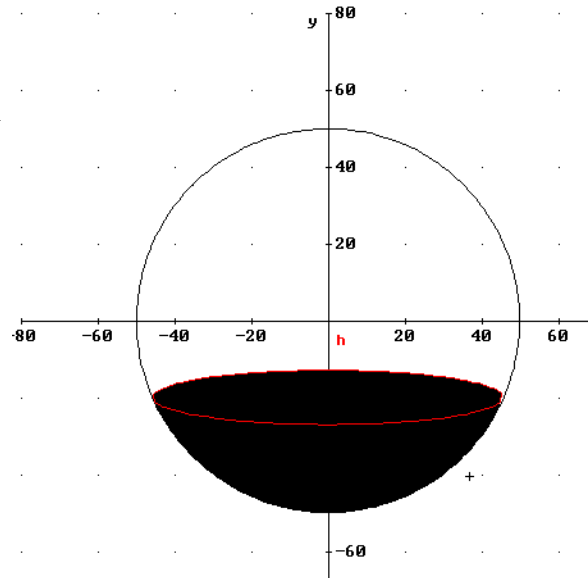
$$V_{\text{agua}} = \pi \int_{-50}^h x^2 dy = \pi \int_{-50}^h \left(\sqrt{2500 - y^2}\right)^2 dy =$$

$$= \pi \int_{-50}^h (2500 - y^2) dy = \pi \left[ 2500y - \frac{y^3}{3} \right]_{-50}^h =$$

$$= \pi \left[ 2500h - \frac{h^3}{3} + \frac{250000}{3} \right] = 36000\pi \Rightarrow h^3 - 7500h - 142000 = 0 \text{ cuya ecuación tiene como raíz}$$

$$\text{entera a } h=-20 \text{ quedando } (h+20)(h^2 - 20h - 7100) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = -20 \\ h = 10 \pm 60\sqrt{2} \end{cases} \text{ cuya única solo factible}$$

$$\text{es } h=-20 \text{ m que da lugar a una profundidad de } -20-(-50)=\mathbf{30 \text{ m}}$$

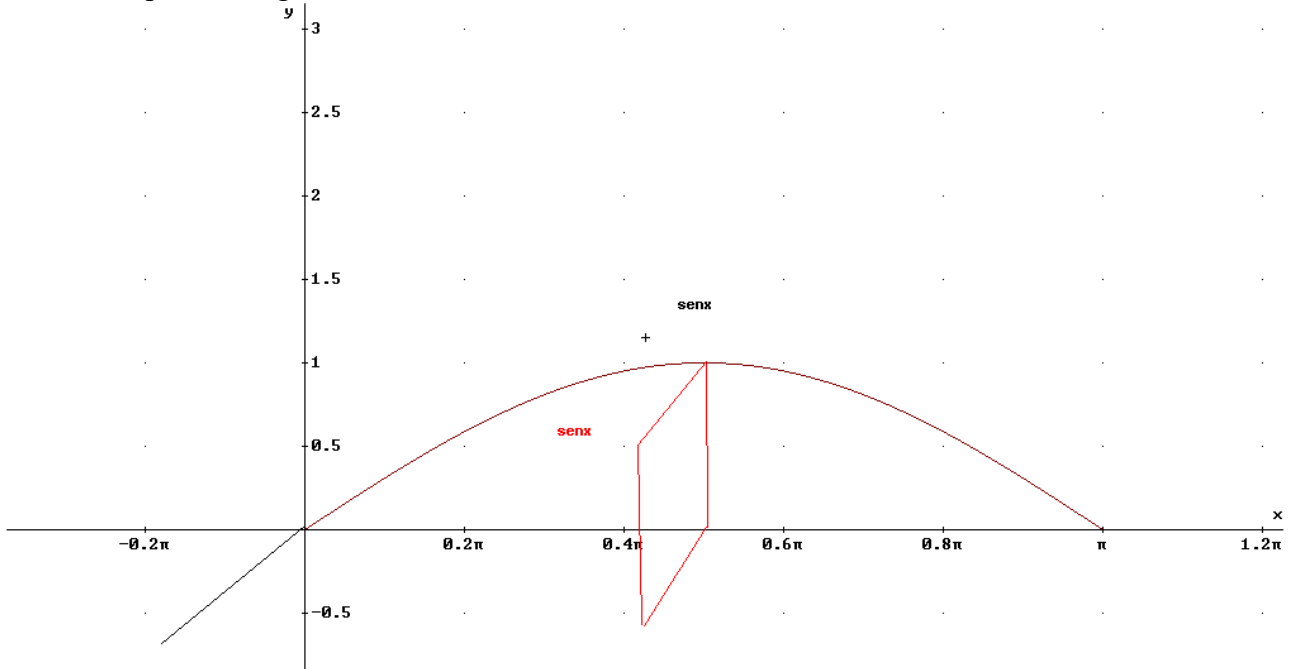


## Integrales

**11.- Hallar el *volumen* del sólido cuya base es la región limitada por el eje  $x$  y el arco de curva  $y=\text{sen}x$  entre  $x = 0$  y  $x = \pi$  y cuyas secciones planas perpendiculares al eje  $x$  son cuadrados con base en la región.**

**Solución:**

La sección plana es un cuadrado de lado  $\text{sen}x$ , por tanto,  $A(x)=\text{sen}^2x$ . El volumen por secciones viene dado por la integral



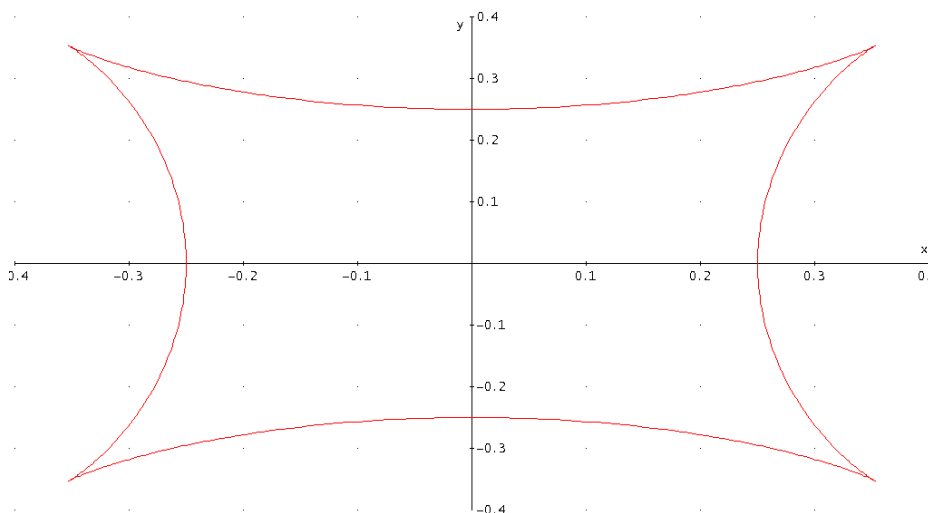
$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi} A(x)dx = \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\text{sen} 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \mathbf{u^3}
 \end{aligned}$$

## Integrales

12.- Calcular la **longitud** y el **área** encerrada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\cos(t)[2 - \cos(2t)]}{4} \\ y(t) = \frac{\sin(t)[2 + \cos(2t)]}{4} \end{cases}$$

**Solución:**



Longitud:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

DERIVE:

#1:  $x(t) := \frac{\cos(t) \cdot (2 - \cos(2 \cdot t))}{4}$

#2:  $y(t) := \frac{\sin(t) \cdot (2 + \cos(2 \cdot t))}{4}$

#3:  $[x(t), y(t)]$

#4:  $\text{PARA\_ARC\_LENGTH}([x(t), y(t)], t, 0, 2 \cdot \pi) = 3$ , o bien,

#5: 
$$\int_0^{2 \cdot \pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 3 \text{ u}$$

Área:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Obsérvese que por simetría es el doble y que los límites son entre  $\pi$  y 0.

#6: 
$$2 \cdot \int_0^{\pi} y(t) \cdot x'(t) dt = \frac{3\pi}{32} \text{ u}^2$$

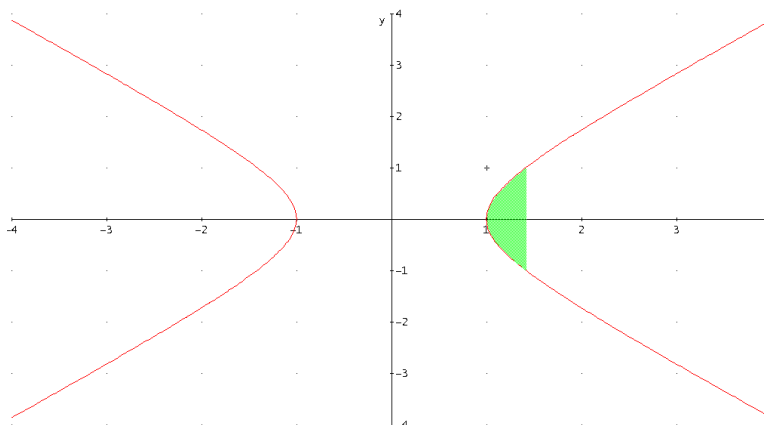
## Integrales

13.- Dada la **hipérbola**  $x^2 - y^2 = 1$ . Hallar:

- El **área** encerrada por la **hipérbola** y la recta que pasa por su **foco** de abscisa positiva.
- El **área** encerrada por la **hipérbola** y su **asíntota** siendo  $x \geq 1$ .
- La **superficie** de revolución del **casquete** hiperbólico formado al girar la **hipérbola** respecto del eje X siendo  $x \in [1, \sqrt{2}]$ .

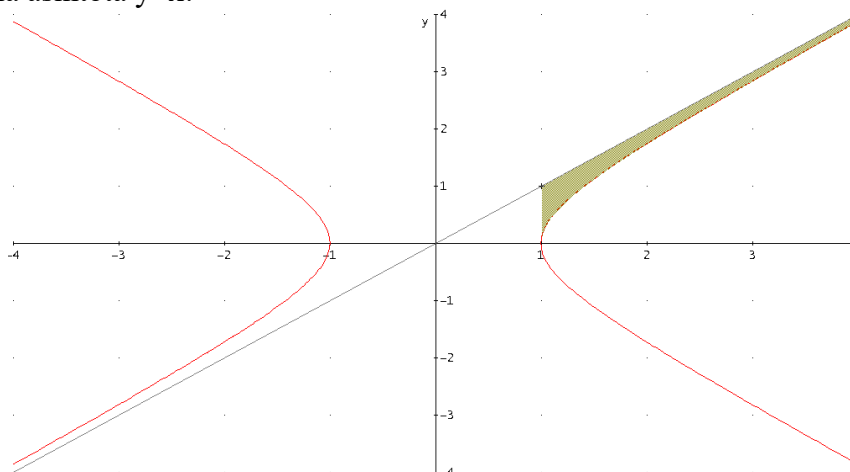
**Solución:**

a) Sabiendo que el foco de abscisa positiva es  $(\sqrt{2}, 0)$ , y por simetría será el doble de la integral entre el vértice y el foco:



$$A = 2 \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx = \boxed{\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})} u^2$$

b) Considerando la asíntota  $y=x$ :



$$A = \int_1^{\infty} (x - f(x)) dx = \int_1^{\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) dx = \boxed{\infty}$$

c)

$$S_L = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 - 1}} dx = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2 - 1} dx =$$

$$= \boxed{\pi(\sqrt{6} - 1) - \frac{\pi\sqrt{2}\ln(\sqrt{6} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2)}{2}} u^2$$

## Integrales

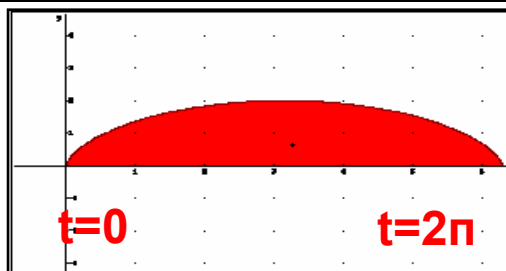
14.- Para un arco de *cicloide*  $\begin{cases} x(t) = a(t - \text{sent } t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$ . Se pide:

- El *área* encerrada por la curva y el eje de abscisas.
- La *longitud*.
- El *volumen* engendrado por la rotación del área encerrada por la curva y el eje X alrededor del eje OX.
- El *volumen* engendrado por la rotación del área encerrada por la curva y el eje X alrededor del eje OY.
- La *superficie* de revolución del cuerpo formado al girar un arco de la cicloide respecto del eje X.

**Solución:**

Un arco va de  $t=0$  a  $t=2\pi$ :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \text{sent } t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \text{ sent } t \end{cases}$$



a)  $A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = (*)$

$(*) = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t)dt = (**)$

Calculando las tres integrales por separado.

$$\int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = [\text{sent } t]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t dt \right) = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\text{sen } 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

sustituyendo en la igualdad  $(**) = a^2 (2\pi - 0 + \pi) = 3a^2\pi$

b)  $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt = (*)$

$$(*) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \text{ sent }^2 t + a^2 (1 - \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \text{ sent }^2 t + a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t} dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \text{ sen} \left( \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \text{ sen} \left( \frac{t}{2} \right) dt = 4a \left[ -\cos \left( \frac{t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 8a$$

c)  $V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t)x'(t)dt = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)x'(t)dt = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)dt =$

$$= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= a^3 \pi \left( \int_0^{2\pi} dt - 3 \int_0^{2\pi} \cos t dt + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt \right) = (**)$$

Calculando las cuatro integrales por separado.

$$\int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = [\text{sent } t]_0^{2\pi} = 0$$



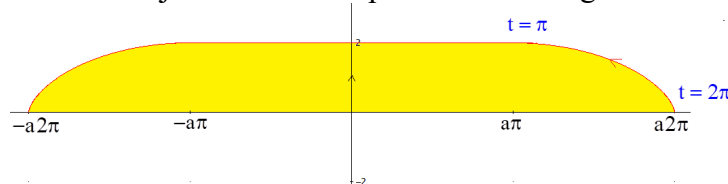
## Integrales

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t dt \right) = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

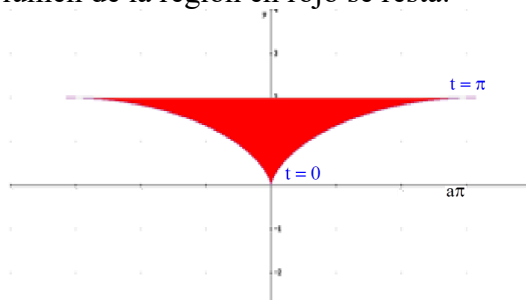
$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \cos t (1 - \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt = \left[ \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

sustituyendo en la igualdad (\*\*):  $= a^3 \pi (2\pi - 0 + 3\pi - 0) = 5a^3 \pi^2 u^3$

d) Para el volumen alrededor del eje OY debemos plantear dos integrales:



teniendo en cuenta que el volumen de la región en rojo se resta:



$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} x^2(t) y'(t) dt = \pi \int_{2\pi}^{\pi} x^2(t) y'(t) dt - \pi \int_0^{\pi} x^2(t) y'(t) dt = \pi \int_{2\pi}^0 x^2(t) y'(t) dt =$$

$$= \pi \int_{2\pi}^0 a^2 (t - \sin t)^2 a \cos t dt = a^3 \pi \int_{2\pi}^0 (\sin^3 t - 2t \sin^2 t + t^2 \sin t) dt = (*)$$

Calculando las tres integrales por separado:

$$\int_{2\pi}^0 \sin^3 t dt = \int_{2\pi}^0 \sin t (1 - \cos^2 t) dt = \int_{2\pi}^0 \sin t dt - \int_{2\pi}^0 \sin t \cos^2 t dt = [\cos t]_{2\pi}^0 + \left[ \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{2\pi}^0 = 0$$

$$\int_{2\pi}^0 t \sin^2 t dt = \int_{2\pi}^0 t \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left( \int_{2\pi}^0 t dt - \int_{2\pi}^0 t \cos(2t) dt \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} - t \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{2\pi}^0 + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 \sin(2t) dt = -\pi^2$$

$$\int_{2\pi}^0 t^2 \sin t dt = \left[ -t^2 \cos t \right]_{2\pi}^0 + 2 \int_{2\pi}^0 t \cos t dt = 4\pi^2 + 2 \left( [t \sin t]_{2\pi}^0 - \int_{2\pi}^0 \sin t dt \right) = 4\pi^2$$

$$(*) = a^3 \pi (0 - 2(-\pi^2) + 4\pi^2) = 6a^3 \pi^3 u^3$$

e)

$$S_L = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt = (*)$$

$$(*) = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 (1 - \cos t)^2} dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right) \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= 8\pi a^2 \left( \int_0^{2\pi} \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 \left( \frac{t}{2} \right) \sin \left( \frac{t}{2} \right) dt \right) = 8\pi a^2 \left( \left[ -2 \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} - \left[ \frac{2}{3} \cos^3 \left( \frac{t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{64}{3} \pi a^2 u^2$$



## Integrales



15.- Para la **cardioide** de ecuación  $r = 1 + \cos \alpha$ . Se pide:

a) El **área** encerrada por la curva y el eje de abscisas.

b) La **longitud**.

c) El **volumen** engendrado por la rotación del área encerrada por la curva y el eje X alrededor del eje OX.

d) La **superficie** de revolución del cuerpo formado al girar la curva respecto del eje X.

**Solución:**

$$a) A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} 2 \int_0^{\pi} r^2 d\alpha = \int_0^{\pi} (1 + \cos \alpha)^2 d\alpha = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos t + \cos^2 t) dt = (**)$$

Calculando las tres integrales por separado:

$$\int_0^{\pi} dt = [t]_0^{\pi} = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \cos t dt = [\text{sen} t]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi} dt + \int_0^{\pi} \cos 2t dt \right) = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

sustituyendo en la igualdad (\*\*):  $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} u^2$

b)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + (-\text{sen} \alpha)^2} d\alpha =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} d\alpha = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \alpha} d\alpha = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha = 4 \int_0^{\pi} \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha = 4 \left[ 2 \text{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{8}{3} u$$

$$c) V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^3 \text{sen} \alpha d\alpha = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos \alpha)^3 \text{sen} \alpha d\alpha = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} (1 + 3 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha) \text{sen} \alpha d\alpha =$$
$$= \frac{2}{3} \pi \left( \int_0^{\pi} \text{sen} \alpha d\alpha + 3 \int_0^{\pi} \cos \alpha \text{sen} \alpha d\alpha + 3 \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha \text{sen} \alpha d\alpha + \int_0^{\pi} \cos^3 \alpha \text{sen} \alpha d\alpha \right) = (**)$$

Calculando las cuatro integrales por separado.

$$\int_0^{\pi} \text{sen} \alpha d\alpha = [-\cos \alpha]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi} \cos \alpha \text{sen} \alpha d\alpha = \left[ -\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \alpha \text{sen} \alpha d\alpha = \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^3 \alpha \text{sen} \alpha d\alpha = \left[ -\frac{1}{4} \cos^4 \alpha \right]_0^{\pi} = 0$$

sustituyendo en la igualdad (\*\*):  $\frac{2}{3} \pi \left( 2 + 0 + 3 \frac{2}{3} + 0 \right) = \frac{8}{3} \pi u^3$



## Integrales



$$\begin{aligned} \text{d) } S_L &= 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} \alpha \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = 2\pi \int_0^\pi (1 + \cos \alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + (-\operatorname{sen} \alpha)^2} d\alpha = \\ &= 2\pi \int_0^\pi (1 + \cos \alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} d\alpha = 2\pi \sqrt{2} \int_0^\pi (1 + \cos \alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \sqrt{1 + \cos \alpha} d\alpha = \\ &= 4\pi \int_0^\pi (1 + \cos \alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 4\pi \int_0^\pi 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = \\ &= 8\pi \int_0^\pi \cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}(\alpha) d\alpha = 8\pi \int_0^\pi \cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 16\pi \int_0^\pi \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = \\ &= 16\pi \int_0^\pi \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 16\pi \left[ -\frac{2}{5} \cos^5\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]_0^\pi = \boxed{\frac{32}{5} \pi} u^2 \end{aligned}$$



## Integrales

16.- Determinar la curva que pasa por el punto  $(4\pi^2, 1)$  y cuya pendiente, en cada punto  $(x, y)$ , tal que  $x > 0$ , es  $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ .

*Solución:*

$$f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx + C = 2\text{sen}(\sqrt{x}) + C$$

$$\text{y como } f(4\pi^2) = 2\text{sen}(\sqrt{4\pi^2}) + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\text{resulta } f(x) = 2\text{sen}(\sqrt{x}) + 1$$



## Integrales



17.- Hallar el valor de  $\mu$  que cumpla que  $\int_0^2 f(x) dx = 2\mu$ , siendo

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 5 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{¿Existe algún punto } c \text{ del intervalo } [0,2] \text{ tal que } f(c) = \mu?$$

¿Contradice esto el **teorema del valor medio** integral?

*Solución:*

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 3 dx + \int_1^2 5 dx = 3 + 5 = \mu(2 - 0) \Rightarrow \mu = 4.$$

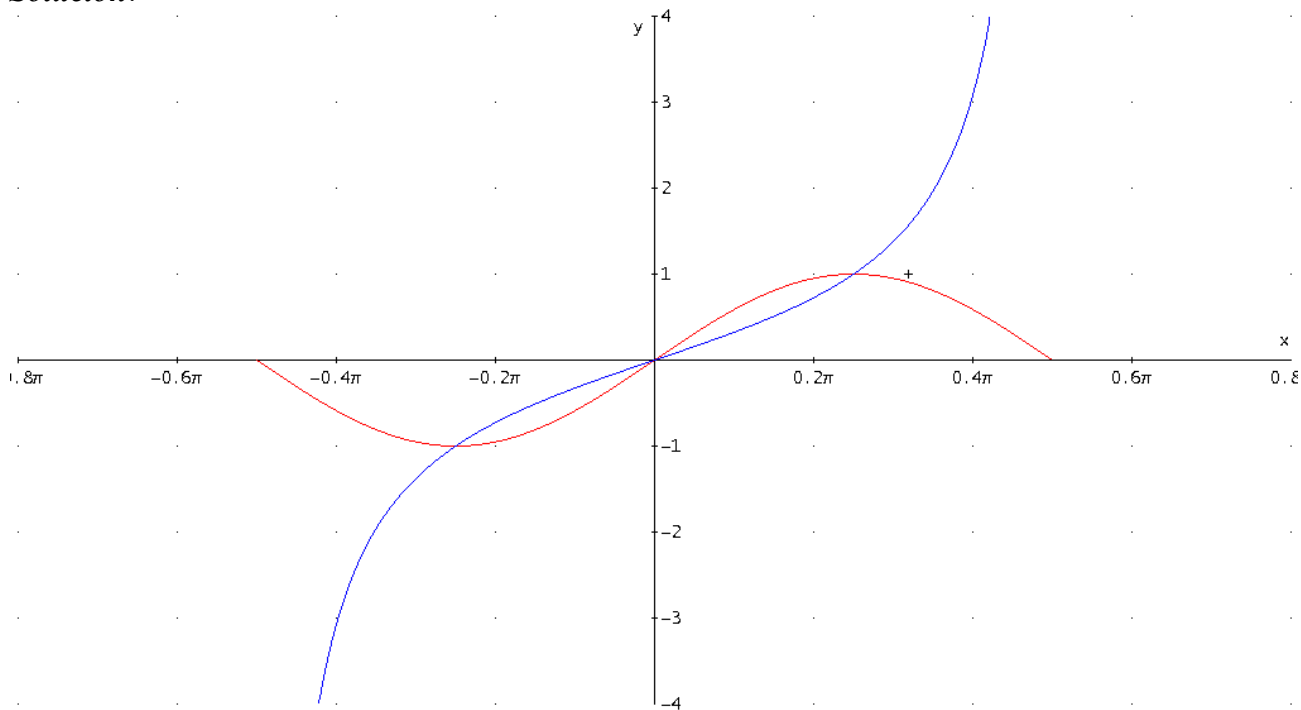
**No existe ningún**  $c \in [0,2]$  en que  $f(c) = 4$ . **Esto no contradice el teorema** del valor medio puesto que este teorema se refiere a funciones continuas y  $f(x)$  no lo es en el intervalo  $[0,2]$ .

## Integrales

18.- Dadas las funciones  $f(x)=\text{sen}(2x)$  y  $g(x)=\text{tg}x$ , se pide:

- a) Hallar los puntos de intersección de dichas funciones entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .  
 b) Hallar el **área** de la región limitada por dichas funciones entre los puntos de corte hallados en el apartado anterior.

**Solución:**



a)

$$\text{sen}(2x) = 2\text{sen}x\cos x$$

$$\text{tg}x = \text{sen}x/\cos x$$

entonces:  $2\text{sen}x\cos x = \text{sen}x/\cos x$  resulta  $\cos^2 x = 1/2$

$$x = -\frac{\pi}{4} \quad y \quad x = \frac{\pi}{4}$$

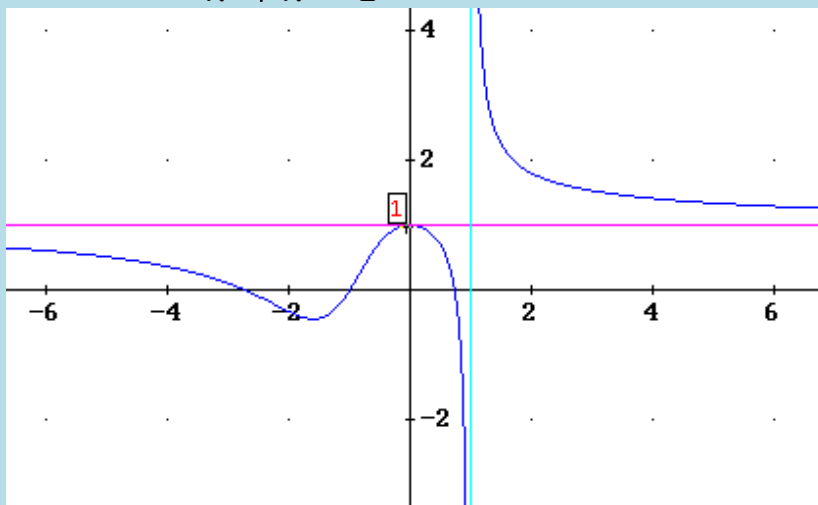
b)

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^{\pi/4} |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^{\pi/4} |\text{sen}(2x) - \text{tg}(x)| dx =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \left| \text{sen}(2x) - \frac{\text{sen}x}{\cos x} \right| dx = 2 \left[ -\frac{\cos(2x)}{2} + \ln|\cos x| \right]_0^{\pi/4} = (1 - \ln 2)u^2$$

## Integrales

19.- Dada la función  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2}$ , cuya gráfica es la de la figura, se pide:



- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$ ,  $x = -2$  y el eje  $Y$ .
- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$  y el eje  $X$  en el intervalo  $[-1, 0]$ .
- ¿Cómo podrías calcular el **área** encerrada por  $f(x)$  y la recta  $y = 1$  en  $[2, \infty)$ ?

*Solución:*

$$\text{a) } A = \int_{-2}^0 \left| \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2} \right| dx = \frac{2\ln(12)}{5} u^2$$

$$\text{b) } A = \int_{-1}^0 \left| \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2} \right| dx = \left( 1 + \frac{2\ln(2)}{5} - \frac{\pi}{5} \right) u^2$$

$$\text{c) } \text{Se trata de una integral impropia } \int_2^{\infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2 - 2} - 1 \right) dx = \infty$$



## Integrales



20.- Analizar, aplicando algún criterio de **convergencia** el carácter de las integrales siguientes:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx, \text{ b) } \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx .$$

**Solución:**

a) Observemos que  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx$

Designaremos  $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + x} dx$  e  $I_2 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx$ .

$I_1$  es una **integral impropia de segunda especie** pues la función  $\frac{1}{x^3 + x}$  se hace infinita en  $x = 0$  y el intervalo de integración  $(0,1]$  es finito. Se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

Luego  $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + x} dx$  tiene el mismo carácter que  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  que es **divergente**.

Luego podemos afirmar que  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx$  es **divergente**, sea cual sea el carácter de  $I_2$ .

Aunque no se necesita vamos a probar que  $I_2$  es convergente:

$I_2$  es una **integral impropia de primera especie** pues la función  $\frac{1}{x^3 + x}$  es continua en  $[1, \infty)$  que es un intervalo de longitud infinita y tiende a 0 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Se verifica que:

$$x^3 + x > x^3 \quad \forall x \in [1, \infty) \Rightarrow \frac{1}{x^3 + x} < \frac{1}{x^3} \quad \forall x \in [1, \infty) \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx ,$$

luego  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + x} dx$  es **convergente** porque  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$  es **convergente**.

b)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$  . Observemos que:

$$(1+x)\sqrt{x} \geq \sqrt{x} \quad \forall x \in (0,1] \Rightarrow \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} < \forall x \in (0,1],$$

luego  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$  es **convergente** porque  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  es **convergente**.

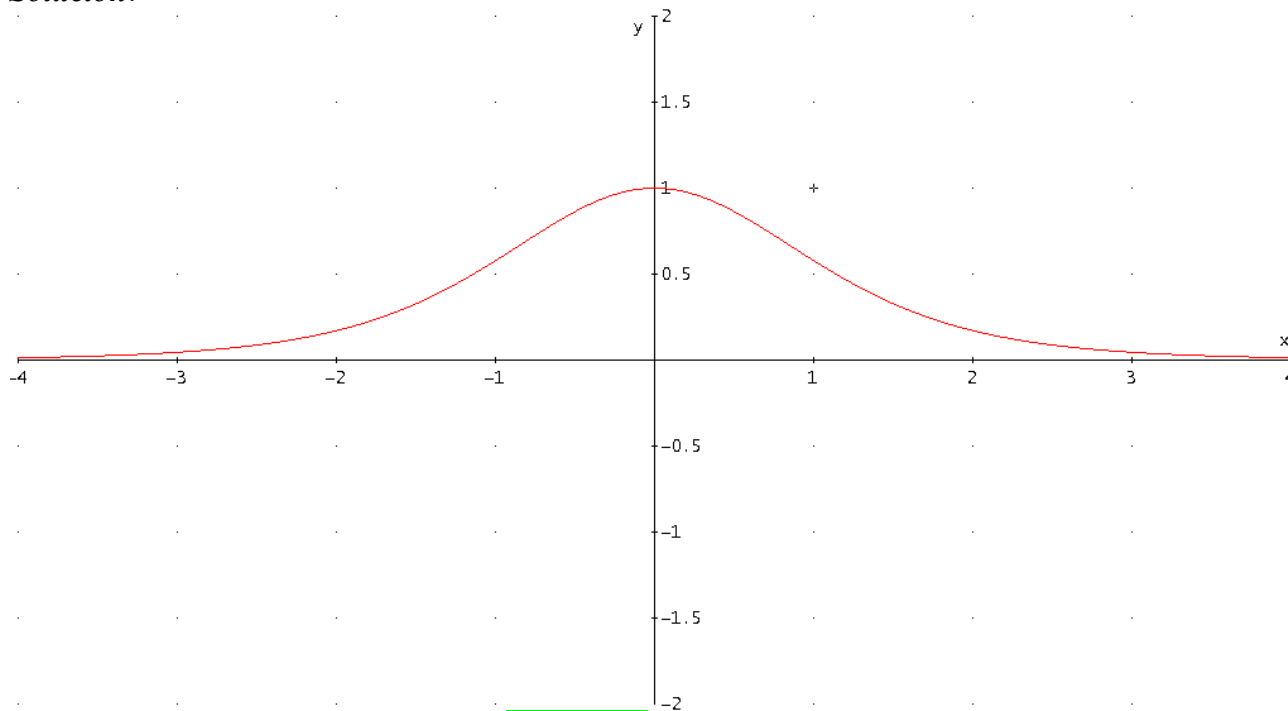
## Integrales

21.- Para la función  $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-3}$ , determinar:

a) El **área** encerrada por la función y el eje de abscisas.

b) El **volumen** generado al girar el recinto limitado por la curva  $y = f(x)$  y el eje de abscisas alrededor de dicho eje.

*Solución:*



$$\text{a) } A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-3} dx = \frac{3\sqrt{5}}{8} \pi u^2$$

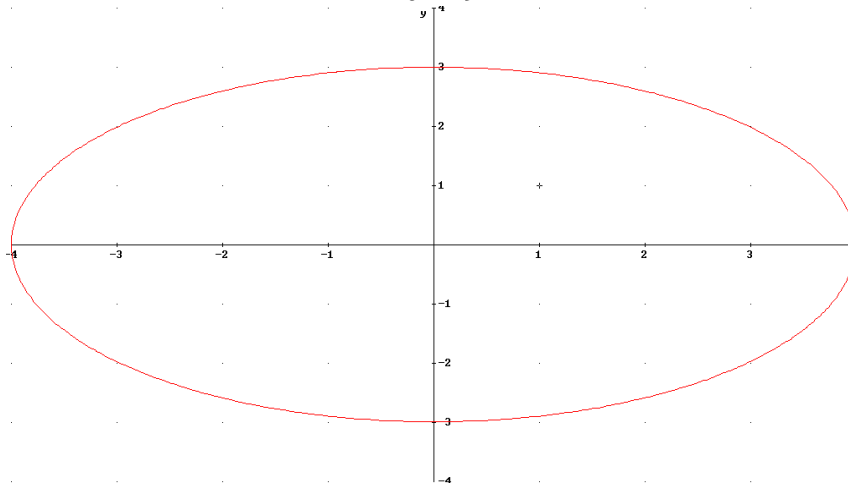
$$\text{b) } V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-3}\right)^2 dx = \frac{63\sqrt{5}}{256} \pi^2 u^3$$

## Integrales

22.- Calcular la *longitud* de una elipse de semiejes 3 y 4.

*Solución:*

La ecuación de una elipse de semiejes 3 y 4 es:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$



La longitud del arco de curva correspondiente al primer cuadrante será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{7}{6} - \frac{9}{x^2-16}} dx \approx \boxed{5,5254}$$

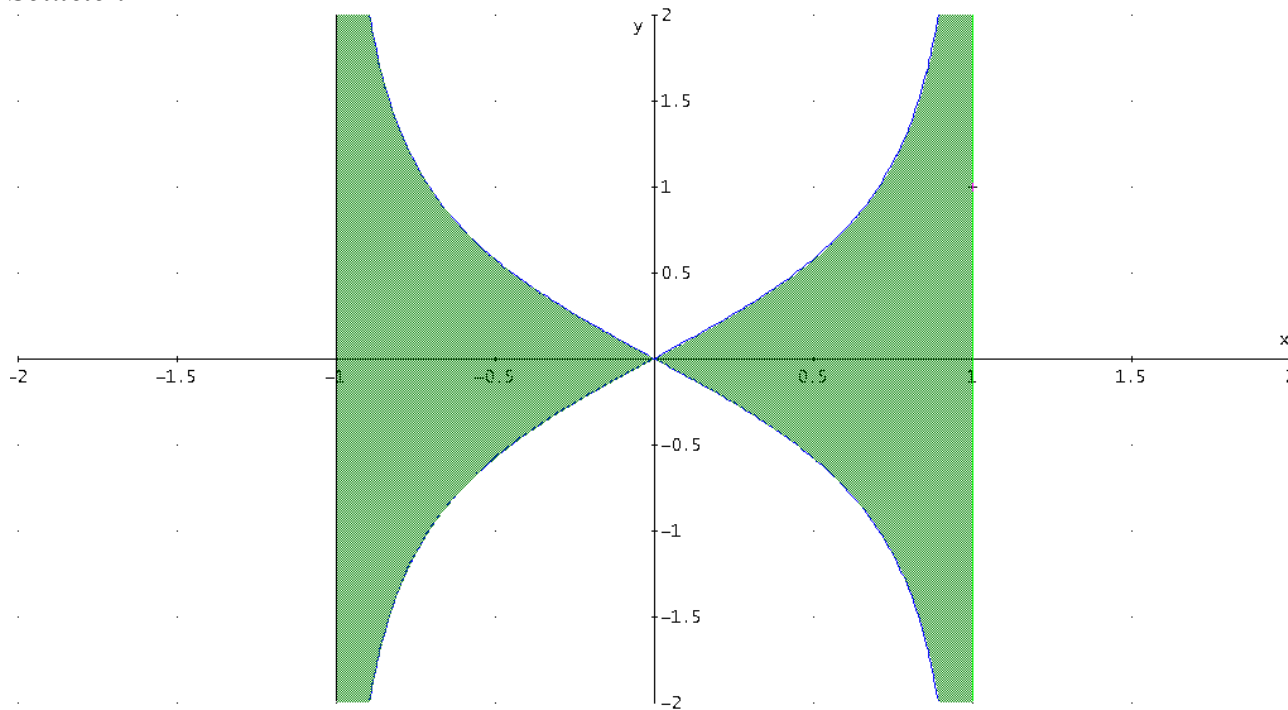
La longitud total de la elipse es:  $4L = \boxed{22,1017} \text{ u}$

## Integrales

23.- a) Hallar el **área** limitada por la curva  $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$  y sus asíntotas.

b) Hallar el **volumen** generado por la curva cuando gira alrededor del eje  $x$ , entre 0 y  $1/2$ .

**Solución:**



a)

$$A = 4 \int_0^1 y dx = 4 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \left[ -(1-x^2)^{1/2} \right]_0^1 = \boxed{4} u^2$$

b)

$$V = \pi \int_0^{1/2} y^2 dx = \pi \int_0^{1/2} \frac{x^2}{1-x^2} dx = \pi \frac{1}{2} \left[ -\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - x \right]_0^{1/2} = \boxed{\frac{1}{2}(\ln 3 - 1)\pi} u^3$$

## Integrales

24. - Una vaca está atada a uno de los vértices de un prado de forma cuadrada de lado 10 m. Sabiendo que la longitud de la cuerda es 12 m, calcular la *superficie* de hierba que puede comer la vaca.

*Solución:*



El punto de intersección del cuadrado de lado 10 con la circunferencia de radio 12 es

$$a = \sqrt{12^2 - 10^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

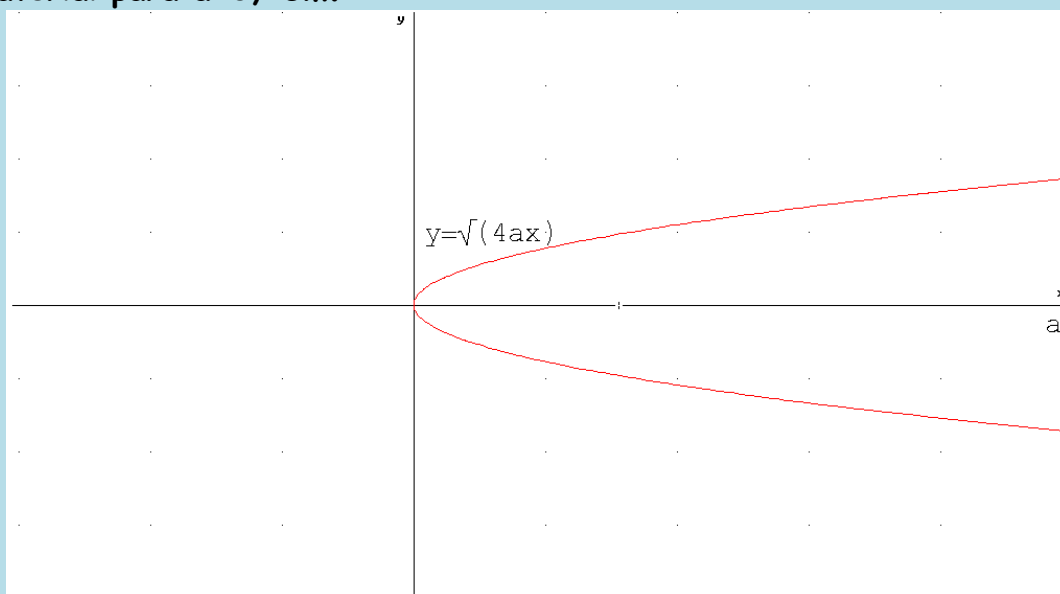


Por tanto, la superficie buscada será el área del rectángulo de lados 10 y  $2\sqrt{11}$  más la integral

$$I = \int_{2\sqrt{11}}^{10} \sqrt{12^2 - x^2} dx = 36\pi - 288 \arctg\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\right) \approx 28.75861727.$$

Resultando final  $S = 10 \cdot 2\sqrt{11} + 28.75861727 \approx 95,09111307 \text{ m}^2$

25.- Un faro tiene forma de espejo parabólico como el de la figura. Sabiendo que el material reflectante del faro tiene un precio de 10 euros/m<sup>2</sup>, hallar el precio de dicho material para a=0,15m.



**Solución:**

Hemos de calcular la superficie lateral del espejo obtenido al girar la parábola alrededor del eje OX entre 0 y a:

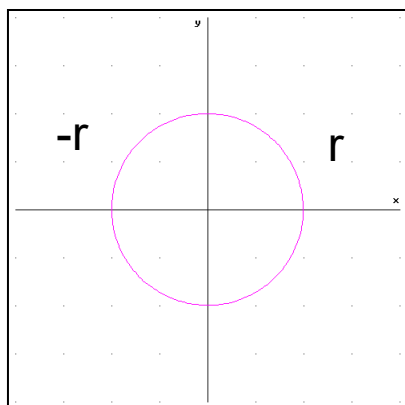
$$S = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{4ax} \sqrt{1 + \frac{a}{x}} dx = 4\pi\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{a+x} dx = \frac{8}{3} \pi a^2 (2\sqrt{2} - 1)$$

Si a=0,15 el coste será  $\frac{8}{3} \pi 0,15^2 (2\sqrt{2} - 1) 10 \approx \boxed{3,4465 \text{ euros}}$

## Integrales

26.- Calcular la **superficie** y el **volumen** encerrado por las siguientes figuras geométricas:

- a) **Esfera**
- b) **Cilindro** recto de radio R y altura H
- c) **Cono** recto de radio R y altura H
- d) **Tronco de cono** recto de radios  $R_1$  y  $R_2$  y altura H



**Solución:**

La esfera se obtiene al girar el círculo  $x^2 + y^2 = r^2$  alrededor del eje OX. Con los límites de integración entre  $-r$  y  $r$ .

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2} \Rightarrow$$

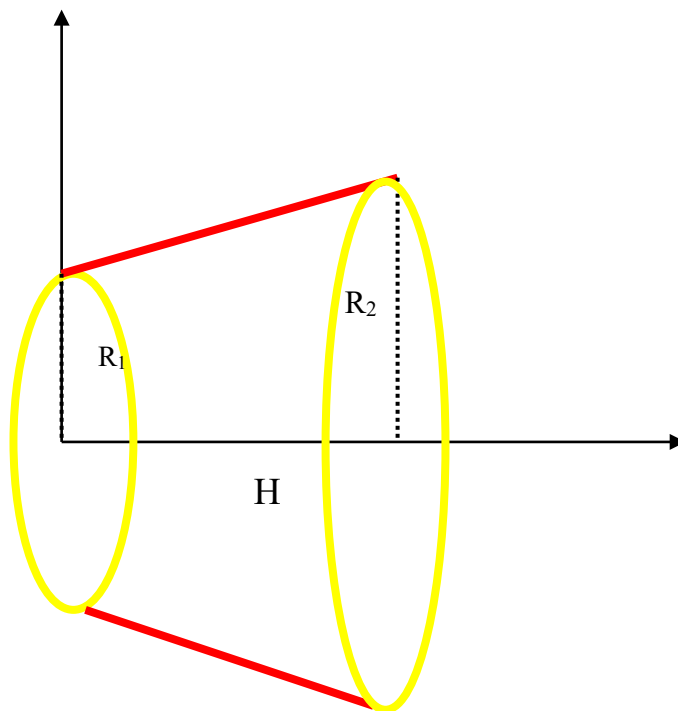
$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx =$$

$$= 4\pi r^2 \quad u^2$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad u^3$$

d) Tronco de cono recto de radios  $R_1$  y  $R_2$  y altura H: la recta generatriz es:  $y = \frac{R_2 - R_1}{H} x + R_1$ .



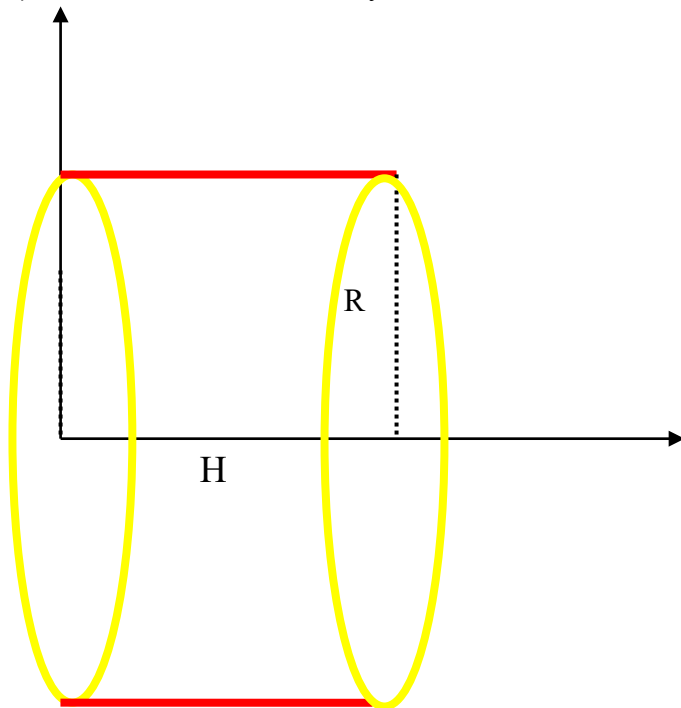
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^H \left( \frac{R_2 - R_1}{H} x + R_1 \right) \sqrt{1 + \left( \frac{R_2 - R_1}{H} \right)^2} dx =$$

## Integrales

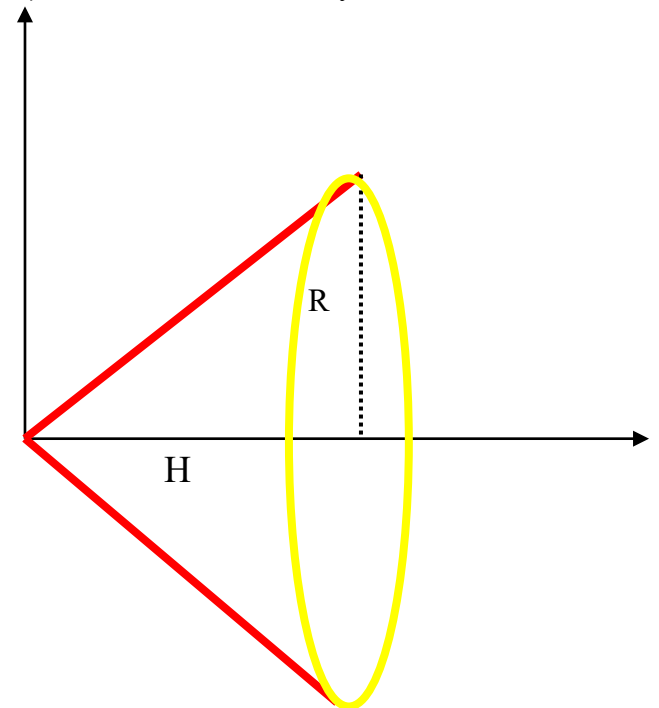
$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \frac{\sqrt{H^2 + (R_2 - R_1)^2}}{H} \int_0^H \left( \frac{R_2 - R_1}{H} x + R_1 \right) dx = 2\pi \frac{\sqrt{H^2 + (R_2 - R_1)^2}}{H} \left[ \frac{R_2 - R_1}{H} \frac{x^2}{2} + R_1 x \right]_0^H = \\
 &= 2\pi \frac{\sqrt{H^2 + (R_2 - R_1)^2}}{H} \left( \frac{R_2 - R_1}{H} \frac{H^2}{2} + R_1 H \right) = \pi(R_1 + R_2) \sqrt{H^2 + (R_2 - R_1)^2} u^2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^H \left( \frac{R_2 - R_1}{H} x + R_1 \right)^2 dx = \pi \int_0^H \left( \left( \frac{R_2 - R_1}{H} x \right)^2 + 2 \frac{R_2 - R_1}{H} x R_1 + R_1^2 \right) dx = \\
 &= \pi \left[ \left( \frac{R_2 - R_1}{H} \right)^2 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{R_2 - R_1}{H} R_1 \frac{x^2}{2} + R_1^2 x \right]_0^H = \pi \left[ \left( \frac{R_2 - R_1}{H} \right)^2 \frac{H^3}{3} + 2 \frac{R_2 - R_1}{H} R_1 \frac{H^2}{2} + R_1^2 H \right] = \\
 &= \pi H \left[ (R_2 - R_1)^2 \frac{1}{3} + (R_2 - R_1) R_1 + R_1^2 \right] = \frac{\pi H}{3} [R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2] u^3 \quad (2)
 \end{aligned}$$

c) Cilindro recto de radio R y de altura H.



d) Cono recto de radio R y de altura H.



Al ser  $R_1=R_2=R$  resulta:

(1)  $S = 2\pi R H u^2$  y (2)  $V = \pi R^2 H u^3$

Al ser  $R_1=0; R_2=R$  resulta:

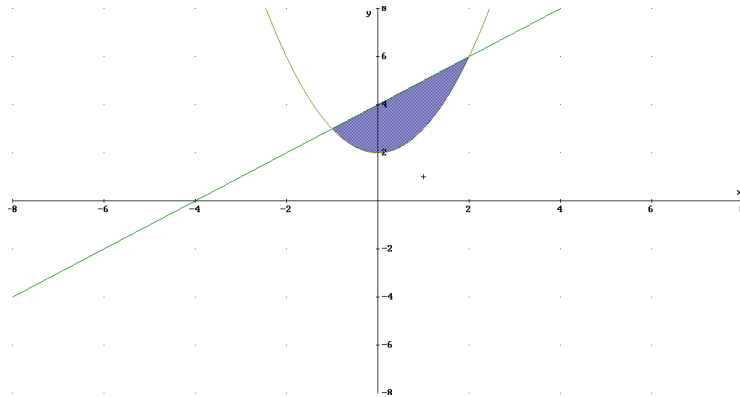
(1)  $S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2} u^2$  y (2)  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H u^3$

27.- a) Calcular el **volumen** del sólido de revolución engendrado al girar la región limitada por las funciones  $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$  alrededor del eje de abscisas.

b) Sean  $\begin{cases} r = 2 \\ r = \sqrt{8\text{sen}(2\alpha)} \end{cases}$  las ecuaciones en **coordenadas polares** de dos curvas planas. Calcular el **área** común a ambas en el primer cuadrante

**Solución:**

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$



El volumen pedido es igual al obtenido por la rotación de la recta menos el obtenido por la rotación de la parábola entre  $x=-1$  y  $x=2$ .

$$V_{\text{recta}} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^2 \pi (x+4)^2 dx = \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 8x + 4) dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = 63\pi$$

$$V_{\text{parábola}} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^2 \pi (x^2 + 2)^2 dx = \pi \int_{-1}^2 (x^4 + 8x^2 + 4) dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{8x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{153}{5}\pi$$

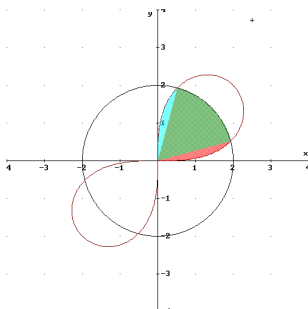
$$V = V_{\text{recta}} - V_{\text{parábola}} = 63\pi - \frac{153}{5}\pi = \frac{162}{5}\pi \text{ u}^3$$

DERIVE:

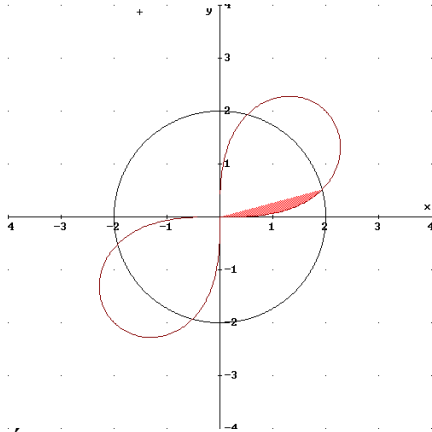
$$\#1: \text{VOLUME\_OF\_REVOLUTION}(x + 4, x, -1, 2) = \frac{63 \cdot \pi}{2} = \frac{153 \cdot \pi}{5}$$

$$\#2: \text{VOLUME\_OF\_REVOLUTION}(x^2 + 2, x, -1, 2) = \frac{153 \cdot \pi}{5}$$

$$\text{b) } \begin{cases} r = 2 \\ r = \sqrt{8\text{sen}(2\alpha)} \end{cases} \Rightarrow 2 = \sqrt{8\text{sen}(2\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \text{ en el primer cuadrante.}$$



El área común se obtiene como suma de las 3 superficies.



Área de la superficie limitada por  $r = 2$  y los rayos  $\alpha = \pi/12$  y  $\alpha = 5\pi/12$ .

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} 4 d\alpha = [2\alpha]_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{POLAR\_AREA}\left(r, 0, 2, \alpha, \frac{\pi}{12}, \frac{5 \cdot \pi}{12}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{3}$$

Área de la superficie limitada por  $r = \sqrt{8\text{sen}(2\alpha)}$  y los rayos  $\alpha = 5\pi/12$  y  $\alpha = \pi/2$ .

$$A_3 = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_{5\pi/12}^{\pi/2} 8\text{sen}(2\alpha) d\alpha = [2 \cos 2\alpha]_{5\pi/12}^{\pi/2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{POLAR\_AREA}\left(r, 0, \sqrt{(8 \cdot \text{SIN}(2 \cdot \alpha))}, \alpha, \frac{5 \cdot \pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

La suma de las tres superficies es:

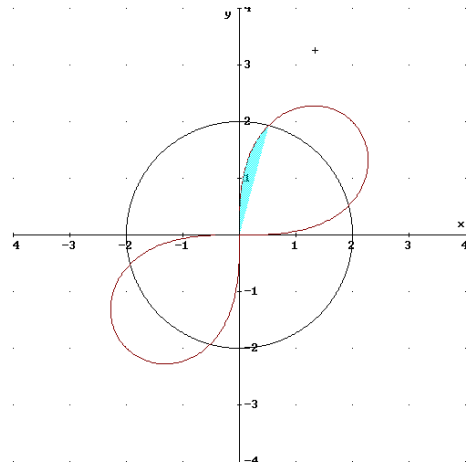
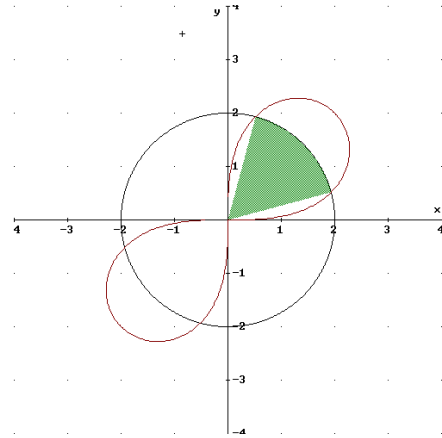
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + 2 - \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \text{ u}^2$$

## Integrales

Área de la superficie limitada por  $r = \sqrt{8\text{sen}(2\alpha)}$  y los rayos  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \pi/12$ .

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/12} 8\text{sen}(2\alpha) d\alpha = [2 \cos 2\alpha]_0^{\pi/12} = 2 - \sqrt{3}$$

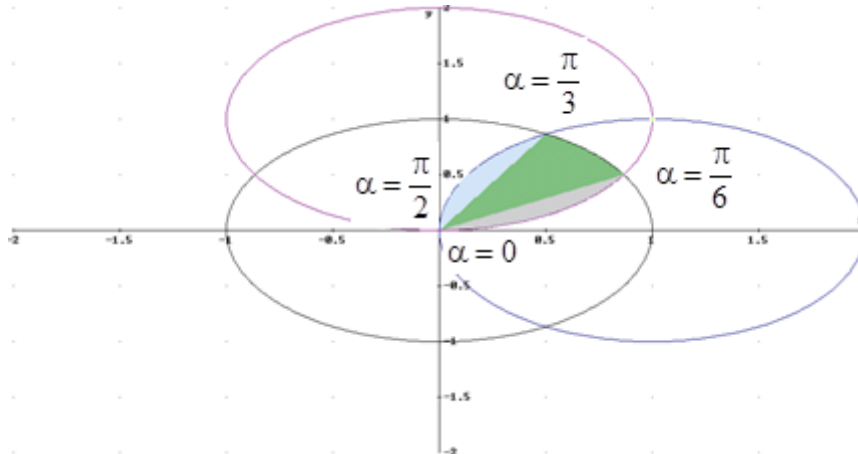
$$\text{POLAR\_AREA}\left(r, 0, \sqrt{(8 \cdot \text{SIN}(2 \cdot \alpha))}, \alpha, 0, \frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$$



## Integrales

**28. - Hallar el *área* común a los círculos  $r=2 \cos(\alpha)$ ,  $r=1$ ,  $r=2 \sin(\alpha)$**

**Solución:**



Buscamos los puntos de intersección para determinar los rayos vectores:

$$\begin{cases} r = 2 \sin(\alpha) \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} r = 2 \cos(\alpha) \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

y el punto del Polo (Origen)  $\begin{cases} r = 2 \sin(\alpha) \Rightarrow \alpha = 0 \\ r = 2 \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin \alpha)^2 d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1)^2 d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \alpha)^2 d\alpha = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1)^2 d\alpha + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\pi}{12} + 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha + 2 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{12} + \left[ \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[ \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} u^2 \end{aligned}$$

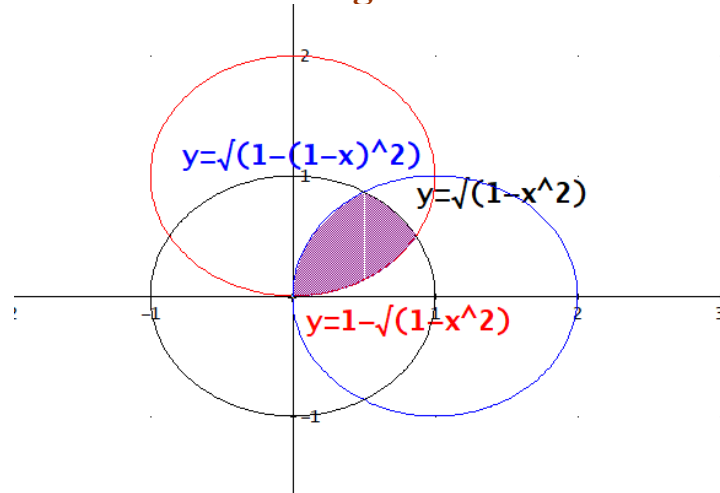
O bien, mediante sus ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = \sqrt{1-(x-1)^2} \\ y = 1 \pm \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

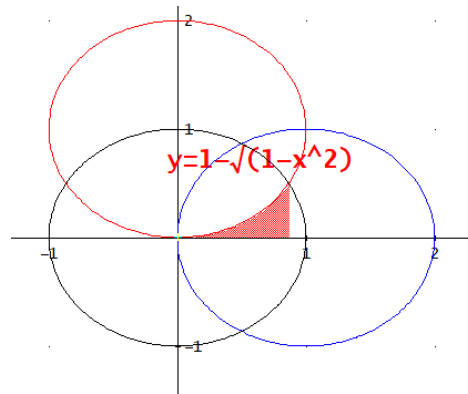
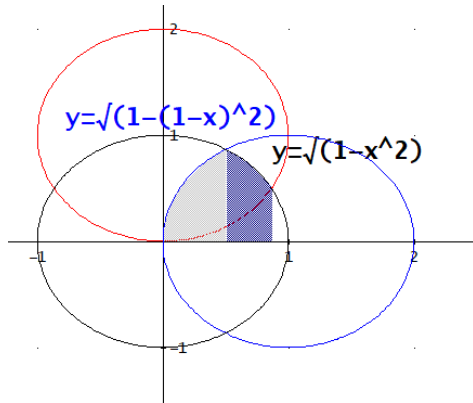
Resolvemos las intersecciones de las tres circunferencias

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

## Integrales



Para calcular el área se tiene en cuenta que mediante las integrales se obtiene el área hasta el eje de abscisas. Por lo tanto, se suman dos regiones y se resta la tercera:



$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1-(1-x)^2} dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^{\sqrt{3}/2} (1-\sqrt{1-x^2}) dx = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} u^2$$

29.- Hallar:

a) **Longitud** total de la curva, dada en **coordenadas polares**,

$$r = \operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right).$$

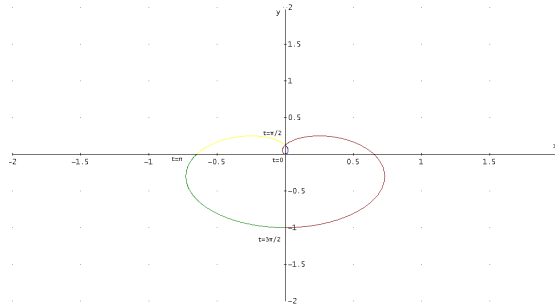
b) **Área** de la superficie de revolución obtenida al girar, alrededor del eje de abscisas, la curva de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \operatorname{sen} t \end{cases} \text{ para } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

c) **Área** limitada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Solución:**

a)  $r = \operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow r' = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$

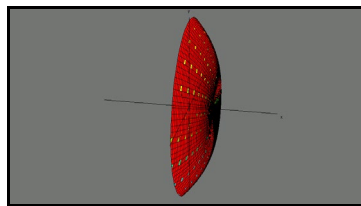


$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\alpha = 2 \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\left(\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2} \, d\alpha = 2 \int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \, d\alpha = \\ &= 2 \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right) \, d\alpha = \frac{3\pi}{2} - \int_0^{3\pi/2} \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \, d\alpha = \frac{3\pi}{2} + \left[\frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right]_0^{3\pi/2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

DERIVE:

#1:  $2 \cdot \text{POLAR\_ARC\_LENGTH}\left(\text{SIN}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3, \alpha, 0, \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = \frac{3 \cdot \pi}{2}$

b)



$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t \\ y'(t) = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x'(t))^2 = e^{2t} (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 \\ (y'(t))^2 = e^{2t} (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 \end{cases}$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 2e^{2t}$$

$$S_L = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi y \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} e^t \operatorname{sen} t \sqrt{2e^{2t}} \, dt = 2\pi \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^{2t} \operatorname{sen} t \, dt = (*)$$

Resolveremos la integral por partes:  $I = \int e^{2t} \operatorname{sen} t \, dt$

$$u = e^{2t} \Rightarrow du = 2e^{2t} \, dt$$

$$dv = \operatorname{sen} t \, dt \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} t \, dt = -\cos t$$

## Integrales

$$I = \int \underbrace{e^{2t}}_u \underbrace{\text{sent}}_{dv} dt = \int u dv = uv - \int v du = -e^{2t} \cos t - \int -\cos t 2e^{2t} dt = (1)$$

De nuevo por partes:

$$u = e^{2t} \Rightarrow du = 2e^{2t} dt$$

$$dv = \cos t dt \Rightarrow v = \int \cos t dt = \text{sent}$$

$$(1) = -e^{2t} \cos t + 2 \int \cos t e^{2t} dt = -e^{2t} \cos t + 2 \int \underbrace{e^{2t}}_u \underbrace{\cos t}_{dv} dt = -e^{2t} \cos t + 2 \int u dv =$$

$$= -e^{2t} \cos t + 2 \left( e^{2t} \text{sent} - \int 2e^{2t} \text{sent} \right) = -e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \text{sent} - 4 \int e^{2t} \text{sent} dt =$$

$$= -e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \text{sent} - 4 \int e^{2t} \text{sent} dt = -e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \text{sent} - 4I = I$$

Resolviendo la ecuación:

$$I = \frac{-e^{2t} \cos t + 2e^{2t} \text{sent}}{5} = \frac{e^{2t} (2\text{sent} - \cos t)}{5} + C. \text{ Sustituyendo la primitiva:}$$

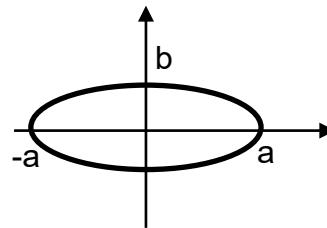
$$(*) = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \text{sent} dt = 2\sqrt{2}\pi \left[ \frac{e^{2t} (2\text{sent} - \cos t)}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi}{2}} \left( 2\text{sen} \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right)}{5} - \frac{e^{2 \cdot 0} (2\text{sen} 0 - \cos 0)}{5} = 2\sqrt{2}\pi \left( \frac{2e^{\frac{2\pi}{2}} - e^0(-1)}{5} \right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left( \frac{2e^{\pi} + 1}{5} \right) u^2$$

$$c) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A = \int_a^b f(x) dx = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = (*)$$



Utilizamos el cambio  $x = a \text{sent}$

$$x = a \text{sent} \Rightarrow dx = a \cos t dt \begin{cases} a = a \text{sent} \Rightarrow 1 = \text{sent} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ -a = a \text{sent} \Rightarrow -1 = \text{sent} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(*) = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 \frac{b}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \text{sent})^2} a \cos t dt =$$

$$= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\text{sent})^2} \cos t dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = ab \left[ t + \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab u^2$$

30.- Calcular  $\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$

**Solución:**

$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  es la función de Euler y en nuestro caso  $p-1=1/2$  y  $q-1=-1/2$  luego  $p=3/2$  y  $q=1/2$ .

Por tanto la integral pedida vale  $\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

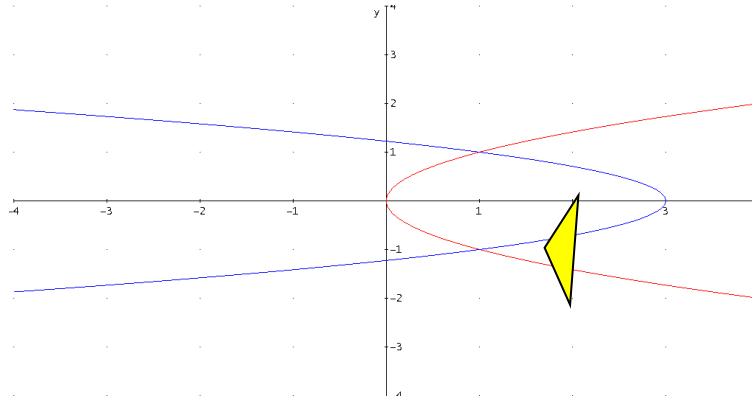
Como  $\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  resulta

$$\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1!} = \frac{1}{2}\pi$$

31. - a) La base de un sólido es la región comprendida entre las **parábolas**  $x = y^2$ ,  $x = 3 - 2y^2$ . Hallar el **volumen** del sólido sabiendo que las secciones perpendiculares al eje X son triángulos equiláteros.  
 b) Hallar la **longitud** del primer lazo (en el primer cuadrante) de la curva  $r = 2 \operatorname{sen}(3\alpha)$

c) Analizar, sin calcular, la **convergencia** de la integral  $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$

**Solución:**

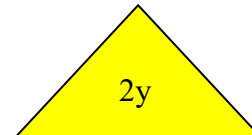


a)

Resolviendo el sistema obtenemos los puntos de intersección

$$\left. \begin{array}{l} x = y^2 \\ x = 3 - y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

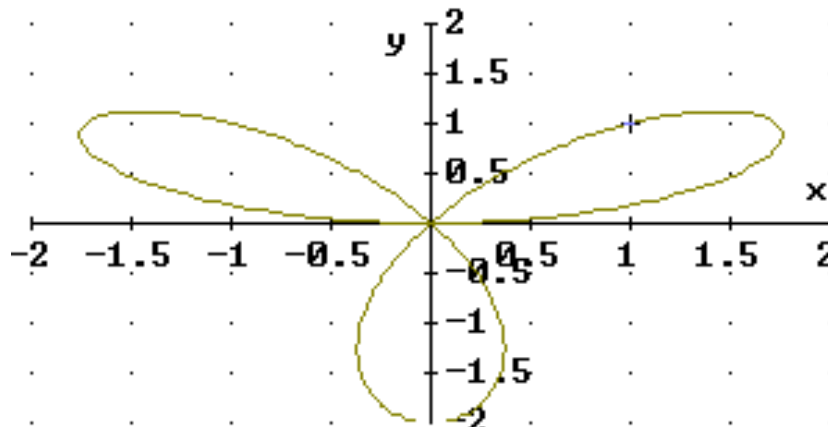
El área del triángulo equilátero de lado  $2y$  es:  $\frac{1}{2}\sqrt{3}2y = \sqrt{3}y^2$



$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^1 \sqrt{3}y_1^2 dx + \int_1^3 \sqrt{3}y_2^2 dx = \int_0^1 \sqrt{3}x dx + \int_1^3 \sqrt{3} \frac{3-x}{2} dx =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} u^3$$

b) Hallar la longitud del primer lazo (en el primer cuadrante) de la curva:  
 Dibujamos la curva:





## Integrales



$$\left. \begin{array}{l} r = 2 \operatorname{sen}(3\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = \pm \frac{\pi}{3} \end{array} \Rightarrow r'(\alpha) = 6\cos(3\alpha)$$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\alpha = \int_0^{\pi/3} \sqrt{(2 \operatorname{sen}(3\alpha))^2 + (6\cos(3\alpha))^2} d\alpha = 2 \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + 8(\cos(3\alpha))^2} d\alpha$$

Aproximadamente **4.454964406**

c) Analizar, sin calcular, la convergencia de la integral:

integral impropia de 3ª especie, se descompone en suma de dos integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

analizando cada una por separado

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ 2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 \text{ es convergente}$$

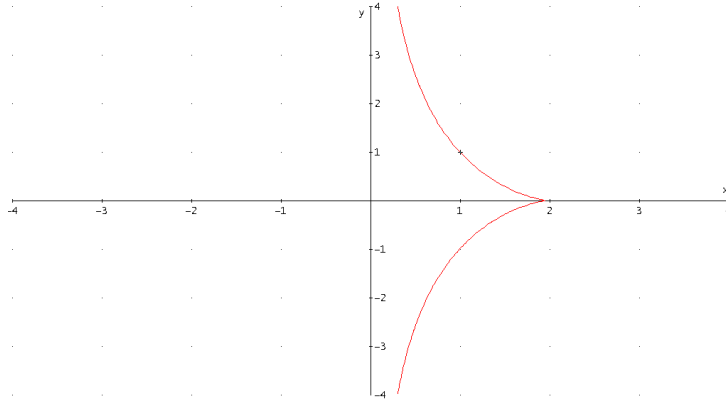
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{1}{x^{3/2}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^k = 2 \text{ es convergente}$$

Por tanto, la integral pedida es **convergente**

32.- Dada la curva plana  $y^2=(2-x)^3/x$  (*cisoide*), se pide:

- Longitud del arco de curva para  $x \in [1, 2]$
- Área de la región comprendida entre la cisoide y su asíntota.
- Volumen que engendra la región comprendida entre la cisoide y su asíntota al girar alrededor del eje de abscisas.
- Área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje de abscisas para  $x \in [1, 2]$ .

**Solución:**



$$\text{a) Longitud} = L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$y = \sqrt{\frac{(2-x)^3}{x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \frac{-3(2-x)^2 x - (2-x)^3}{x^2 \sqrt{\frac{(2-x)^3}{x}}} = -\frac{(1+x)(2-x)^2}{x^2 \sqrt{\frac{(2-x)^3}{x}}}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \left( -\frac{(1+x)(2-x)^2}{x^2 \sqrt{\frac{(2-x)^3}{x}}} \right)^2 = 1 + \frac{(1+x)^2 (2-x)^4}{x^4 (2-x)^3} = 1 + \frac{(1+x)^2 (2-x)}{x^3} = \frac{2+3x}{x^3}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{2+3x}{x^3}} dx = \boxed{2\sqrt{3} \ln(7\sqrt{15} - 12\sqrt{5} - 16\sqrt{3} + 28) + 4\sqrt{5} - 8} u$$

$$\text{b) Área} = A = \int_a^b |f(x)| dx = 2 \int_0^2 \sqrt{\frac{(2-x)^3}{x}} dx = \boxed{3 \cdot \pi u^2}$$

$$\text{c) Volumen} = V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 \frac{(2-x)^3}{x} dx = \boxed{\infty}$$

$$\text{d) Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^2 \sqrt{\frac{(2-x)^3}{x}} \sqrt{\frac{2+3x}{x^3}} dx =$$

**DERIVE :**

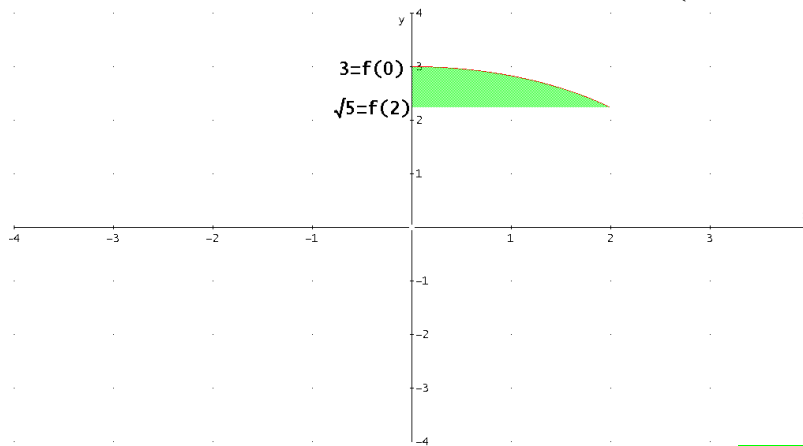
#9:

$$\boxed{32 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \text{ATAN} \left( \frac{\sqrt{15}}{5} \right) - 6 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi - \frac{u^2}{3}}$$

- 33.-a) Hallar el **área** de la porción de esfera generada al girar, en torno al eje  $y$ , la gráfica de la función  $y = \sqrt{9 - x^2}$  en  $0 \leq x \leq 2$ .
- b) Hallar la **longitud** de arco de la curva dada por las **ecuaciones paramétricas**  $\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$  en el intervalo  $1 \leq t \leq 2$
- c) Estudiar, sin calcular, la **convergencia** de la integral  $\int_0^3 \frac{1}{x^2 - 2x} dx$ .

**Solución:**

a)  $y = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{9 - y^2} \Rightarrow x' = -\frac{y}{\sqrt{9 - y^2}} \Rightarrow 1 + (x')^2 = 1 + \left(-\frac{y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2 = \frac{9}{9 - y^2}$



Área de la superficie  $= 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_{\sqrt{5}}^3 \sqrt{9 - y^2} \sqrt{\frac{9}{9 - y^2}} dy = 6\pi(3 - \sqrt{5})u^2$

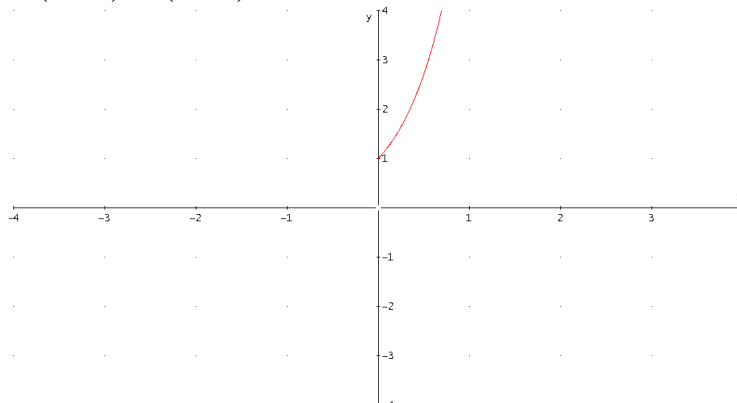
DERIVE:

#1:  $AREAY\_OF\_REVOLUTION(\sqrt{(9 - x^2)}, x, 0, 2) = \pi \cdot (18 - 6 \cdot \sqrt{5})$   
o bien, despejando  $x$  en la función, puesto que se gira alrededor del eje  $Y$

b)

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1/t \\ y'(t) = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x'(t))^2 = 1/t^2 \\ (y'(t))^2 = 4t^2 \end{cases}$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1/t^2 + 4t^2$$





## Integrales



$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_1^2 \sqrt{1/t^2 + 4t^2} dt = \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{65}}{16} + \frac{5\sqrt{13}}{16} - \frac{\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16} \right) + \sqrt{65} - \sqrt{5} \right) u$$

O bien, con la función:

$$\#2 \quad \text{PARA\_ARC\_LENGTH}([\text{LN}(t), t^2], t, 1, 2) =$$

$$\frac{\text{LN} \left( \frac{\sqrt{65}}{16} + \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{16} - \frac{\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16} \right)}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

c)

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2 - 2x} dx = \int_0^3 \frac{1}{2(x-2)} dx - \int_0^3 \frac{1}{2x} dx$$

Analizamos cada integral por separado:

$$\int_0^3 \frac{1}{2(x-2)} dx = \int_0^2 \frac{1}{2(x-2)} dx + \int_2^3 \frac{1}{2(x-2)} dx$$

es impropia de segunda especie y por ser de la forma  $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^p} dx$  con  $p=1$  es

divergente.

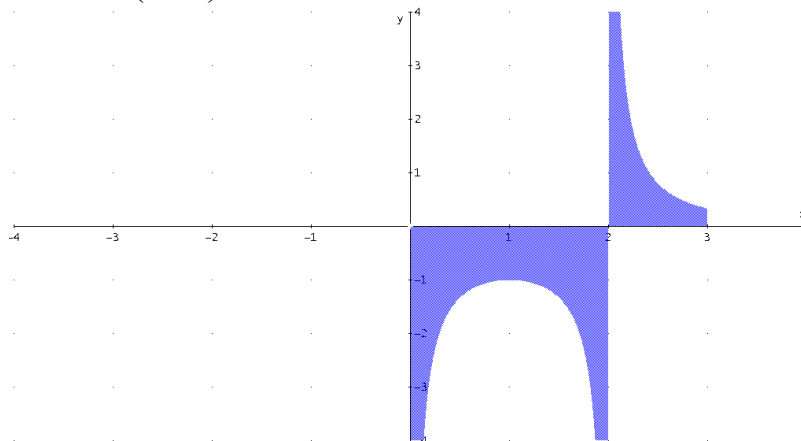
$$\int_0^3 \frac{1}{2x} dx$$

es impropia de segunda especie y por ser de la forma  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$  con  $p=1$  es

divergente.

La integral propuesta es **divergente**

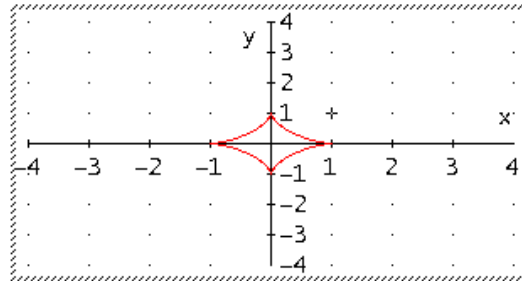
$$\int_0^3 \frac{1}{x^2 - 2x} dx = \int_0^3 \frac{1}{2(x-2)} dx - \int_0^3 \frac{1}{2x} dx = \infty$$



34.- Hallar el *perímetro* de la curva  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

**Solución:**

$$\left[ \cos(t)^3, \sin(t)^3 \right]$$



Obtenemos la gráfica y observamos que es simétrica respecto el eje de abscisas y el eje de ordenadas, luego nos limitaremos a calcular la longitud de una rama.

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = (*)$$

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3a \cos^2 t \sin t \\ y' = 3a \sin^2 t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x')^2 = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t \\ (y')^2 = 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t \end{cases}$$

$$\text{Sumando } x'^2(t) + y'^2(t) = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

$$(*) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 12|a| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12|a| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2t) dt = 6|a| \left[ -\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6|a|u$$

DERIVE:

$$\text{PARA\_ARC\_LENGTH}([a \cdot \cos(t)^3, a \cdot \sin(t)^3], t, 0, 2 \cdot \pi)$$

$$6 \cdot |a|$$

35.- a) Hallar el **perímetro** del recinto limitado por la curva

$$y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} \text{ y la recta } y=1$$

b) Hallar la **longitud** de las siguientes curvas:

- **cardioide**  $\begin{cases} x = 2\text{sen } t - \text{sen}(2t) \\ y = 2 \cos t - \cos(2t) \end{cases}$
- **espiral**  $r = e^\alpha$  para  $\alpha < 0$

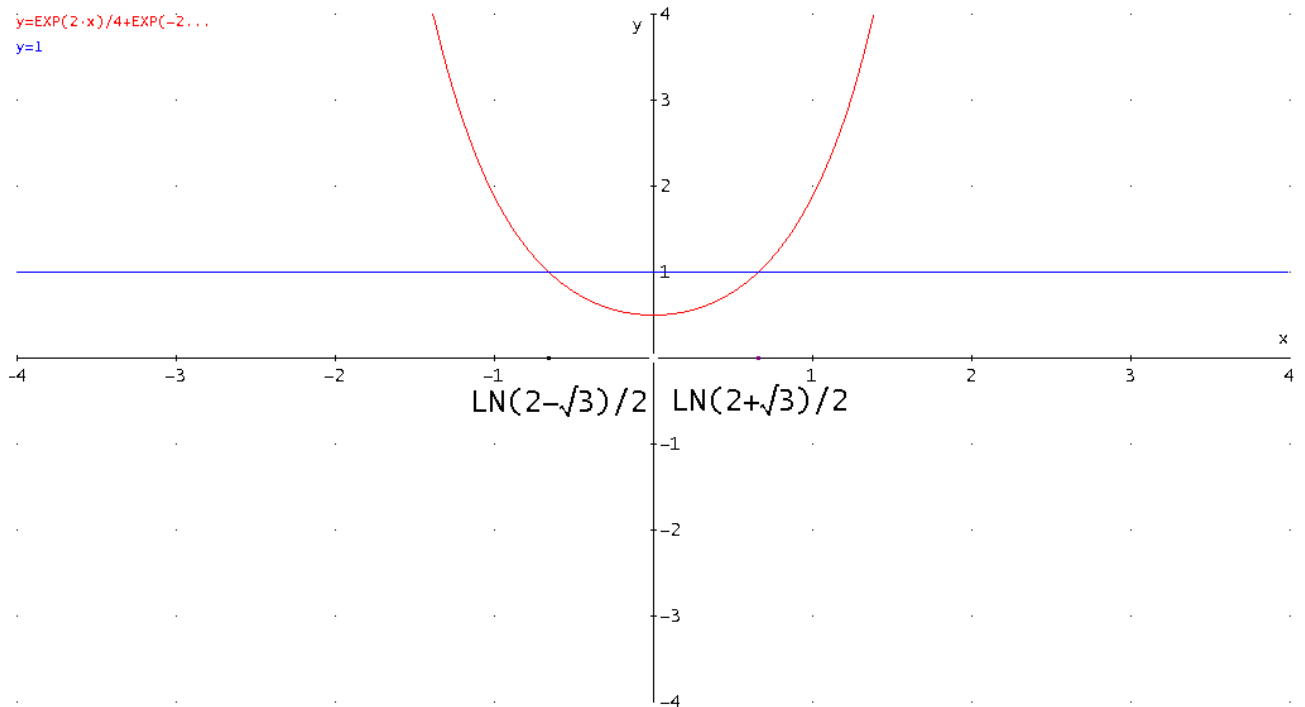
**Solución:**

a)

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} \\ y &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{4} + \frac{1}{2}$$

$y = \text{EXP}(2 \cdot x)/4 + \text{EXP}(-2 \cdot x)/4$   
 $y = 1$



$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{\frac{1}{2} \ln(2-\sqrt{3})}^{\frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})} \sqrt{1 + \left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right)^2} dx = \int_{\frac{1}{2} \ln(2-\sqrt{3})}^{\frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})} \sqrt{\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{4} + \frac{1}{2}} dx = \\ &= \int_{\frac{1}{2} \ln(2-\sqrt{3})}^{\frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right]_{\frac{1}{2} \ln(2-\sqrt{3})}^{\frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3})} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Y el segmento  $\frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 - \sqrt{3})$ .

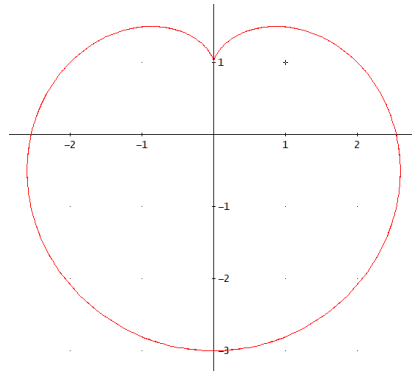
Por consiguiente, el perímetro será.  $\sqrt{3} - \ln(2 - \sqrt{3})$

Aproximadamente, **3.049008704 u**



## Integrales

b)

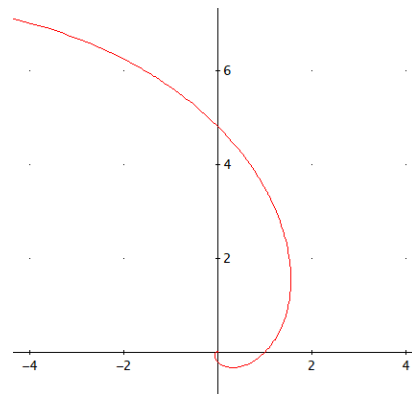


$$\begin{cases} x = 2\sin t - \sin(2t) \\ y = 2\cos t - \cos(2t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2\cos t - 2\cos(2t) \\ y' = -2\sin t + 2\sin(2t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x')^2 = (2\cos t - 2\cos(2t))^2 \\ (y')^2 = (-2\sin t + 2\sin(2t))^2 \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 8 - 8\cos t \cos(2t) - 8\sin t \sin(2t)$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos t \cos(2t) - 8\sin t \sin(2t)} dt = \mathbf{16u}$$

c)



$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = \int_{-\infty}^0 \sqrt{(e^\alpha)^2 + (e^\alpha)^2} d\alpha = \sqrt{2} \int_{-\infty}^0 e^\alpha d\alpha = \mathbf{\sqrt{2}u}$$

36.- Estudiar la naturaleza de la siguiente integral en función de los valores de  $p$   $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$  y calcularla cuando sea *convergente*.

*Solución:*

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$  discontinuidad en  $x=a$  (integral impropia de 2ª especie)

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

si  $p=1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(x-a)]_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|b-a| - \ln\varepsilon) = \infty$$

**DIVERGENTE**

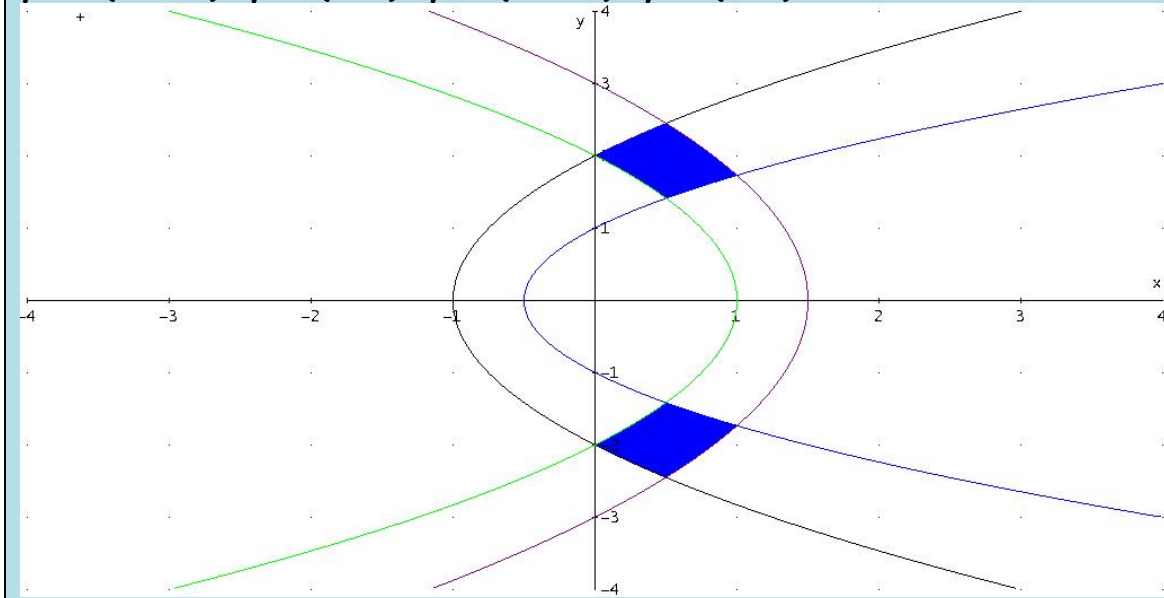
si  $p \neq 1$

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \right]_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) = (*)$$

$$\text{Si } p < 1 \Rightarrow 1-p > 0 \Rightarrow I = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} \quad \text{CONVERGENTE}$$

$$\text{Si } p > 1 \Rightarrow 1-p < 0 \Rightarrow I = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} + \infty = \infty \quad \text{DIVERGENTE}$$

37.- a) Hallar la **longitud** del arco de curva dada en polares  $r=4+2\sec(\alpha)$  en el intervalo  $[2\pi/3, 4\pi/3]$ .  
 b) Hallar el **área** marcada en la figura que encierran las **parábolas**:  
 $y^2 = 2(x+1/2)$ ;  $y^2=4(x+1)$ ;  $y^2=6(3/2-x)$ ;  $y^2=4(1-x)$ .



**Solución:**

a)

$$\begin{cases} r = 4 + 2\sec(\alpha) = 4 + \frac{2}{\cos(\alpha)} \\ r' = \frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r)^2 = \left(4 + \frac{2}{\cos(\alpha)}\right)^2 \\ (r')^2 = \left(\frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right)^2 \end{cases}$$

$$(r)^2 + (r')^2 = 16 + \frac{16}{\cos(\alpha)} + \frac{4}{\cos^2(\alpha)} + \frac{4\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^4(\alpha)}$$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\alpha = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \sqrt{16 + \frac{16}{\cos(\alpha)} + \frac{4}{\cos^2(\alpha)} + \frac{4\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^4(\alpha)}} \, d\alpha \approx \mathbf{5.812830804}$$

DERIVE:

#1: POLAR\_ARC\_LENGTH  $\left( 4 + 2 \cdot \operatorname{SEC}(\alpha), \alpha, \frac{2 \cdot \pi}{3}, \frac{4 \cdot \pi}{3} \right)$

#2: 
$$2 \cdot \int_{2 \cdot \pi / 3}^{4 \cdot \pi / 3} \frac{\sqrt{(4 \cdot \operatorname{COS}(\alpha))^4 + 4 \cdot \operatorname{COS}(\alpha)^3 + 1}}{\operatorname{COS}(\alpha)^2} \, d\alpha$$

#3:  $\mathbf{5.812830804}$

b)

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 2(x+1/2) \\ y^2 = 6(3/2-x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=\sqrt{3} \\ x=-1 \Rightarrow y=-\sqrt{3} \end{cases}$$



## Integrales



$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 2(x+1/2) \\ y^2 = 4(1-x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 4(x+1) \\ y^2 = 6(3/2-x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sqrt{6} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 4(x+1) \\ y^2 = 4(1-x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

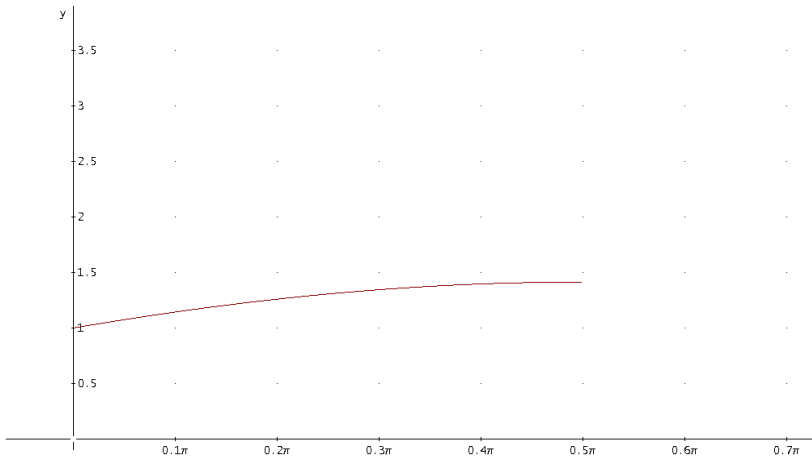
Obtenemos la parte superior y por simetría multiplicamos por 2:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = 2 \left( \int_0^{1/2} (\sqrt{4(x+1)} - \sqrt{4(1-x)}) dx + \int_{1/2}^1 (\sqrt{6(3/2-x)} - \sqrt{2(x+1/2)}) dx \right) = \\ &= \frac{10\sqrt{6}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{16}{3} \Big|_u^2 \end{aligned}$$

38.- a) Estudiar si la integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha}} d\alpha$  es *impropia* y, en su caso, decir de qué tipo es. A continuación, calcularla aplicando la definición.

b) Hallar el *área* generada en la rotación de la mitad superior de la cardioide  $r = a(1 - \cos \theta)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , alrededor de su eje polar.

**Solución:**

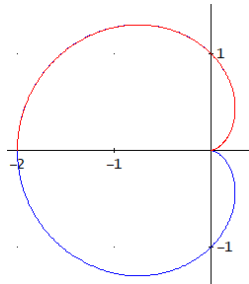


$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha}} = \sqrt{2}$$

a) **No** es una integral impropia, pues la función es continua en  $(0, \pi/2)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha}} d\alpha = \left[ -2\sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{2}$$

b)



$$S = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} r(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 - \cos \theta) \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{(a(1 - \cos \theta))^2 + (a \operatorname{sen} \theta)^2} =$$

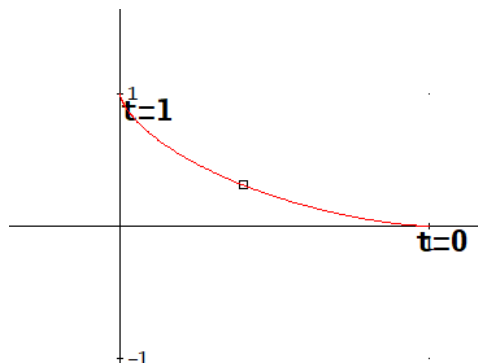
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta)^{3/2} \operatorname{sen}(\theta) d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2 \frac{2}{5} \left[ (1 - \cos \theta)^{5/2} \right]_0^{\pi} = \mathbf{\frac{32\pi}{5} a^2 u^2}$$

39.- En cada instante  $t$ , la posición de un móvil viene determinada por las coordenadas:  $x = a \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ ,  $y = a \cdot \text{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

Se pide:

- a) **Longitud** del camino recorrido por el móvil entre los instantes  $t = 0$  y  $t = 1$ .
- b) **Área** de la superficie obtenida por la revolución de la curva descrita por el móvil desde el inicio ( $t = 0$ ) hasta volver a la posición inicial, al girar alrededor del eje  $OX$ .
- c) **Volumen** del sólido obtenido en el apartado anterior.

**Solución:**



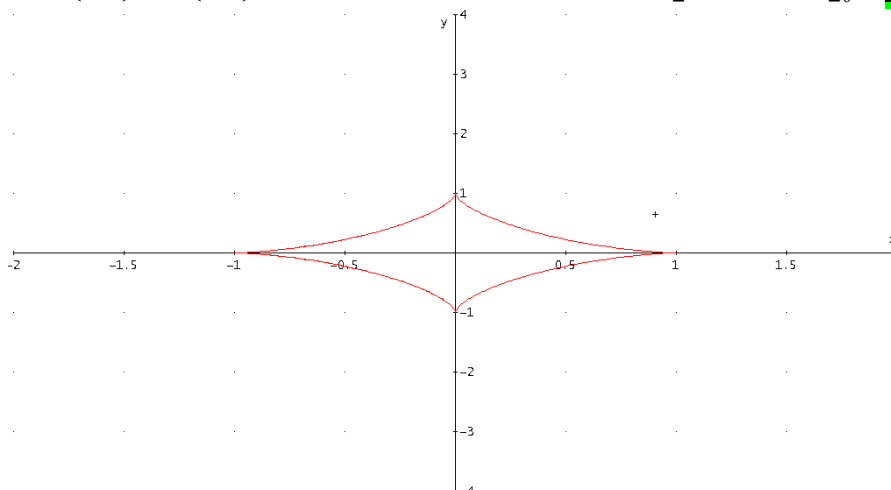
$$a) \begin{cases} x = a \cos^3\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = a \text{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3a \frac{\pi}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y' = 3a \frac{\pi}{2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x')^2 = 9a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^4\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ (y')^2 = 9a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$$

Sumando

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^4\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 9a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 9a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^1 \sqrt{9a^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)} dt =$$

$$= \frac{3}{2} \pi |a| \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \frac{3}{2} \pi |a| \int_0^1 \frac{1}{2} \text{sen}(\pi t) dt = \frac{3}{4} \pi |a| \left[ -\frac{1}{\pi} \cos(\pi t) \right]_0^1 = \frac{3}{2} |a| u$$





## Integrales

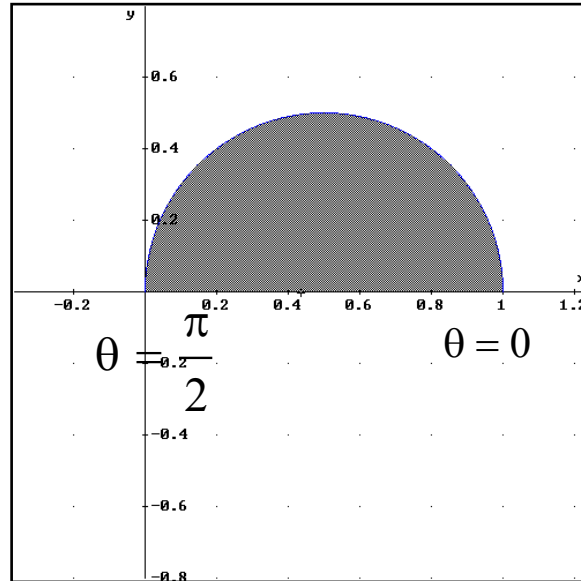


$$\begin{aligned} \text{b) } S_L &= 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2 \cdot 2\pi^2 \frac{3a^2}{2} \int_0^1 \text{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \\ &= 6\pi^2 a^2 \int_0^1 \text{sen}^4\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = 6\pi^2 a^2 \left[ \frac{2}{5\pi} \text{sen}^5\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right]_0^1 = \frac{12\pi a^2}{5} u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } V &= \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) x'(t) dt = 2\pi \int_1^0 \left( a \text{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right)^2 \left( -3a \frac{\pi}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) dt = \\ &= 3\pi^2 a^3 \int_0^1 \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{sen}^7\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) dt = \frac{32}{105} \pi a^3 u^3 \end{aligned}$$

40.- Calcular el **área** delimitada por la curva  $r=\cos\theta$

*Solución:*



Calculamos el área del semicírculo y multiplicamos por 2:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta \right) = \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{\text{sen} 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} u^2$$

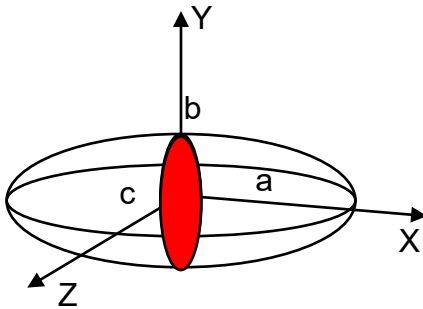
## 41.- Calcular el *volumen* del elipsoide.

*Solución:*

Ecuación de la elipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

El área de la sección  $A(x)$  es el área de la elipse, cuyos semiejes dependen del punto de intersección  $x$



Al cortar con el plano perpendicular al eje OX,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

Semiejes:  $b \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$  y  $c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$

$$A(x) = \pi b \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

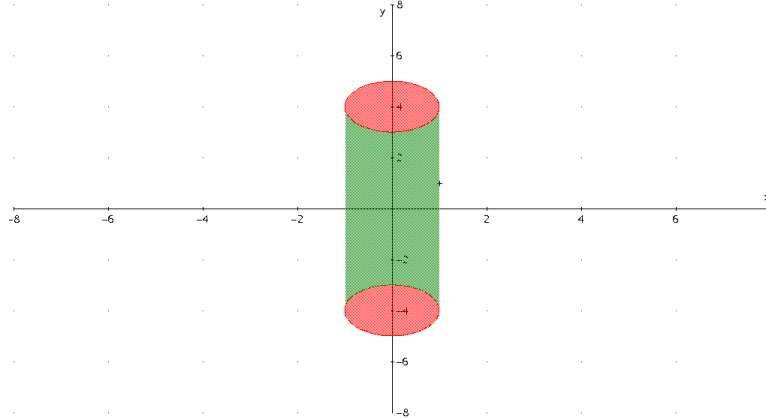
Por consiguiente, teniendo en cuenta los límites sobre el eje X:

$$V = \int_{-a}^a A(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \left[ \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc u^3$$

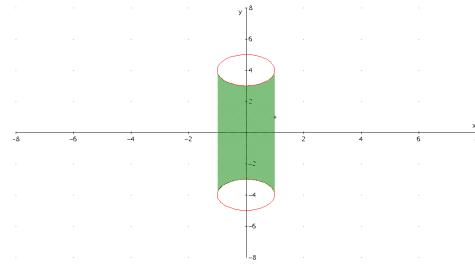
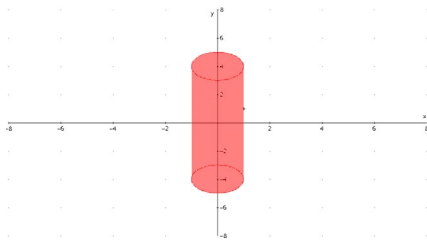
42. - Hallar el **volumen** engendrado por la rotación de la circunferencia  $x^2+(y-4)^2=1$  al girar alrededor del eje OX.

**Solución:**

Al girar un círculo alrededor de un eje que está en el mismo plano que el círculo pero que no corta a éste se obtiene un toro:



Debemos considerar el volumen del cuerpo obtenido al girar la semicircunferencia superior menos el correspondiente a la semicircunferencia inferior, ya que la generatriz es una curva cerrada.



$$y = 4 + \sqrt{1-x^2}; 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1; y = 4 - \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_{-1}^1 \left( (4 + \sqrt{1-x^2})^2 - (4 - \sqrt{1-x^2})^2 \right) dx = \\ &= \pi \int_{-1}^1 \left( 16 + 8\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 - (16 - 8\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2) \right) dx = 16\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = (*) \end{aligned}$$

$$\text{Con el cambio } x = \text{sent} \Rightarrow dx = \cos t dt \begin{cases} 1 = \text{sent} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ -1 = \text{sent} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

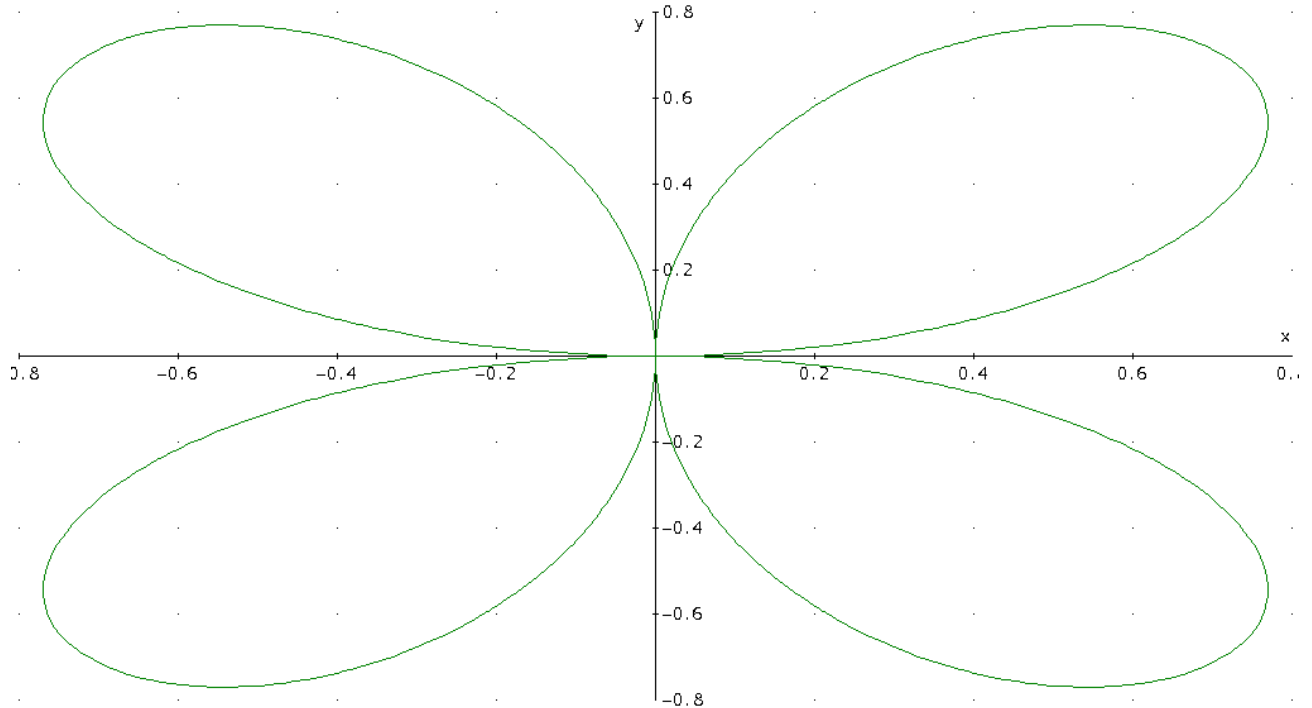
$$(*) = 16\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\text{sent})^2} \cos t dt = 16\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= 16\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8\pi \left[ t + \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = 8\pi^2 u^3$$

## Integrales

43.- La curva  $r=a \operatorname{sen}(2\alpha)$  gira alrededor del eje polar. Calcular el **volumen** obtenido.

**Solución:**



El volumen es generado por dos pétalos y por simetría el doble del obtenido con un solo pétalo.

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = 2 \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = 2 \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \operatorname{sen} 2\alpha)^3 \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2\alpha)^3 \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = \frac{4}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)^3 \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{32}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = (*) \end{aligned}$$

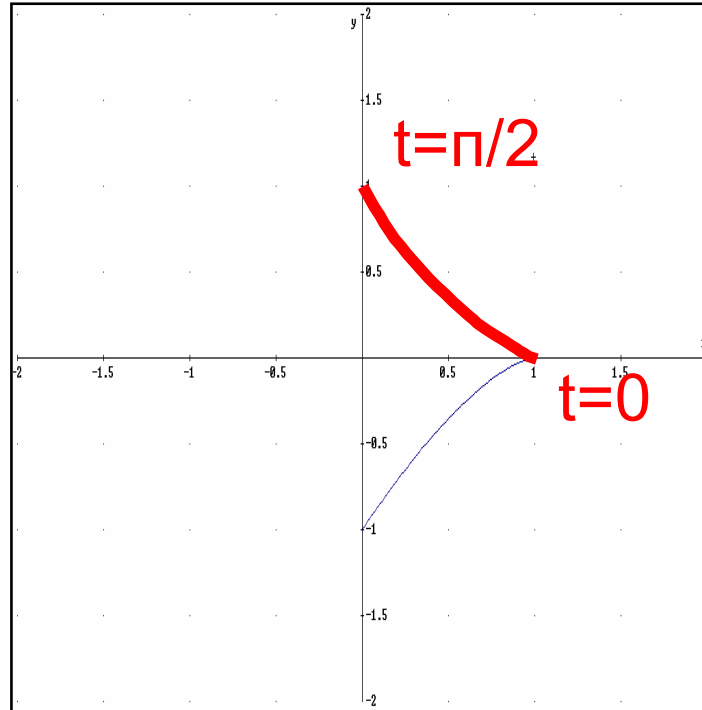
La función beta de Euler permite resolver esta integral.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{32}{3} \pi a^3 \frac{1}{2} \beta(5/2, 2) = \frac{16}{3} \pi a^3 \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+2\right)} = \frac{16}{3} \pi a^3 \frac{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)\Gamma(1)}{\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \\ &= \frac{16}{3} \pi a^3 \frac{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)\Gamma(1)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{16}{3} \pi a^3 \frac{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)\Gamma(1)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \boxed{\frac{64}{105} \pi a^3} u^3 \end{aligned}$$

44. - Hallar la **longitud** total de la curva dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

**Solución:**



Obtenemos la gráfica y observamos que es simétrica respecto el eje de abscisas, luego nos limitaremos a calcular la longitud de una rama.

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = (*)$$

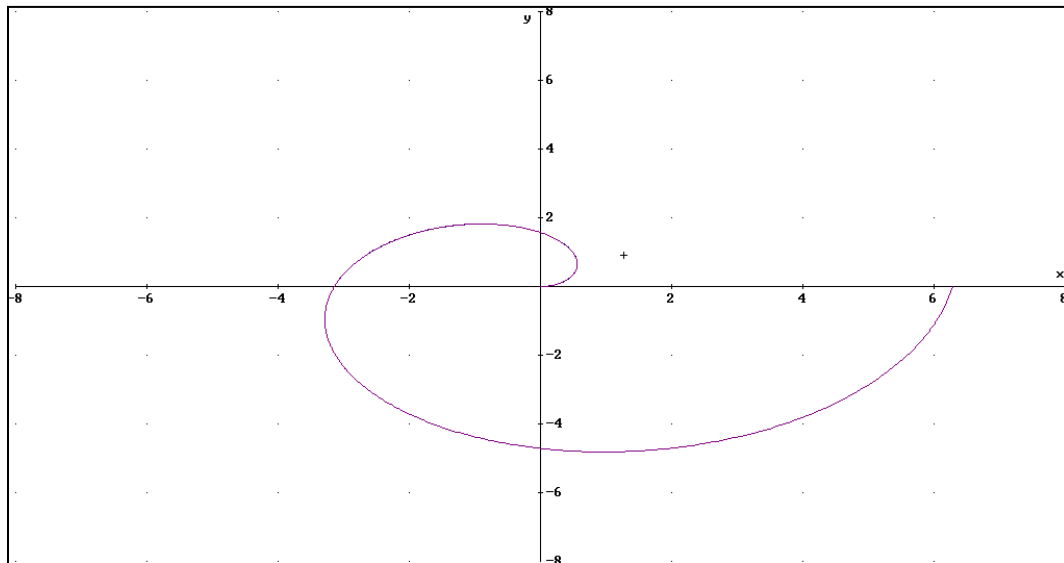
Calculamos las derivadas:

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cos t \sin t \\ y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(t) = 4 \cos^2 t \sin^2 t \\ y^2(t) = 9 \sin^4 t \cos^2 t \end{cases}$$

$$(*) = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (4 + 9 \sin^2 t)} dt = \boxed{\frac{26\sqrt{13}}{27} - \frac{16}{27} u}$$

45. -Calcular la *longitud* del primer paso de la espiral de Arquímedes  $r = a\theta$  con  $a > 0$ .

*Solución:*



Tenemos que:  $r = a\theta$ , luego  $r' = a$ , por tanto,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r'^2 + r^{\prime 2}} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} \, d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} \, d\theta = (*)$$

Con el cambio:  $\theta = \text{sh}t \Rightarrow d\theta = \text{ch}t \, dt \Rightarrow t = \text{arg sh}\theta$

$$(*) = a \int_0^{\text{arg sh}(2\pi)} \sqrt{\text{sh}^2 t + 1} \cdot \text{ch}t \, dt = a \int_0^{\text{arg sh}(2\pi)} \sqrt{\text{ch}^2 t} \cdot \text{ch}t \, dt = a \int_0^{\text{arg sh}(2\pi)} \text{ch}^2 t \, dt = a \int_0^{\text{arg sh}(2\pi)} \frac{1 + \text{ch}2t}{2} \, dt =$$

$$= \frac{a}{2} \left[ t + \frac{2\text{sh}t \cdot \text{ch}t}{2} \right]_0^{\text{arg sh}(2\pi)} = \frac{a}{2} \left[ \text{arg sh}\theta + \theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a}{2} \left[ \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) + \theta\sqrt{\theta^2 + 1} \right]_0^{2\pi} = \frac{a}{2} \left[ \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} \right] u$$



## Integrales

46.- Dada la curva  $r = 3\cos(3\alpha)$

a) Estudiar el **dominio** de  $r$ .

b) Hallar el **área** limitada por los tres lazos de la curva del enunciado.

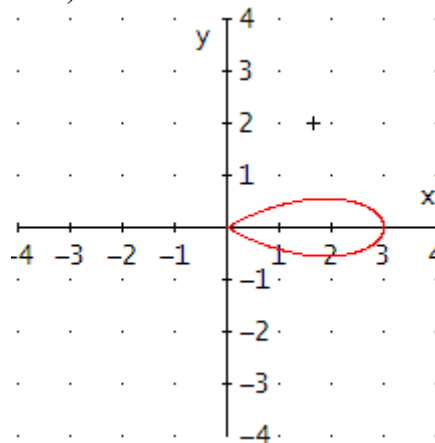
**Solución:**

a) Para pertenecer al dominio de  $r$  son todos los números Reales menos aquellos que hagan a  $r$  menor que cero, infinito o no sea un  $n^\circ$  real.

Resolvemos la ecuación trigonométrica:

$$\left. \begin{array}{l} r = 3\cos(3\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} 0 = 3\cos(3\alpha) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Dibujo de un lazo ( $-\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/6$ ):

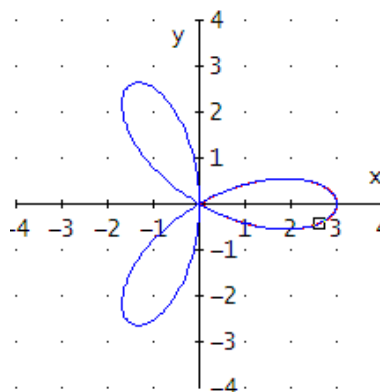


a) Dominio de  $r$ :

Solamente consideramos  $r = \cos(3\alpha) \geq 0$ , luego,  $3\alpha$  variando en:

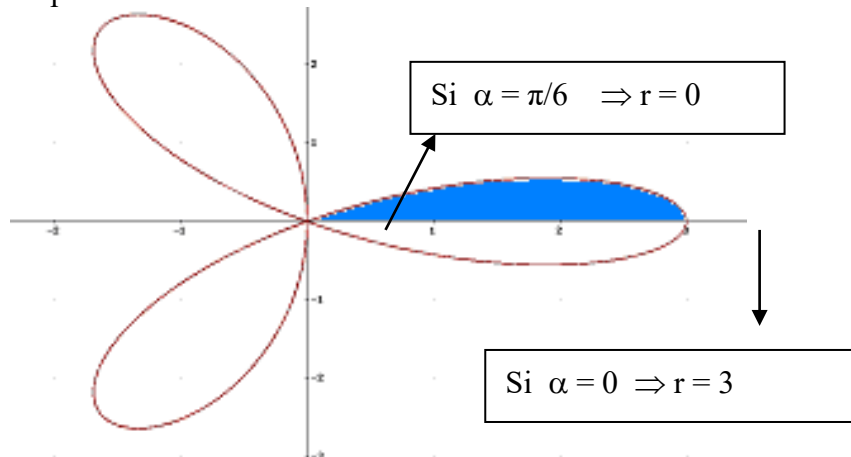
$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 3\alpha \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n \leq 3\alpha \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n \text{ siendo } n \in \mathbb{N}$$

que es el dominio de  $r(\alpha)$ .



## Integrales

b) Área encerrada por la curva:



Es 6 veces el área encerrada por medio lazo (o tres veces el área encerrada por un lazo)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = 6 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (3 \cos(3\alpha))^2 d\alpha = 27 \int_0^{\pi/6} \cos^2(3\alpha) d\alpha = 27 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos(6\alpha)}{2} d\alpha = \\
 &= \frac{27}{2} \left[ \alpha + \frac{\sin(6\alpha)}{6} \right]_0^{\pi/6} = \frac{27}{2} \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{4} \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

## Integrales

47.- a) Hallar la **longitud** del arco de la curva:

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t$$

$$y = \operatorname{sen} t - t \operatorname{cost}$$

desde el punto (1, 0) hasta el punto (-1,  $\pi$ ).

b) Realizar una gráfica aproximada de la longitud que se pide.

c) Hallar el **área** encerrada entre la función  $\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$  y el eje  $x$  entre 0 y  $\pi$ .

**Solución:**

a) Se calcula  $t$  para el primer punto (1, 0) para ello se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=1 = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y=0 = \operatorname{sen} t - t \operatorname{cost} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^2 = (\cos t + t \operatorname{sen} t)^2 \\ 0^2 = (\operatorname{sen} t - t \operatorname{cost})^2 \end{cases}$$

$$1 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 (\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cost}^2) = 1 + t^2 \Rightarrow \boxed{t=0}$$

Se calcula  $t$  para el segundo punto (-1,  $\pi$ )

$$\begin{cases} x=-1 = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y=\pi = \operatorname{sen} t - t \operatorname{cost} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 = (\cos t + t \operatorname{sen} t)^2 \\ \pi^2 = (\operatorname{sen} t - t \operatorname{cost})^2 \end{cases}$$

$$1 + \pi^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 (\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cost}^2) = 1 + t^2 \Rightarrow \boxed{t=\pi}$$

Cálculo de la longitud de la curva desde  $t=0$  a  $t=\pi$

$$\begin{cases} x = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} t - t \operatorname{cost} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t \operatorname{cost} = t \operatorname{cost} \\ y' = \operatorname{cost} - \operatorname{cost} + t \operatorname{sen} t = t \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x')^2 = (t \operatorname{cost})^2 \\ (y')^2 = (t \operatorname{sen} t)^2 \end{cases}$$

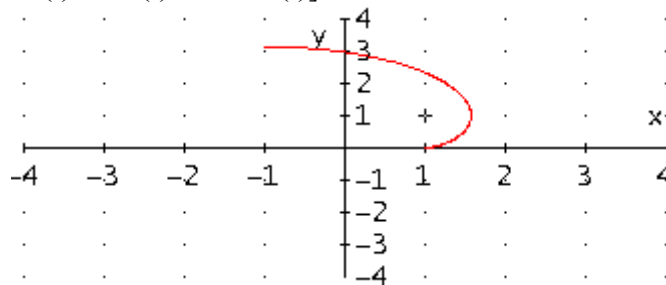
$$(x')^2 + (y')^2 = t^2 \operatorname{cost}^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t = t^2$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^\pi \sqrt{t^2} dt = \int_0^\pi t dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \mathbf{u}$$

b) Representación gráfica de la curva desde  $t=0$  a  $t=\pi$

DERIVE

#1: [COS(t) + t·SIN(t), SIN(t) - t·COS(t)]





## Integrales

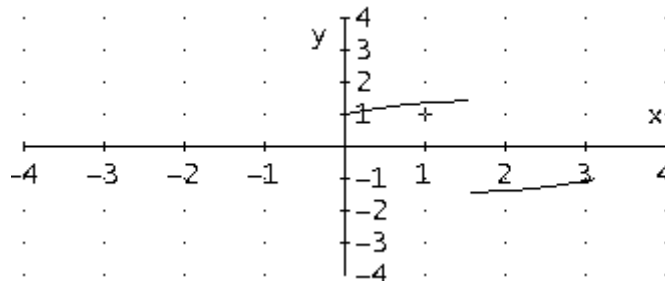


c) Hallar el área encerrada entre la función  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}$  y el eje x entre 0 y  $\pi$ .

Representación gráfica:

DERIVE

$$\#2: \text{IF} \left( 0 < x < \pi, \frac{\text{COS}(x)}{\sqrt{(1 - \text{SIN}(x))}} \right)$$



La función  $f(x)$  no es continua en  $x = \pi/2$ , ya que el denominador se hace cero en  $\pi/2$ .

$$\sqrt{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$$

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left| \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \right| dx =$$

$$\left[ -2\sqrt{1 - \sin x} \right]_0^{\pi/2} + \left[ -2\sqrt{1 - \sin x} \right]_{\pi/2}^{\pi} = 2 + 2 = 4 \text{ u}^2$$

## Integrales

48.- Dada la curva  $r^2 = 4 \cos(2\alpha)$ . Calcular:

a) **Dominio** de  $r$

b) El **área** limitada por la curva dada (Explicar los límites de integración)

**Solución:**

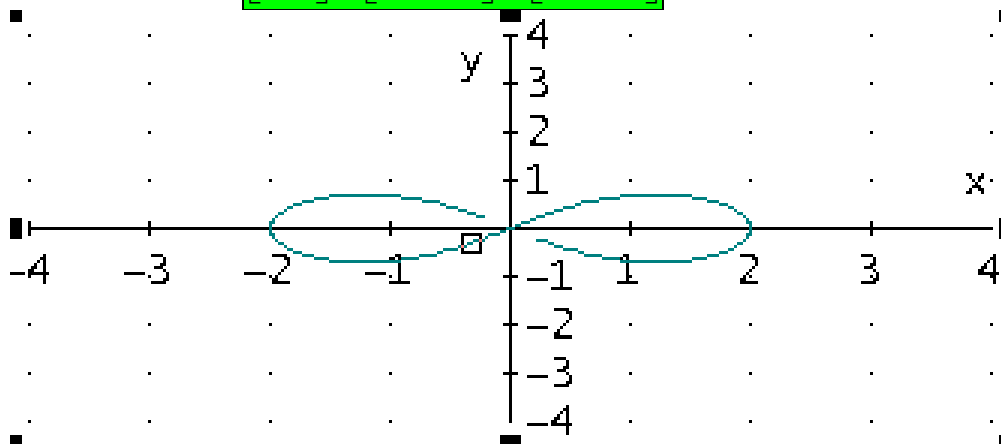
a) Dominio

Resolvemos la inecuación  $4\cos(2\alpha) \geq 0$

$$\cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha = \arccos 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi/2 + \pi k \Rightarrow \alpha = \pi/4 + \pi/2 k$$

$$r \text{ es positivo en } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

$$\text{Dominio de } r = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$



b) Cálculo del área:

1ª forma: Integrando cada parte del Dominio:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4\cos(2\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} 4\cos(2\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{7\pi/4}^{2\pi} 4\cos(2\alpha) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} [2\sin(2\alpha)]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} [2\sin(2\alpha)]_{3\pi/4}^{5\pi/4} + \frac{1}{2} [2\sin(2\alpha)]_{7\pi/4}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = \mathbf{4 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

2ª forma: El área pedida consta de 4 partes iguales, es decir

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4\cos(2\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} [2\sin(2\alpha)]_0^{\pi/4} = 1$$

$$\text{Área total} = 4 * 1 = \mathbf{4 \text{ u}^2}$$

49.- Se consideran las curvas cuyas ecuaciones en coordenadas polares son  $r = \sqrt{\alpha}$  y  $r = \sqrt{2(\alpha - 1)}$ . Calcular:

- a) El **área** encerrada entre ambas curvas entre sus puntos de intersección: el origen de coordenadas y el punto de intersección en el segundo cuadrante  
 b) **Perímetro** del recinto anterior

### Solución

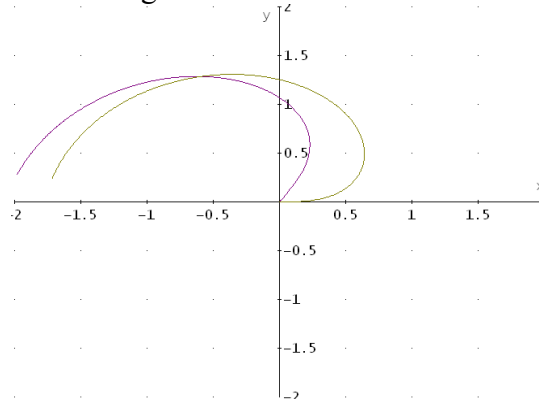
Denominemos a las curvas  $r_1 = \sqrt{\alpha}$  y  $r_2 = \sqrt{2(\alpha - 1)}$

Dominio de  $r_1$ :  $\alpha > 0$

Dominio de  $r_2$ :  $(\alpha - 1) > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

La intersección de ambas curvas se obtiene haciendo  $r_1 = r_2$  de donde se obtiene el ángulo  $\alpha = 2$ .

La representación gráfica de ambas curvas es la siguiente:



Para calcular el área encerrada entre la primera curva y el origen polar, entre los valores

de  $\alpha=0$  y  $\alpha = 2$ : 
$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2} r_1^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2} \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \alpha^2 \right]_0^2 = 1$$

El área encerrada entre la segunda curva y el origen polar entre esos mismos valores

angulares: 
$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2} r_2^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2} 2(\alpha - 1) d\alpha = \frac{1}{2} [\alpha^2 - \alpha]_0^2 = \frac{1}{2}$$

El área encerrada entre ambas será, por tanto,  $A = A_1 - A_2 = \frac{1}{2} u^2$

b) El perímetro viene dado por  $L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\alpha$

En nuestro caso el perímetro será la suma de las longitudes de las dos curvas que encierran el área y se calculan

$$L_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r_1^2 + r_1'^2} d\alpha = \int_0^2 \sqrt{\alpha + \frac{1}{4\alpha}} d\alpha \approx 2.583 u$$

$$L_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r_2^2 + r_2'^2} d\alpha = \int_0^2 \sqrt{\alpha - 1 + \frac{1}{4(\alpha - 1)}} d\alpha \approx 1.293 u$$

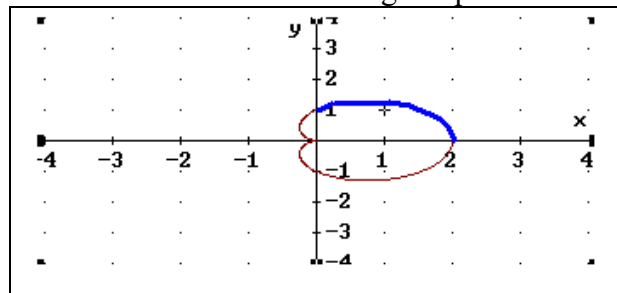
(Esta integral no puede calcularse, pero si se puede obtener un valor aproximado, por ejemplo, con Derive). Así que el perímetro vale  $P = L_1 + L_2 \approx 3.877u$

50. -Hallar la **longitud** del arco de la curva  $r = 1 + \cos\theta$  (**cardioide**) que está situado en el primer cuadrante, respondiendo a los siguientes apartados:

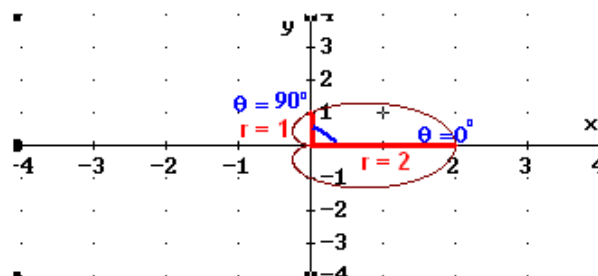
- Dibujar la gráfica de la curva dada y sobre la gráfica resaltar la **longitud**  $L$  del arco de la curva que está situado en el primer cuadrante.
- Indicar y explicar los **límites** de integración.
- Escribir la fórmula teórica para calcular la **longitud** de una curva en forma polar.
- Solución del problema.**

**Solución:**

a) Dibujar la gráfica de la curva resaltando la longitud pedida



b) Indicar y explicar los límites de integración.



Primer cuadrante: si  $\theta = 0^\circ \Rightarrow r = 1 + \cos 0^\circ = 1 + 1 = 2$

si  $\theta = 90^\circ \Rightarrow r = 1 + \cos 90^\circ = 1 + 0 = 1$

Para calcular la longitud del arco de la curva  $r = 1 + \cos \theta$  situado en el primer cuadrante, el ángulo  $\theta$  va desde  **$0^\circ$  a  $90^\circ$** .

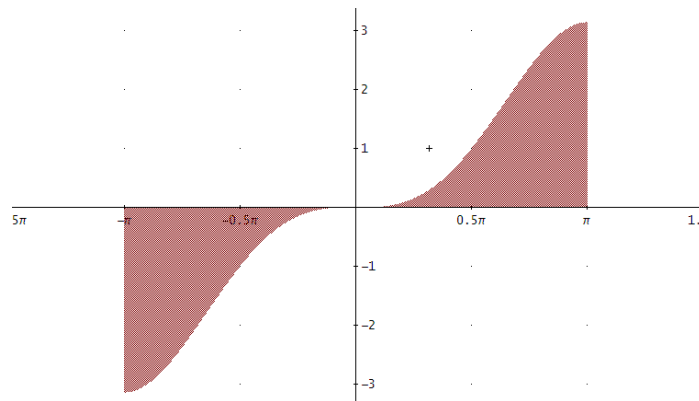
c) Fórmula teórica:  $L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$

d)  $L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = \mathbf{2 \cdot \sqrt{2}}$

51.- Sea la función  $f(x) = \text{sen}x - x\text{cos}x$ . Calcular aproximadamente el valor de:

- El **área** encerrada por  $f(x)$  y las rectas  $x = -\pi$ ,  $x = \pi$  y el eje  $OX$ .
- La **longitud** del arco de curva de la función  $y = f(x)$  entre los puntos  $(-\pi, -\pi)$  y  $(\pi, \pi)$ .
- La **superficie** de revolución generada por el arco de curva anterior al girar alrededor del eje de abscisas.

*Solución:*



$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \int_a^b |f(x)| \, dx = 2 \int_0^{\pi} (\text{sen}x - x\text{cos}x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} \text{sen}x \, dx - 2 \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\text{cos}x}_{dv} \, dx = \\ &= 2[-\text{cos}x]_0^{\pi} - 2 \left( \left[ \underbrace{x}_{u} \underbrace{\text{sen}x}_{v} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{\text{sen}x}_{v} \underbrace{dx}_{du} \right) = 4 - 2[\text{cos}x]_0^{\pi} = 4 + 4 = \mathbf{8u^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

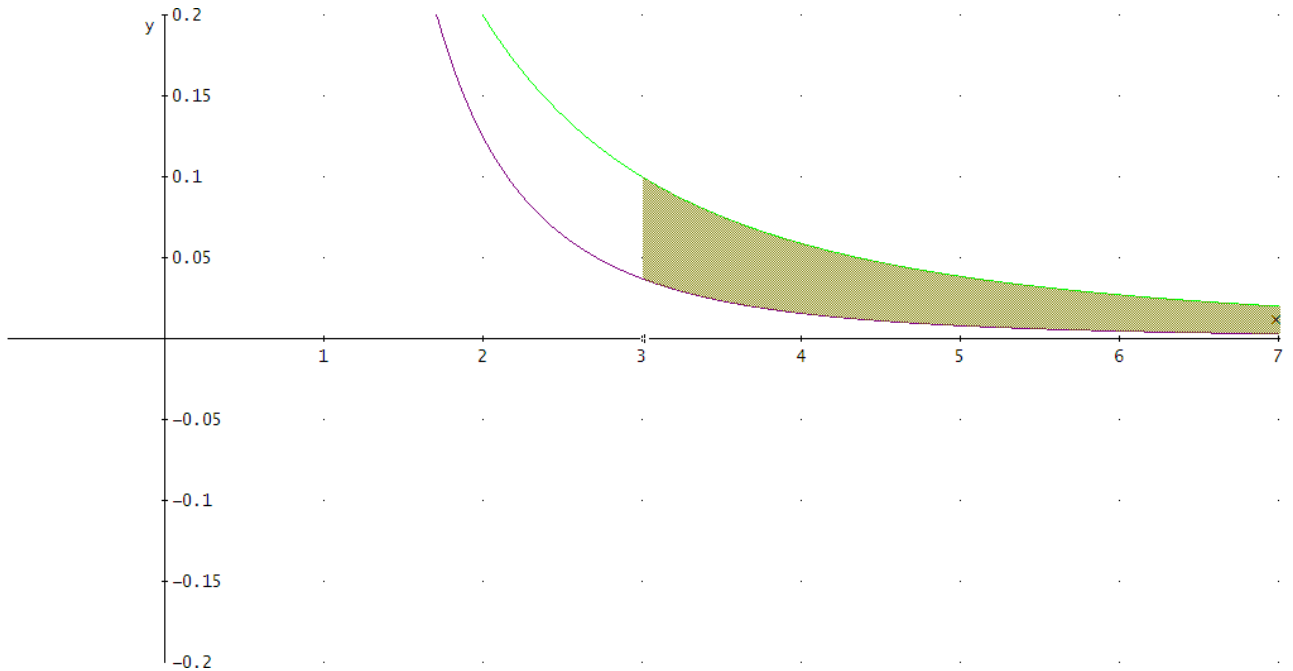
$$f(x) = \text{sen}x - x \text{cos}x \Rightarrow f'(x) = \text{cos}x - \text{cos}x + x \text{sen}x = x \text{sen}x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (x \text{sen}x)^2} \, dx \approx \mathbf{9.396791035 u}$$

$$\text{c) } S_L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} (\text{sen}x - x \text{cos}x) \sqrt{1 + (x \text{sen}x)^2} \, dx \approx \mathbf{82.20904341u^2}$$

52.- Hallar el **área** encerrada entre las funciones  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  y  $g(x) = \frac{1}{x^3}$  para  $x \geq 3$

**Solución:**



El área encerrada viene dada por  $A = \int_3^{\infty} |f(x) - g(x)| dx = \int_3^{\infty} (f(x) - g(x)) dx$

Se trata, por tanto, de una integral impropia.

Puesto que se comprueba que la inecuación

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{x^3} \text{ es cierta para } x > 3 \text{ es decir,}$$

Resolviendo

$$A = \int_3^{\infty} \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \arctg(x) - \frac{-1}{2x^2} \right]_3^b = \left[ \frac{\pi}{2} + 0 - \arctg(3) - \frac{1}{18} \right] \approx$$

$$\boxed{0.266} \text{ u}^2$$

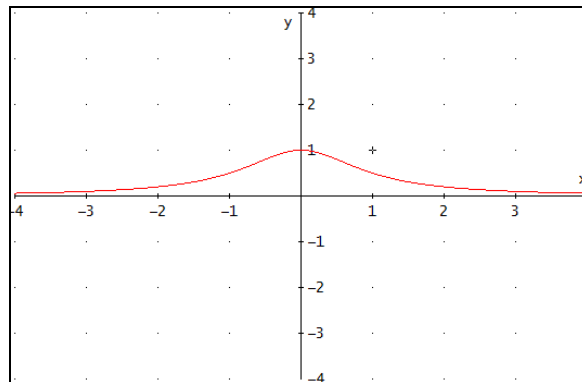
## Integrales

53.- Para la función  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  se pide:

- a) Representar la función
- b) Calcular el **área** encerrada entre la función y el eje de abscisas
- c) Calcular el **volumen** generado al girar el recinto limitado por  $f(x)$  y el eje de abscisas alrededor de dicho eje.

**Solución:**

a) Se realiza una representación gráfica aproximada con Derive



Datos analíticos:

1. Dominio de  $f(x) = \mathfrak{R}$
2. La función es simétrica respecto del eje OY pues  $f(-x)=f(x)$
3. Corte con los ejes coordenados. No corta porque la función siempre es positiva
4. Asíntotas:
  - a. Verticales no hay puesto que  $\text{Dom}(f)= \mathfrak{R}$
  - b. Horizontales
    - i.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$  asíntota horizontal eje OX
    - ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$  asíntota horizontal eje OX

Con lo cual ya se tienen todos los datos necesarios para plantear la integral. Se trata de una integral impropia pues el intervalo de integración es  $[-\infty, \infty]$

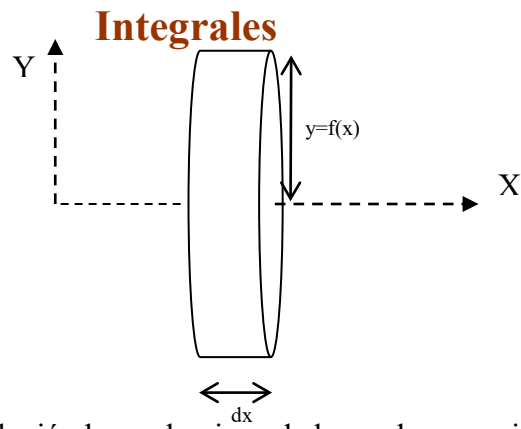
b) El área viene dada por (por ser una función simétrica respecto del eje OY)

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dA = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx \text{ se trata de una integral inmediata}$$

$$A = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg x]_0^b = 2 \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(b) - \arctg 0 \right] = 2 \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi} \mathbf{u^2}$$

c) La expresión general del volumen generado por una función cuando gira alrededor del eje de abscisas es:

El volumen del elemento diferencial (cilindro recto de radio  $f(x)$  y altura  $dx$ ) viene dado por la expresión  $dV = \pi f^2(x) dx$



Por tanto, el volumen de revolución buscado viene dado por la expresión (aplicando la propiedad de simetría de la función)

$$V = 2 \int_0^{\infty} dV = 2 \int_0^{\infty} \pi \left( \frac{1}{(1+x^2)} \right)^2 dx = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{\operatorname{arctg}(x)}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)} \right]_0^b = 2\pi \left[ \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0+0) \right] =$$
$$= \frac{\pi^2}{2} u^3$$

54.- Para la curva dada en forma paramétrica  $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \end{cases}$  se pide, para el intervalo  $1 \leq t \leq 10$ :

- Representar la gráfica
- Longitud* del arco
- Superficie* encerrada entre la curva y el eje de abscisas
- Volumen* de revolución engendrado al girar el área comprendida entre la curva
- Superficie* engendrada al girar alrededor del eje OX el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas

**Solución:**

a) Se representa la curva

Campo de variación de t, cualquier valor de t del intervalo dado

No tiene sentido estudiar las simetrías pues en el intervalo dado, t es siempre  $t > 0$

Puntos críticos

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t} \\ y'(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t} \neq 0 \text{ en el intervalo dado} \\ y'(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \end{cases} \quad \text{ambas derivadas existen en el}$$

intervalo de estudio

Punto crítico  $t=1$   $\begin{cases} x(1) = \ln(1) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$  punto de tangencia horizontal

En el intervalo dado, la curva tiene una única rama que va de  $P(0,1)$  a  $Q\left(\ln 10, \frac{101}{20}\right)$

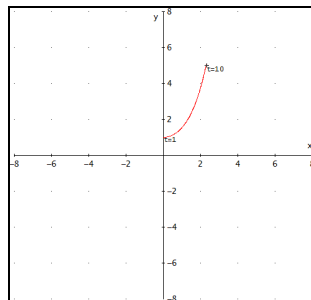
$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right)}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad \text{que es positiva en todo el intervalo y por tanto, la}$$

función es creciente.

$$f''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2} = \frac{t^2 + 1}{2t^2} \quad \text{que es positiva en todo el intervalo, por lo tanto,}$$

la función es cóncava.

Dibujo de la gráfica de la función en el intervalo dado:



## Integrales

b) La longitud del arco de curva viene dado por la expresión

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \Rightarrow dl = \sqrt{\left[\frac{1}{t}\right]^2 + \left[\frac{t^2-1}{2t^2}\right]^2} dt = \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{2t^2}} dt = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

Por tanto,  $L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$

Como  $\int \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \frac{t}{2} - \frac{2}{t} + C$

La longitud buscada es  $L = \left[\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right]_1^{10} = \frac{99}{20} = \boxed{4,95} \text{ u}$

c) La superficie encerrada entre la curva y el eje de abscisas viene dada por

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt = \int_1^{10} y(t)x'(t)dt \Rightarrow dA = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} dt$$

$$\int \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} + C \dots \text{obsérvese que es la misma integral anterior}$$

$$A = \int_1^{10} \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2t}\right]_1^{10} \Rightarrow A = \left[\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right]_1^{10} = \frac{99}{20} = \boxed{4,95} \text{ u}^2$$

d) El volumen de revolución viene dado por

$$dV = \pi [y'(t)]^2 x'(t) dt \Rightarrow dV = \pi \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt$$

Como  $\int \pi \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \pi \left[\frac{\ln t}{2} - \frac{t^4 - 1}{8t^2}\right] + C$

$$V = \int_1^{10} \pi \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^3} dt = \pi \left[\frac{\ln t}{2} - \frac{t^4 - 1}{8t^2}\right]_1^{10} = \pi \left[\frac{\ln 10}{2} + \frac{9999}{800}\right] \approx \boxed{42,88} \text{ u}^3$$

e) La superficie lateral de revolución viene dada por

$$dS = 2\pi y(t)dl = 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

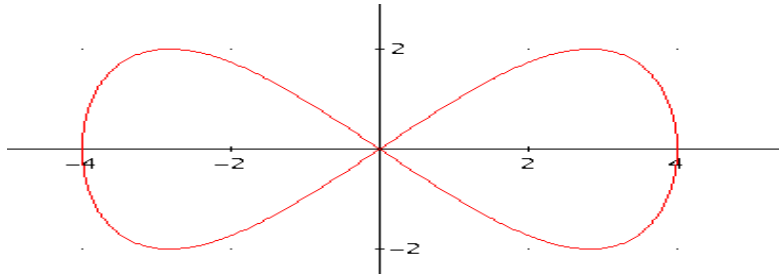
$$dS = 2\pi y(t)dl = 2\pi \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \pi \frac{(t^2 + 1)^2}{2t^3} dt$$

Como  $\int \frac{(t^2 + 1)^2}{2t^3} dt = \ln t + \frac{t^4 - 1}{4t^2} + C$

$$S = \pi \int_1^{10} \frac{(t^2 + 1)^2}{2t^3} dt = \pi \left[\ln t + \frac{t^4 - 1}{4t^2}\right]_1^{10} = \pi \left(\ln 10 + \frac{9999}{400}\right) \approx \boxed{85,77} \text{ u}^2$$

55.- Hallar la *superficie de revolución* generado por la *lemniscata* de ecuación  $\left. \begin{array}{l} x(t) = 4 \cos(t) \\ y(t) = 4 \operatorname{sen}(t)\cos(t) \end{array} \right\}$  al girar alrededor del eje de abscisas.

*Solución*



Hallamos los valores de  $t$  para los que  $y=0$

$$0 = y(t) = 4 \operatorname{sen}(t)\cos(t) \Rightarrow t = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ \pm \pi \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Luego  $(0, \pi/2)$  son los puntos de intersección del primer lazo con OX

Para obtener la superficie, tenemos:  $S_L = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 4 \cos(t) \\ y(t) = 4 \operatorname{sen}(t)\cos(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x'(t) = -4 \operatorname{sen}(t) \\ y'(t) = 4 \cos^2(t) - 4 \operatorname{sen}^2(t) \end{array} \right\}$$

$$S_L = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} 4 \operatorname{sen}(t)\cos(t) \sqrt{(-4 \operatorname{sen}(t))^2 + (4 \cos^2(t) - 4 \operatorname{sen}^2(t))^2} dt \approx \mathbf{89.29614921 \text{ u}^2}$$





## Integrales

56.- Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  siendo  $p$  un número real tal que  $p > 1$  se pide

- Calcular paso a paso la **integral**  $\int_a^\infty f(x)dx$  siendo  $a > 1$  un número real
- Indicar de qué tipo de integral **impropia** se trata.

*Solución:*

$$\text{a. } \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^d f(x)dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^d = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[ \frac{d^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right] = 0 - \frac{a^{1-p}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

- Se trata de una **integral impropia de primera especie**



57.- Dadas las siguientes curvas por sus ecuaciones **polares**:  $r_1(\alpha) = 2 \operatorname{sen}(2\alpha)$ ;  $r_2(\alpha)=1$ , se pide:

- Calcular el **dominio** de las funciones  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 \geq 0$  ;  $r_2 \geq 0$ )
- Estudiar las **simetrías** de  $r_1$  y  $r_2$ .
- Obtener las intersecciones de  $r_1$  y  $r_2$ .
- Hacer un gráfico esquemático de ambas curvas.
- Calcular el valor del **área** encerrada entre  $r_1$  y  $r_2$ .

**Solución:**

a.

$$r_1(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha \in [0, \pi] \\ 2\alpha \in [2\pi, 3\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$r_2(\alpha) \geq 0 \forall \alpha \in [0, 2\pi]$$

b.

$$r_1(-\alpha) = 2\operatorname{sen}(-2\alpha) = -r_1(\alpha) \text{ no hay simetría respecto del eje } x$$

$$r_1(\pi - \alpha) = 2\operatorname{sen}(2(\pi - \alpha)) = -r_1(\alpha) \text{ no hay simetría respecto del eje } y$$

$$r_1(\alpha + \pi) = 2\operatorname{sen}(2(\alpha + \pi)) = r_1(\alpha)$$

**SIMÉTRICA RESPECTO DEL ORIGEN**

$r_2(\alpha)$  es una circunferencia por lo que presenta todas las **simetrías**

c.

Las intersecciones (del primer cuadrante) se obtienen de resolver la ecuación

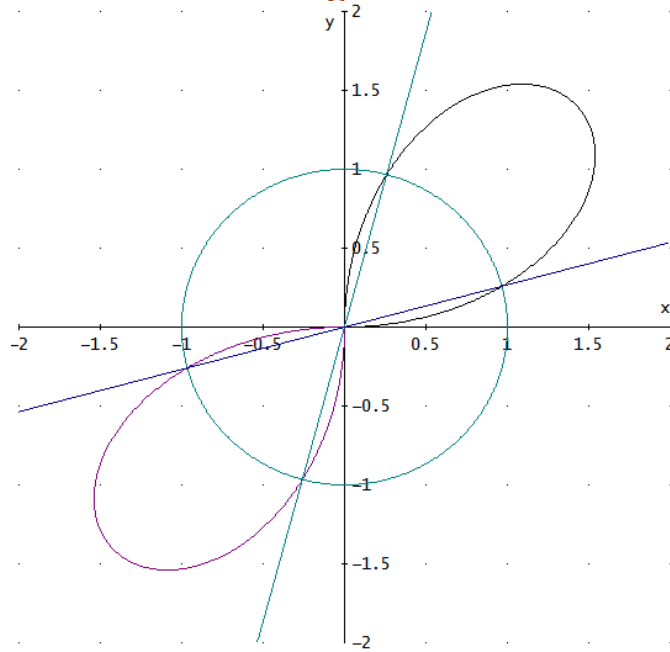
$$2\operatorname{sen}(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{6} \\ 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Como ambas funciones son simétricas respecto del origen, las otras dos intersecciones vendrán dadas por:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi \end{cases}$$

Obviamente, en los cuatro puntos,  $r=1$

## Integrales



Dado que ambas curvas son simétricas respecto del origen de coordenadas, el área total se puede calcular como el doble de la encerrada en el primer cuadrante. Por tanto

$$A_T = A_1 + A_3 = 2A_1 = 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{12}} r_1^2(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} r_2^2(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} r_1^2(\alpha) d\alpha \right]$$

$$A_T = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_T = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \approx \boxed{1.228} u^2$$



## Integrales

58.- Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  siendo  $p$  un número real tal que  $p < 1$  se pide:

- Calcular paso a paso la **integral**  $\int_0^a f(x)dx$  siendo  $a > 1$  un número real.
- Indicar de qué tipo de integral **impropia** se trata.

**Solución:**

$$\text{a. } \int_0^a f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \int_d^a f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_d^a = \lim_{d \rightarrow 0} \left[ \frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{d^{1-p}}{1-p} \right] = \frac{a^{1-p}}{1-p} - 0 = \frac{a^{1-p}}{1-p}$$

**b.** Distinguiremos dos casos:

Si  $p \leq 0$  es una integral definida

Si  $0 < p < 1$  se trata de una **integral impropia de segunda especie.**

59. - Dadas las siguientes curvas por sus ecuaciones **polares**:  $r_1(\alpha) = 2 \cos(2\alpha)$ ;  $r_2(\alpha)=1$ , se pide:

- a) Calcular el **dominio** de las funciones  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 > 0$  ;  $r_2 > 0$ )
- b) Estudiar las **simetrías** de  $r_1$  y  $r_2$
- c) Obtener las intersecciones de  $r_1$  y  $r_2$
- d) Hacer un gráfico esquemático de ambas curvas
- e) Calcular el valor del **área** encerrada entre  $r_1$  y  $r_2$

**Solución:**

a.

$$r_1(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 2\alpha \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\ 2\alpha \in \left[\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right] \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

$$r_2(\alpha) \geq 0 \forall \alpha \in [0, 2\pi]$$

b.

$$r_1(-\alpha) = 2 \cos(-2\alpha) = r_1(\alpha) \quad \text{SIMÉTRICA RESPECTO DEL EJE X}$$

$$r_1(\pi - \alpha) = 2 \cos(2(\pi - \alpha)) = r_1(\alpha) \quad \text{SIMÉTRICA RESPECTO DEL EJE Y}$$

$$r_1(\alpha + \pi) = 2 \cos(2(\alpha + \pi)) = r_1(\alpha) \quad \text{Es simétrica respecto del origen}$$

$r_2(\alpha)$  es una circunferencia por lo que presenta todas las **simetrías**

c.

Las intersecciones se obtienen de resolver la ecuación

$$2 \cos(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{6}$$

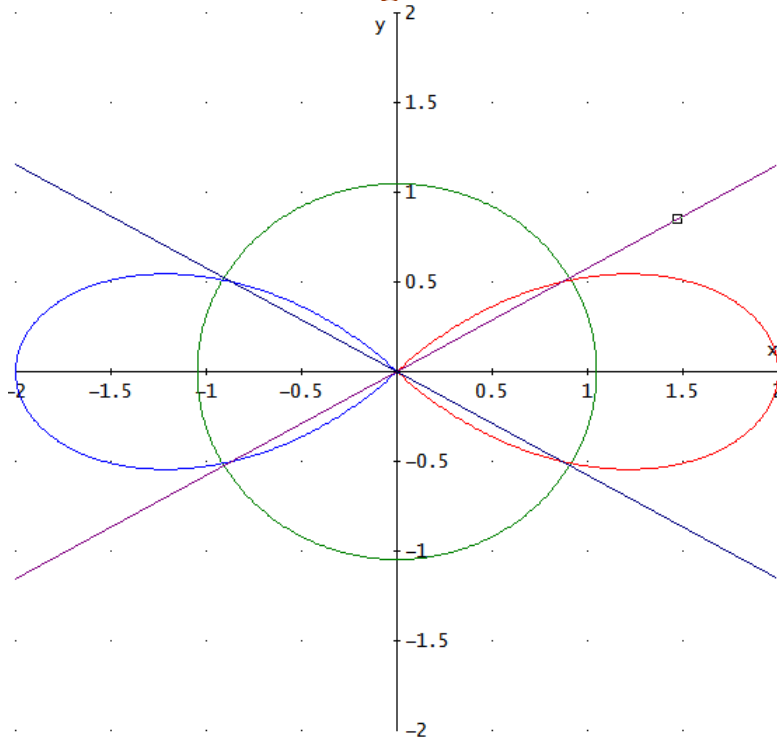
Como ambas funciones son simétricas respecto de los ejes X e Y, se pueden obtener sólo las intersecciones del primer cuadrante y luego calcular el resto por la simetría

$$\text{Por la simetría respecto del eje x } \alpha_4 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Por la simetría respecto del eje Y } \alpha_2 = \pi - \alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{5\pi}{6} \text{ y } \alpha_3 = \pi + \alpha_1 = \frac{7\pi}{6}$$

Obviamente, para todos los puntos,  $r=1$

## Integrales



Como ambas curvas son simétricas simultáneamente respecto de los eje X e Y para calcular el área total encerrada se puede calcular el área encerrada en el primer cuadrante y multiplicarla por 4.

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4A_1 = 4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r_2^2(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} r_1^2(\alpha) d\alpha \right] = 4 \left[ \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

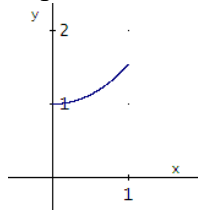
$$A_T = \frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.228 \text{ u}^2$$

60.- Para la curva dada en forma paramétrica  $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \end{cases}$  se pide, para el intervalo  $0 \leq x \leq 1$ :

a) **Longitud** de la curva en el intervalo  $x \in [0, 1]$  del eje de abscisas.  
b) **Área** encerrada entre la curva y el eje de abscisas en dicho intervalo.

**Solución:**

a) Se representa la curva



Hay que ver a qué valores de  $t$  corresponde el intervalo dado sobre el eje OX.

Despejando  $t = e^x$  por lo que el intervalo será

$$t \in [e^0, e^1] \Leftrightarrow t \in [1, e]$$

Campo de variación de  $t$ , cualquier valor de  $t$  del intervalo dado

No tiene sentido estudiar las simetrías pues en el intervalo dado,  $t$  es siempre  $t > 0$

Puntos críticos

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t} \\ y'(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t} = 0 \text{ Nunca en el intervalo dado} \\ y'(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \end{cases} \quad \text{ambas derivadas existen}$$

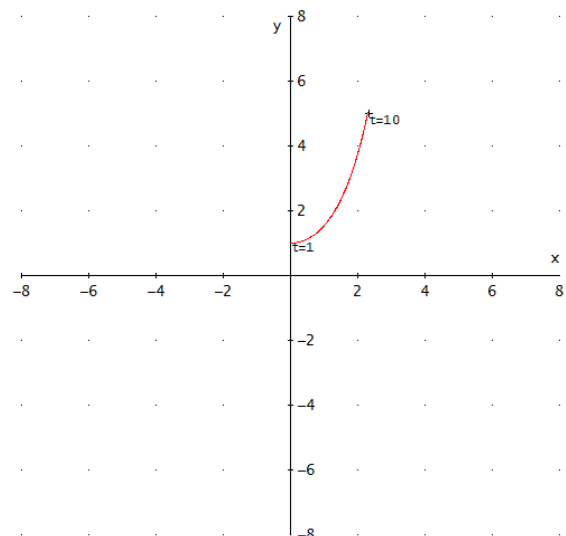
en el intervalo de estudio

Punto crítico  $t=1 \begin{cases} x(1) = \ln(1) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$  punto de tangencia horizontal

En el intervalo dado, la curva tiene una única rama que va de  $P(0,1)$  a

$$Q = \left[ 1, \frac{1}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right) \right] \approx [1, 1.54]$$

Dibujo de la gráfica de la función en el intervalo dado:



Como la función es continua en el intervalo se puede aplicar la regla de Barrow



## Integrales

- a) La longitud del arco de curva viene dado por la expresión

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \Rightarrow dl = \sqrt{\left[\frac{1}{t}\right]^2 + \left[\frac{t^2 - 1}{2t^2}\right]^2} dt = \sqrt{\frac{t^4 + 2t^2 + 1}{2t^2}} dt = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

Por tanto,  $L = \int_1^e \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$

Como  $\int \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \frac{t}{2} - \frac{2}{t} + C$

La longitud buscada es  $L = \left[ \frac{t}{2} - \frac{2}{t} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2e} \approx 1.17 \text{ u}$

- b) La superficie encerrada entre la curva y el eje de abscisas viene dada por

$$dA = y(t)x'(t)dt \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} dt$$

$$\int \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} + C \quad \dots \text{ obsérvese que es la misma integral anterior}$$

$$\Rightarrow A = \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2e} \approx 1.17 \text{ u}^2$$

61.- Dada la función  $f(x)=x^2$  obtener los siguientes volúmenes de revolución

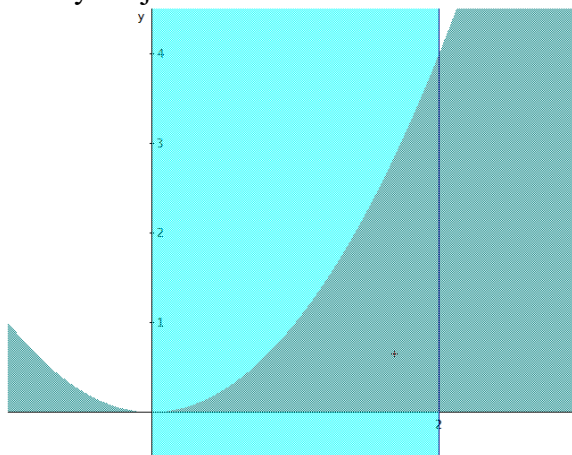
a) **Volumen** engendrado al girar el área encerrada por la curva y el eje OX, entre  $x=0$  y  $x=2$ , alrededor del eje OX.

b) **Volumen** engendrado al girar el área encerrada por la curva y el eje OX, entre  $x=0$  y  $x=2$ , alrededor del eje OY.

Solución:

a. El volumen viene dado por  $V = \int_0^2 \pi(x^2)^2 dx = \left[ \pi \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5} = \boxed{20.11} u^3$

b. El volumen viene dado por el volumen del cilindro exterior menos el volumen que genera el área encerrada entre la curva y el eje OY



El volumen del cilindro exterior es  $V_{\text{cilindro}} = 2^2 \cdot 4\pi = 16\pi u^3$

El volumen del área encerrada viene dado por  $V_{\text{parábola}} = \int_0^4 \pi x^2(y) dy = \int_0^4 \pi y dy = \left[ \pi \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \boxed{8\pi} u^3$

Por tanto,  $V = 16\pi - 8\pi = \boxed{8\pi} u^3$

62.- Determinar las **áreas** siguientes:

a) Encerrada por la función  $f(x)$  y el eje OX siendo

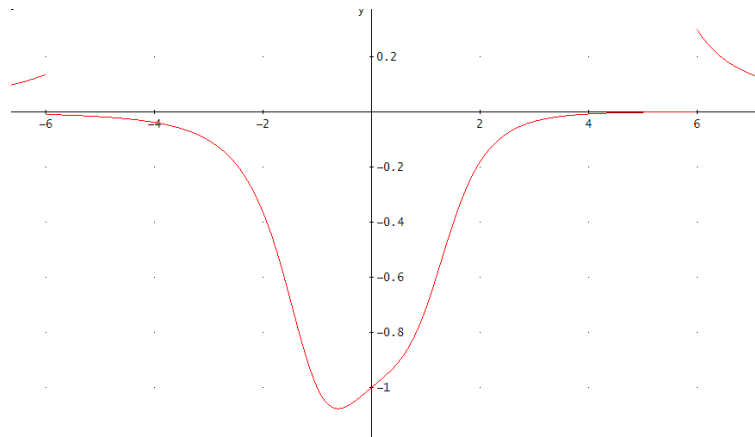
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{x^4+6} & \text{si } -6 < x < 6 \\ \frac{3}{x^2-x-20} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Encerrada por la curva  $r(\theta) = |a \operatorname{sen}(2\theta)|$  con  $a > 0$

c) De la **superficie** engendrada al girar alrededor del eje OX, el lazo de la curva  $9y^2 = x(3-x)^2$

**Solución:**

a)  $A = \int_a^b |f(x)| dx$



$$A = \int_{-\infty}^{-6} \left| \frac{3}{x^2-x-20} \right| dx + \int_{-6}^6 \left| \frac{x-6}{x^4+6} \right| dx + \int_6^{\infty} \left| \frac{3}{x^2-x-20} \right| dx =$$

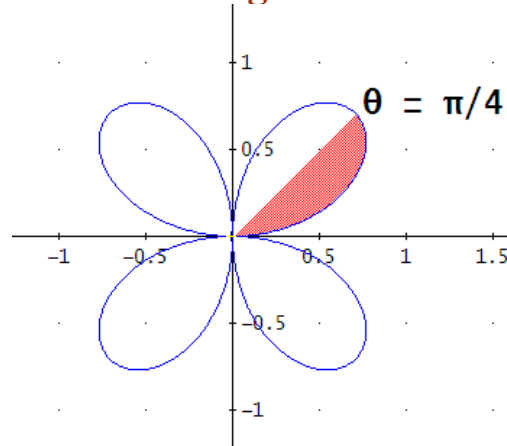
$$= \frac{24^{1/4} \cdot \operatorname{ATAN} \left( \frac{6 \cdot \sqrt{6} + 431}{430 \cdot (2 \cdot 54^{1/4} - 1)} + \frac{6 \cdot \sqrt{6} + 431}{430 \cdot (2 \cdot 54^{1/4} + 1)} \right)}{4} + \frac{\operatorname{LN}(55)}{3} + \frac{24^{1/4} \cdot \pi}{2} \approx 4.794039633 u^2$$

b)  $S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$

Obsérvese la simetría de la curva y que el máximo se obtiene para

$$r(\theta) = |a \operatorname{sen}(2\theta)| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

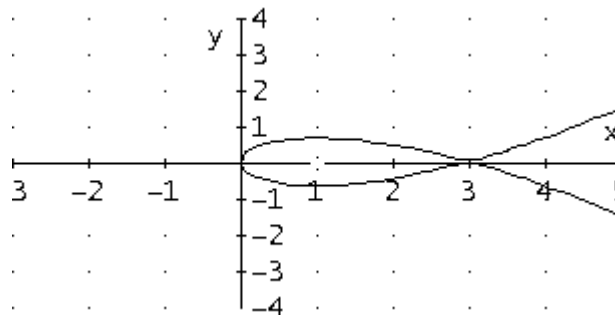
## Integrales



Se trata de una rosa de 4 hojas. El área encerrada se obtiene integrando y multiplicando por 8 el área encerrada por la curva entre los límites 0 y  $\pi/4$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = 8 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (a \operatorname{sen}(2\theta))^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(2\theta) d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta = \\
 &= 2a^2 \left[ \theta - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} a^2 u^2
 \end{aligned}$$

c)  $S_L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$



Para la parte superior de la curva para  $0 \leq x \leq 3$ , tenemos

$$9y^2 = x(3-x)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

sustituyendo en la fórmula

$$S_L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx \approx 3 \cdot \pi u^2$$

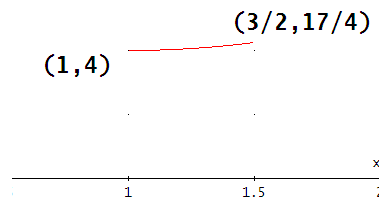
63.- Calcular:

a) La **longitud** del arco de la **parábola**  $y = x^2 - 2x + 5$  comprendido entre los puntos  $(1, 4)$  y  $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$ .

b) El área interior a la **circunferencia** de centro el origen y radio 1 (ecuación en **coordenadas polares**  $r = 1$ ) y exterior a la **curva**  $r = \cos^2 \alpha$ .

**Solución:**

a)

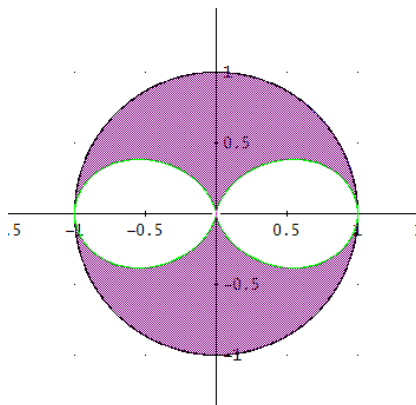


La integral  $L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$  proporciona la longitud entre  $x=a$  y  $x=b$

$$y = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow y' = 2x - 2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^{3/2} \sqrt{1+(2x-2)^2} dx = \int_1^{3/2} \sqrt{4x^2 - 8x + 5} dx = \frac{1}{4} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}) u$$

b)



Sean  $r = f(\alpha)$  y  $r = g(\alpha)$  dos curvas continuas en  $[\alpha_1, \alpha_2]$  y tal que  $0 < g(\alpha) < f(\alpha)$  en  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , entonces el área comprendida entre ambas curvas es:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (f^2(\alpha) - g^2(\alpha)) d\alpha$$

Buscamos los valores de  $\alpha$  que corresponden a la intersección de las curvas:

$$\left. \begin{matrix} r = \cos^2 \alpha \\ r = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{cases} \text{ y por otra parte } \left. \begin{matrix} r = \cos^2 \alpha \\ r = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} -\pi/2 \\ 0 \\ \pi/2 \end{cases}$$

Aplicando la fórmula anterior y multiplicando por 4 debido a la simetría:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (f^2(\alpha) - g^2(\alpha)) d\alpha = 4 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1^2 - (\cos^2 \alpha)^2) d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^4 \alpha) d\alpha = \frac{5\pi}{8} u^2$$

64.- Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 - 2}$ , cuya gráfica es la de la figura, se pide:

- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$ ,  $x = -2$  y el eje  $Y$ .
- Calcular el **área** encerrada por  $f(x)$ , y el eje  $X$  en  $[2, \infty)$ .
- Estudiar la **convergencia** de  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- Estudiar la **convergencia** de  $\int_0^\infty f(x) dx$ .

**Solución:**

Primeramente, calculamos una función primitiva de  $f(x)$  por el método de descomposición en fracciones simples, podemos escribir:

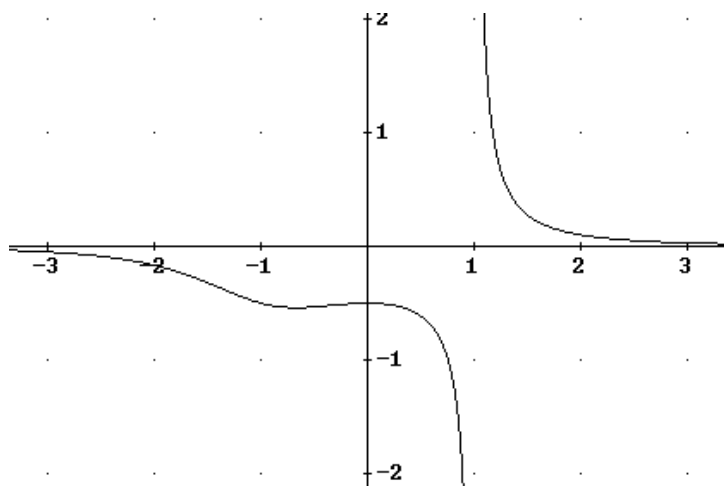
$$\frac{1}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{1}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 2} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}$$

Obteniendo

$$\left. \begin{array}{l} A + M = 0 \\ 2A - M + N = 0 \\ 2A - N = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ M = -\frac{1}{5} \\ N = \frac{3}{5} \end{cases}$$

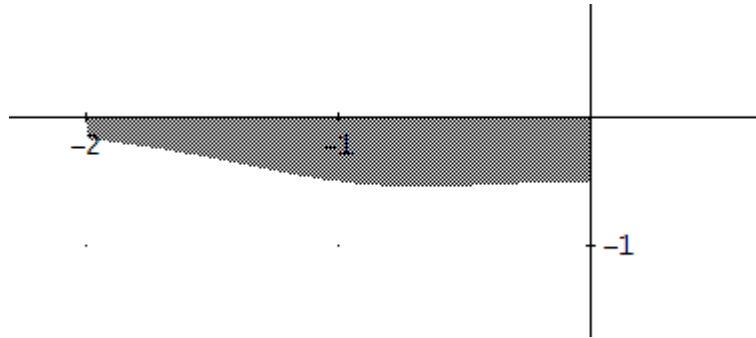
Sustituyendo los valores obtenidos podemos resolver

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \int \frac{1/5}{x-1} dx + \int \frac{-1/5x - 3/5}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{3}{5} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{5} \int \frac{x+1-1}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{3}{5} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{5} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{10} \ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(x+1) + C = \frac{1}{5} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(x+1) + C = \end{aligned}$$



a)

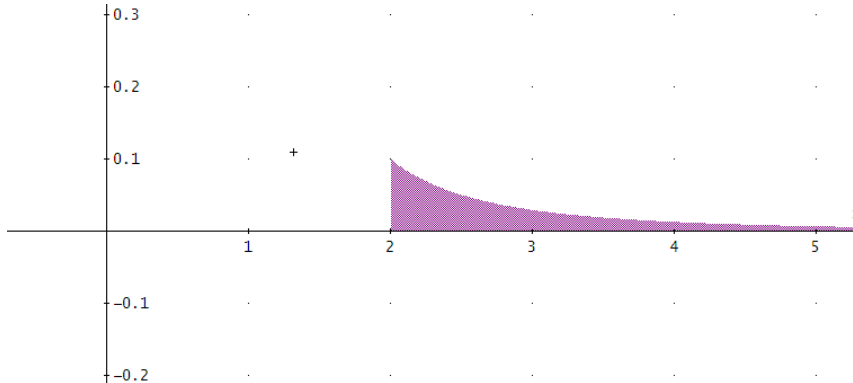
#1:  $-2 < x < 0 \wedge 0 > y > \frac{1}{x^3 + x^2 - 2}$



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{-2} \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \left[ \frac{1}{5} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(x+1) \right]_0^{-2} = \\ &= \left( \frac{1}{5} \ln \frac{|-2-1|}{\sqrt{(-2)^2 + 2(-2) + 2}} - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(-2+1) \right) - \left( -\frac{1}{10} \ln 2 - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(1) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \ln 3 - \frac{1}{10} \ln 2 + \frac{2}{5} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10} \ln 2 + \frac{2}{5} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{5} (\ln 3 + \pi) u^2 \end{aligned}$$

b)

#2:  $2 < x \wedge 0 < y < \frac{1}{x^3 + x^2 - 2}$

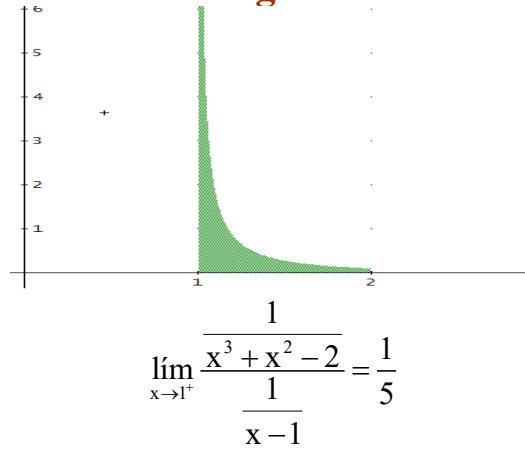


$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^{\infty} \left| \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} \right| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k \left| \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} \right| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{5} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(x+1) \right]_2^k = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{5} \ln \frac{|k-1|}{\sqrt{k^2 + 2k + 2}} - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(k+1) - \left( \frac{1}{5} \ln \frac{|2-1|}{\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 2}} - \frac{2}{5} \operatorname{artg}(2+1) \right) \right] = \\ &= -\frac{2}{5} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5} \operatorname{arctg} 3 + \frac{1}{10} \ln 10 = -\frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \right) \right) + \frac{1}{10} \ln 10 = \frac{1}{10} \ln 10 - \frac{2}{5} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \right) \right) u^2 \end{aligned}$$

c)

#3:  $1 < x < 2 \wedge 0 < y < \frac{1}{x^3 + x^2 - 2}$

## Integrales



La integral  $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \infty$  es divergente y por el criterio del cociente:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \infty$$

d)

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx + \int_2^\infty \frac{1}{x^3 + x^2 - 2} dx = \infty$$



## Integrales



65.- Calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

*Solución:*

Al ser  $e^{-x^2}$  una función par tenemos que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  con el cambio de variable  $x^2=z$  resulta  $2x dx=dz$  y con los límites de integración iguales ya que  $0^2=0$  y  $\infty^2=\infty$ . Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{1}{2x} dz = \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

66. - Considerando la circunferencia de radio R en *coordenadas polares*, hallar:

- El *área* del círculo.
- La *longitud* de la circunferencia.
- El *volumen* de la esfera.
- La *superficie* de la esfera.

**Solución:**

La expresión de la circunferencia de radio R en coordenadas polares es:  $r = R$ .

a) Área del círculo de radio R

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi R^2 d\alpha = \boxed{\pi R^2}$$

b) Longitud de la circunferencia de radio R

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = 2 \int_0^\pi \sqrt{R^2} d\alpha = \boxed{2\pi R}$$

c) Volumen de la esfera de radio R

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^3 \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi R^3 \sin \alpha d\alpha = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

d) Superficie de la esfera de radio R

$$S_L = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \sin \alpha \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = 2\pi \int_0^\pi R \sin \alpha \sqrt{R^2} d\alpha = 4\pi R^2 \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \boxed{4\pi R^2}$$

67.- La tasa de variación en la población de conejos es  $\frac{dP}{dt} = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16,1}$  (t

tiempo en años) Hallar:

a) Al cabo de cuánto tiempo es **máxima** dicha población.

b) Si la población inicial de conejos es de 50 unidades, hallar el número **máximo** de conejos.

c) ¿Se extinguirán los conejos?

**Solución:**

P(t) es el número de conejos después de t años.

a) Buscamos el máximo, es decir, un punto extremo de la función P(t). Para ello resolvemos la ecuación  $dP/dt=0$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16,1} = 0 \Rightarrow t = 4$$

Confirmamos con la derivada segunda que es un máximo

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dP}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16,1} \right) = \frac{-25(t^2 - 8t + 16,1) - (100 - 25t)(2t - 8)}{(t^2 - 8t + 16,1)^2} = \frac{25t^2 - 200t + 397,5}{(t^2 - 8t + 16,1)^2}$$

Para t=4

$$\frac{d^2P}{dt^2}(4) = \frac{25 \cdot 4^2 - 200 \cdot 4 + 397,5}{(4^2 - 8 \cdot 4 + 16,1)^2} = -250 < 0$$

**P es máxima al cabo de 4 años**

b)

P(0) = 50 es el número inicial de conejos.

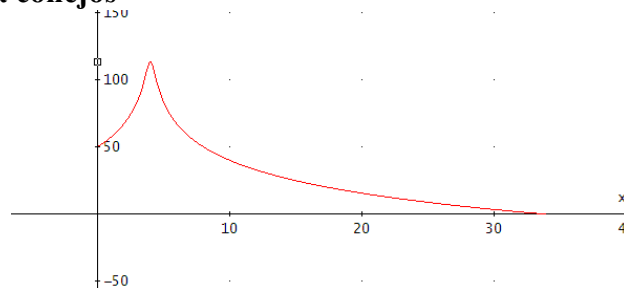
$$\int_0^4 \frac{dP}{dt} dt = P(4) - P(0) \Rightarrow P(4) = P(0) + \int_0^4 \frac{dP}{dt} dt = 50 + \int_0^4 \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16,1} dt = 50 + \frac{25 \ln(161)}{2} \approx 113.5175$$

**Al cabo de 4 años la población será de 113 conejos**

c) ¿Existe un valor de t=x para el cuál P(t)=0?

$$50 + \int_0^x \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16,1} dt = 50 - \frac{25 \ln \left( \frac{10x^2 - 80x + 161}{161} \right)}{2} = 0 \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} 33.64675725 > 0 \\ -25.64675725 \end{array} \right.$$

**En 33,65 años, no habrá conejos**





## Integrales



68.- a) Demostrar que si  $y = \arg \operatorname{th} x$ , entonces  $y' = \frac{1}{1-x^2}$

b) Calcular la **derivada** de la siguiente función:  $F(x) = \int_{\ln x}^{x^3} e^{t^2} dt$

c) Calcular el **volumen** engendrado al girar el **área** encerrada por la curva  $y = x^2$  el eje  $OX$ , entre  $x=0$  y  $x=2$ , alrededor del eje  $OX$ .

d) Calcular  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**Solución:**

a)

$$y' = (\arg \operatorname{th} x)' = \left( \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) \right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$$

Otra forma:

$$y = \operatorname{argth} x \Rightarrow x = \operatorname{thy} = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{chy}} \quad \Rightarrow \quad 1 = (1 - \operatorname{th}^2 y) \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

b)

Sea  $G(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$  siendo  $f$  una función continua en  $[a, x]$

Consideramos la función continua en  $\mathbb{R}$ :  $f(t) = e^{t^2}$  y  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = \ln x$  funciones derivables.

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } F(x) &= \int_{\ln x}^{x^3} e^{t^2} dt = \int_{\ln x}^a e^{t^2} dt + \int_a^{x^3} e^{t^2} dt = \int_a^{x^3} e^{t^2} dt - \int_a^{\ln x} e^{t^2} dt = \\ &= \int_a^{g(x)} f(t) dt - \int_a^{h(x)} f(t) dt = G(g(x)) - G(h(x)) \end{aligned}$$

Derivando:

$$F'(x) = G'(g(x))g'(x) - G'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) = f(x^3)3x^2 - f(\ln x) \frac{1}{x} =$$

$$= 3x^2 e^{(x^3)^2} - \frac{1}{x} e^{(\ln x)^2}$$

c)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{2^5}{5} \pi = \frac{32}{5} \pi$$

d)

Aplicando la propiedad  $\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt$

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{\frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{} t} \cos^{\frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{} t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$



## Integrales



69.- a) Demostrar que si  $y = \arg \operatorname{sh} x$ , entonces  $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) Calcular la *derivada* de la siguiente función:  $F(x) = \int_{e^2}^{x^3} \frac{\ln t}{t} dt$

c) Estudiar la *convergencia* y, en su caso, calcular el valor de la *integral* de  $f(x) = \operatorname{tg} x$  en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

d) Calcular  $\Gamma(4)$

**Solución:**

a)

$$y' = (\operatorname{argsh} x)' = \left( \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Otra forma:

$$y = \operatorname{argsh} x \Rightarrow x = \operatorname{sh} y \xrightarrow{\text{derivando respecto } x} 1 = \operatorname{ch} y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

b)

Sea  $G(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$  siendo  $f$  una función continua en  $[a, x]$

Consideramos la función continua en  $\mathbb{R}$ :  $f(t) = \ln t / t$  salvo en el cero que está acotada y  $g(x) = x^3$ , función derivable. Entonces:  $F(x) = \int_{e^2}^{x^3} \frac{\ln t}{t} dt = \int_a^{g(x)} f(t) dt = G(g(x))$

Derivando:

$$F'(x) = G'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = f(x^3)3x^2 = 3x^2 \frac{\ln(x^3)}{x^3} = 3 \frac{\ln(x^3)}{x}$$

c)

Impropia de 2º especie puesto que no está acotada en  $x = \frac{\pi}{2}$ .

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \operatorname{tg} x \cdot dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \cdot dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\ln(\operatorname{cos} x) \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\ln(\operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)) - (-\ln(\operatorname{cos} 0)) \right) = -(-\infty) = \infty. \quad \text{DIVERGENTE}$$

d)

Sabiendo que  $\Gamma(p) = (p-1)!$  para cualquier  $p$  natural

$$\Gamma(4) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{6}$$



## Integrales



70.- a) Demostrar la siguiente relación:  $\arg \operatorname{sh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

b) Calcular la *derivada* de la siguiente función:  $F(x) = \int_x^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt$

c) La curva  $y^2 = e^{-2x}$  gira alrededor de su *asíntota*. Hallar el *volumen* del cuerpo limitado por la *superficie* engendrada entre la curva, el eje de *abscisas* (OX) cuando  $x > 0$ .

d) Calcular  $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ , sabiendo que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**Solución:**

a)

Del seno hiperbólico  $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$  resolviendo la ecuación de segundo grado

$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} > 0$  y una única solución factible  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$  y según la

definición de logaritmos  $y = \arg \operatorname{sh}(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

b)

Sea  $G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$  siendo  $f$  una función continua en  $[a, x]$

Consideramos la función continua en  $\mathbb{R}$ :  $f(t) = \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}}$  salvo en el cero que está acotada y  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = x$  funciones derivables. Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt = \int_x^a \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt + \int_a^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt = \int_a^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt - \int_a^x \frac{\operatorname{sent} t}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \int_a^{g(x)} f(t)dt - \int_a^{h(x)} f(t)dt = G(g(x)) - G(h(x)) \end{aligned}$$

Derivando:

$$F'(x) = G'(g(x))g'(x) - G'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) = f(x^3)(3x^2) - f(x) =$$

$$= \frac{3x^2 \operatorname{sen}(x^3)}{\sqrt{x^3}} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$$

c)

Obviamente la asíntota horizontal es el eje de abscisas y la expresión del volumen:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi \int_0^k e^{-2x} dx = \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-2k} + \frac{1}{2} e^{-2 \cdot 0} \right) = \frac{\pi}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2e^{2k}} \right) = \frac{\pi}{2} u^3$$

d)

Sabiendo que  $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$  para cualquier  $p > 1$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}-1\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

71.- a) Demostrar la siguiente relación:  $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x)$

b) Calcular la derivada de la siguiente función:  $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt$

c) La integral  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ , ¿es impropia? Calcularla.

d) Calcular  $\beta(4,5)$

**Solución:**

a)

$$\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) = \operatorname{ch}(2x)$$

b)

Sea  $G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$  siendo  $f$  una función continua en  $[a,x]$

Consideramos la función continua en  $\mathbb{R}$ :  $f(t)=\operatorname{sent}/t$  salvo en el cero que está acotada y  $g(x)=x^3$ ,  $h(x)=x^2$  funciones derivables. Entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x^2}^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt = \int_{x^2}^a \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt + \int_a^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt = \int_a^{x^3} \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt - \int_a^{x^2} \frac{\operatorname{sent} t}{t} dt = \\ &= \int_a^{g(x)} f(t)dt - \int_a^{h(x)} f(t)dt = G(g(x)) - G(h(x)) \end{aligned}$$

Derivando:

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(g(x))g'(x) - G'(h(x))h'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) = f(x^3)3x^2 - f(x^2)2x = \\ &= 3x^2 \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3} - 2x \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = \boxed{-3 \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x} - 2 \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}} \end{aligned}$$

c)

Impropia de 2º especie puesto que no está acotada en  $x=2$ .

$$I = \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\sqrt{4-x^2} \right]_0^{2-\varepsilon} = 2 \in \mathbb{R}. \quad \boxed{\text{CONVERGENTE}}$$

d)

$$\text{Sabido que: } \beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ y resulta } \beta(4,5) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(4+5)} = \frac{3! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 5} = \boxed{\frac{1}{280}}$$

72.-Dada la función  $f(x) = e^{-x^2}$ . Se pide:

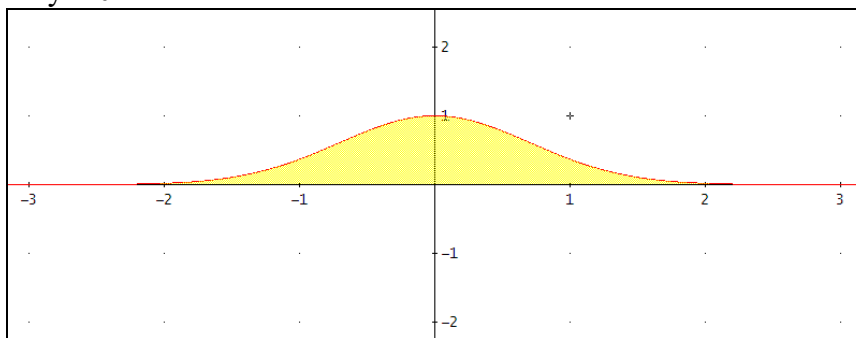
- a) Calcular el **área** encerrada por la función  $f(x)$  y su **asíntota**.
- b) Calcular el **volumen** generado por la función  $f(x)$  al girar alrededor de su **asíntota**.
- c) Hallar la **longitud** de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0,1]$ .
- d) La función  $f(x)$  gira alrededor de su **asíntota**. Calcular la **superficie** obtenida en el intervalo  $[-1,1]$ .

**Solución:**

a)

El eje de abscisas es la asíntota de la función, ya que:  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$

Asíntota horizontal  $y = 0$



$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ con el cambio de variable } x^2=z \text{ resulta}$$

$2x dx = dz$  y con los límites de integración iguales ya que  $0^2=0$  y  $\infty^2=\infty$ . Por tanto,

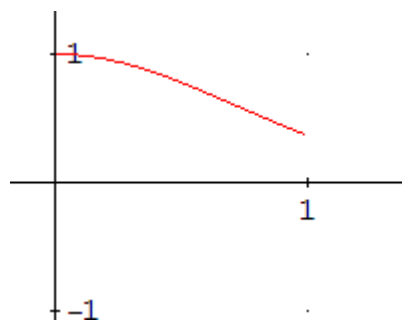
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \mathbf{u^2}$$

b)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2})^2 dx = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2x^2} dx = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{1}{4\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{z}} dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\pi} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi^{3/2} \mathbf{u^3}$$

c)  $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2}$



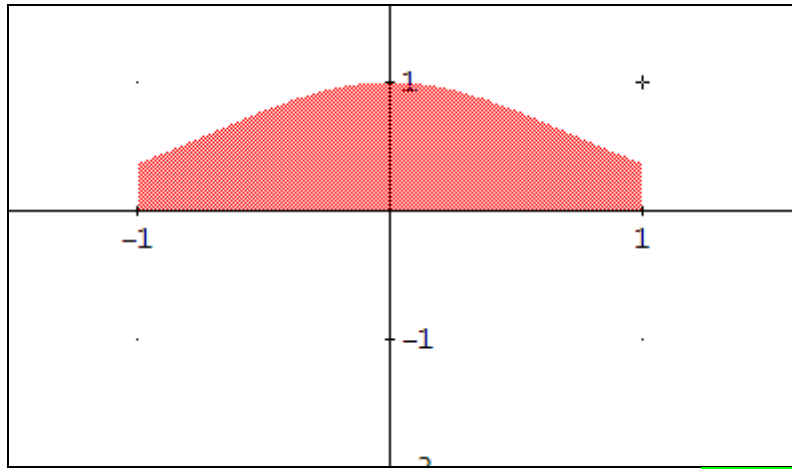


## Integrales



$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+(-2xe^{-x^2})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2e^{-2x^2}} dx \approx \mathbf{1.20444107u}$$

d)

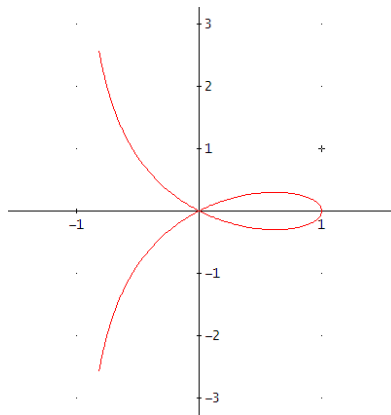


$$S_L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 e^{-x^2} \sqrt{1+(-2xe^{-x^2})^2} dx \approx \mathbf{11.07528523 u^2}$$

- 73.- a) Hallar el **área** del lazo de la estrofoide  $\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$
- b) Calcular el **volumen** de un lazo de la estrofoide  $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$  al girar alrededor del **eje de simetría**.
- c) Hallar la **longitud** del lazo de la estrofoide  $\begin{cases} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$
- d) Calcular la **superficie** generada por el lazo de la estrofoide  $\begin{cases} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases}$  al girar alrededor del eje de **abscisas**.

**Solución:**

a)



Obviamente el eje de simetría es el eje de abscisas. Buscamos los puntos de intersección con el eje de simetría:

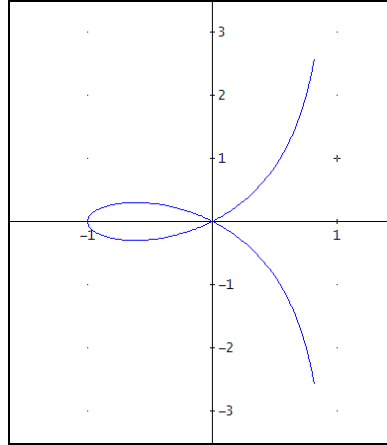
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0 \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \pm 1 \quad \text{y} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = -\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

## Integrales

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt = 2 \int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left( -\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2} \right) dt = \frac{4-\pi}{2} u^2$$

b)



Obviamente el eje de simetría es el eje de abscisas

Buscamos los puntos de intersección con el eje de abscisas

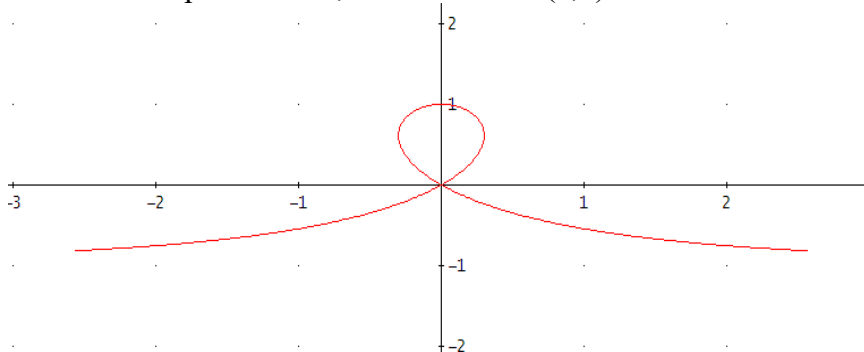
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} = 0 \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \pm 1 \quad y \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} = -1 \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = -\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t)x'(t)dt = \pi \int_0^1 \left( \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \right)^2 \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt = 2\pi \ln(2) - \frac{4\pi}{3} u^3$$

c)

Buscamos el punto de cruce o punto doble, en este caso el (0,0):



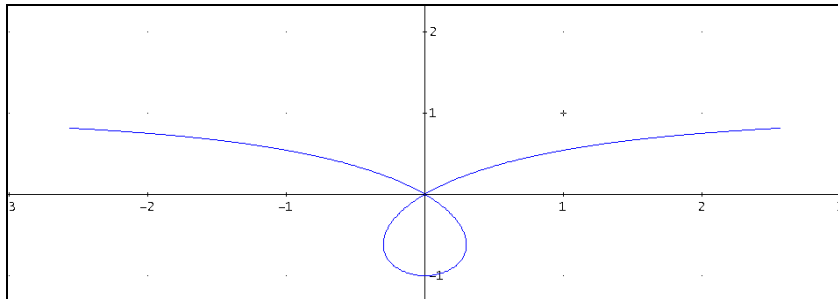
## Integrales

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \pm 1$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(-\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2}\right)^2 + \left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{t^4+6t^2-1}}{(1+t^2)} dt \approx \mathbf{2.489597270} \text{ u}$$

d)



$$2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Obtenemos los puntos de intersección con el eje de abscisas

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \\ y(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \pm 1$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$$S_L = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{t^2-1}{1+t^2} \sqrt{\left(-\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)^2} dt \approx \mathbf{8.360409629} \text{ u}^2$$

74.- a) Hallar el **área** de un lazo de la curva  $r(\alpha) = 2\text{sen}(2\alpha)$ .

b) La curva  $r(\alpha) = 2\text{sen}(2\alpha)$  gira alrededor del **eje polar**. Calcular el **volumen** obtenido.

c) Determinar la **longitud** de un lazo de la curva  $r(\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$ .

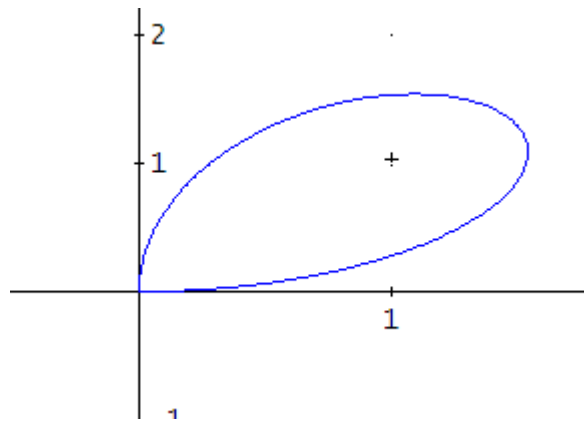
d) La curva  $r(\alpha) = \cos(\alpha)$  gira alrededor del **eje polar**. Calcular la **superficie** engendrada.

**Solución:**

a)

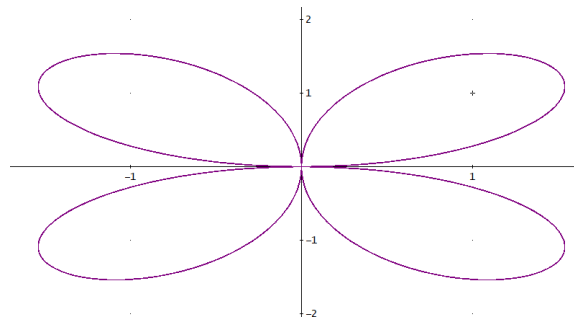
$$\left. \begin{array}{l} r = 2\text{sen}(2\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Un pétalo se obtiene entre 0 y el  $\pi/2$



$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2\text{sen}(2\alpha))^2 d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2\alpha) d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4\alpha)}{2} d\alpha = \left[ \alpha - \frac{\text{sen}(4\alpha)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

b)



$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^3 \text{sen} \alpha d\alpha = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} (2\text{sen}(2\alpha))^3 \text{sen} \alpha d\alpha \approx \frac{512\pi}{105} u^3$$

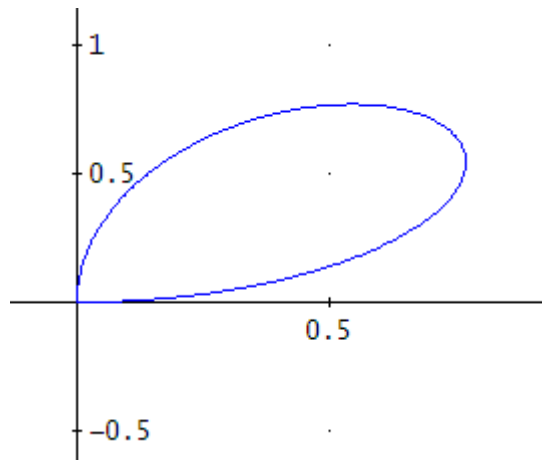


## Integrales



c)

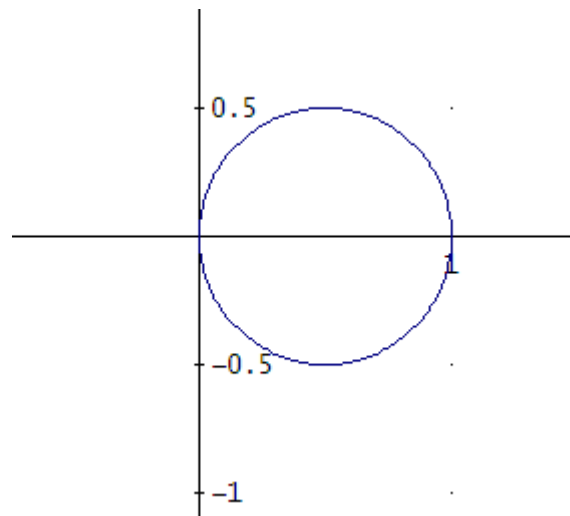
$$\left. \begin{array}{l} r = \text{sen}(2\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$r(\alpha) = \text{sen}(2\alpha) \Rightarrow r'(\alpha) = 2\cos(2\alpha)$$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\alpha = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\text{sen}(2\alpha))^2 + (2\cos(2\alpha))^2} \, d\alpha = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^3(2\alpha)} \, d\alpha \approx 2.422112055$$

d)



$$\left. \begin{array}{l} r = \cos(\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} \\ \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} r = \cos(\alpha) \\ r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pm 2\pi \end{cases}$$

$$r(\alpha) = \cos(\alpha) \Rightarrow r'(\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

$$S_L = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \text{sen} \alpha \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\alpha = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \text{sen} \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + (-\text{sen} \alpha)^2} \, d\alpha = 2\pi \left[ \frac{\text{sen}^2 \alpha}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi u^2$$

75.- Dada la curva en **coordenadas polares**  $r = e^\alpha$ , con  $\alpha < 0$ , se pide:  
a) El **área** de la región entre la curva y el eje OX.  
b) La **longitud** de la curva.

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (e^\alpha)^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^0 e^{2\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} [e^{2\alpha}]_k^0 = \frac{1}{4} (1 - \lim_{k \rightarrow -\infty} e^{2k}) = \frac{1}{4} u^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = \int_{-\infty}^0 \sqrt{(e^\alpha)^2 + (e^\alpha)^2} d\alpha = \sqrt{2} \int_{-\infty}^0 e^\alpha d\alpha = \sqrt{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^0 e^\alpha d\alpha = \\ &= \sqrt{2} \lim_{k \rightarrow -\infty} [e^\alpha]_k^0 = \sqrt{2} (e^0 - \lim_{k \rightarrow -\infty} e^k) = \sqrt{2} u \end{aligned}$$

**76. Hallar el *área* limitada por las regiones:**

$$x^2 + y^2 \geq 2x; \quad x^2 + y^2 \leq 4x; \quad y \leq x; \quad y \geq 0$$

**Solución:**

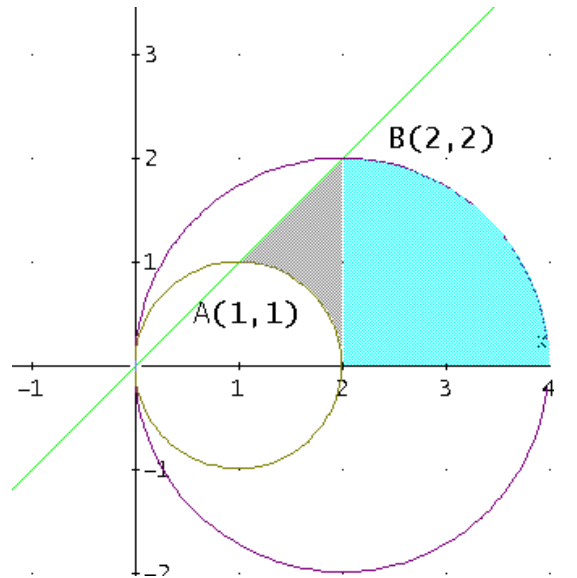
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2,2)$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x - x^2};$$

$$y = x;$$

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow y = \pm\sqrt{4x - x^2}$$



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 (x - \sqrt{2x - x^2}) dx + \int_2^4 (\sqrt{4x - x^2} - 0) dx = \int_1^2 x dx - \int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2} dx = (*)$$

Calculamos cada integral por separado:

$$I_1 = \int_1^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$I_2 = \int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \int_2^4 \sqrt{4x - x^2} dx = \int_2^4 \sqrt{4 - (x-2)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\text{sen}^2 t} 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 4 \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Quedando,  $A = (*) = I_1 - I_2 + I_3 = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4}$  u<sup>2</sup>

77.- a) Sea  $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ 4 + \operatorname{sen} x & \text{si } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

a<sub>1</sub>) Hallar  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

a<sub>2</sub>) Hallar el valor de k tal que  $I = \pi \cdot k$

a<sub>3</sub>) ¿Existe algún punto c del intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tal que  $f(c) = k$ ?

a<sub>4</sub>) ¿Contradice esto el *Teorema del valor medio integral*?

b) Hallar el *área* interior a la *circunferencia* de centro el origen y radio 1 (ecuación en *coordenadas polares*  $r = 1$ ) y exterior a la curva

$$r = \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

**Solución:**

a1) Hallar  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + \operatorname{sen} x) dx = [\operatorname{sen} x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [4x - \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1 + \pi)$$

a2)  $I = 2(1 + \pi) = \pi \cdot k \Rightarrow k = \frac{2(1 + \pi)}{\pi}$

a3)  $f(c) \neq k$ , para cualquier  $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , pues  $f(c) = \begin{cases} \cos c & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ 4 + \operatorname{sen} x & \text{si } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ , luego,

$$f(c) \in \begin{cases} [0, 1] & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ [4, 5] & \text{si } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

a4) **No contradice esto el Teorema del valor medio integral**, pues al no ser f continua en 0, no se verifican las hipótesis del teorema:

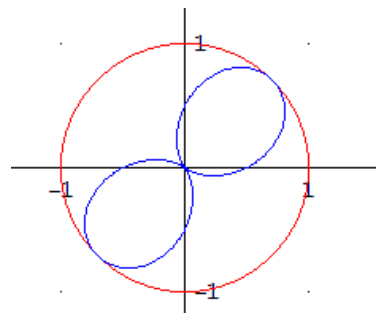
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \cos 0 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4 + \operatorname{sen} 0 = 5$$

b)

Intersección de ambas curvas:

$$r = \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow r = 1 \right.$$

$$\Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \arccos(\pm 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$





## Integrales



Ángulos para los que  $r = \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$  pasa por el polo:

$$\left. \begin{array}{l} r = \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ r = 0 \end{array} \right\} \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \arccos(0) = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Área del círculo:

$$\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Área encerrada por  $r = \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$  es  $4 A_1$ , siendo  $A_1$  el correspondiente a medio lazo.

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = 4 \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 d\alpha = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left( \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right)^2 d\alpha = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^4\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) d\alpha = \frac{3\pi}{8}$$

Área dentro del círculo y fuera de los lazos  $r_2$ :

$$A = \pi - \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} u^2$$

**78.- a)** Hallar el **volumen** engendrado por la rotación del **área** encerrada en la **circunferencia** de ecuación  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$  cuando gira alrededor del eje OX.  
**b)** Dada la curva (en **coordenadas polares**):  $r = \text{sen}\alpha + \cos\alpha$  calcular su **longitud**.

**Solución:**

**a)**

Al ser una circunferencia de centro (2,4) y radio 1 los límites de integración correspondiente al girar alrededor del eje X son:  
 $2-1=1$  y  $2+1=3$

Resolviendo en y queda  $y = 4 \pm \sqrt{1 - (x-2)^2}$

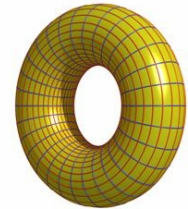
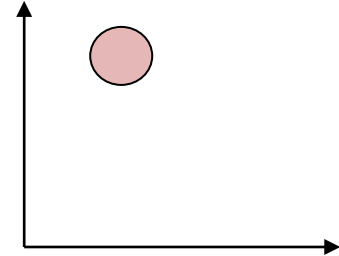
El volumen engendrado, en general, viene dado por

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

En este caso, el volumen del toro de revolución es el generado por el área encerrada entre la semicircunferencia superior y el eje X, restando el generado por el área que queda entre la semicircunferencia inferior y el eje X.

$$V = \pi \int_1^3 \left(4 + \sqrt{1 - (x-2)^2}\right)^2 dx - \pi \int_1^3 \left(4 - \sqrt{1 - (x-2)^2}\right)^2 dx =$$

$$V = 16\pi \int_1^3 \sqrt{-x^2 + 4x - 3} dx = \boxed{8\pi^2} u^3$$



**b)**

Antes de calcular la longitud hay que ver el dominio de la función r. Sólo se tendrán en cuenta aquellos valores angulares para los que  $r > 0$ .

Es evidente que para ángulos del primer cuadrante  $r > 0$  así como para ángulos del tercer cuadrante  $r < 0$ . Hay que discutir los casos en el segundo y cuarto cuadrantes.

Si se hace  $r=0$  se obtiene  $r = \text{sen}\alpha + \cos\alpha = 0$  lo cual ocurre para los ángulos  $\alpha = 3/4\pi$  y  $\alpha = 7/4\pi$  y ahora queda por comprobar si  $r > 0$  se da para los ángulos mayores o menores que los dados en cada cuadrante. En el segundo cuadrante,  $r > 0$  para ángulos menores que  $3/4\pi$  y en el cuarto cuadrante,  $r > 0$  para ángulos mayores que  $7/4\pi$ .

El resumen puede verse en la zona sombreada del gráfico

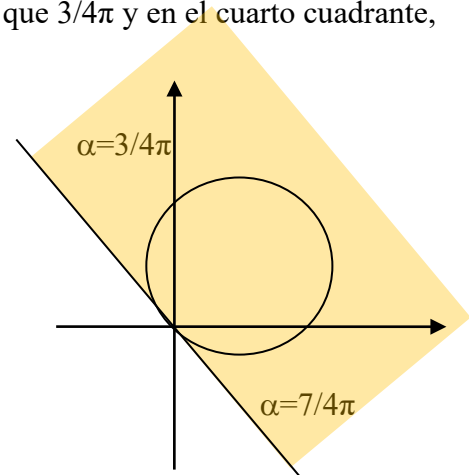
en general,  $L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2} d\alpha,$

como en este caso  $\sqrt{(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2} = \sqrt{2}$  se tiene que

$$L = \int_0^{3\pi/4} \sqrt{2} d\alpha + \int_{7\pi/4}^{2\pi} \sqrt{2} d\alpha = \boxed{\sqrt{2}\pi} u$$

O bien, simplemente

$$L = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{2} d\alpha = \sqrt{2}\pi$$



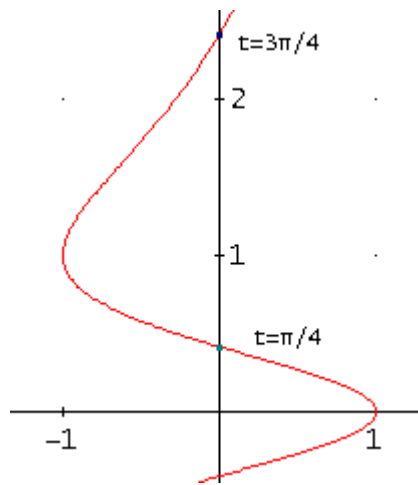
79.- Dada la curva  $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$ .

a) Calcular el **área** encerrada por la curva y el eje OY en el segundo cuadrante ( $x < 0$ ,  $y > 0$ ).

b) El **área** del apartado anterior gira alrededor del eje OY, calcular el **volumen** de revolución obtenido.

**Solución:**

Período = m.c.m.  $(\pi, 2\pi) = 2\pi$



a) Área 2º cuadrante:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1 \\ y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\operatorname{sen}(2t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{1 + \cos t} \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} |x(t) \cdot y'(t)| dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left| \cos(2t) \cdot \frac{1}{1 + \cos t} \right| dt = \pi - 2u^2.$$

b) Volumen de revolución alrededor de OY:

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} x^2(t) \cdot y'(t) dt = \pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2(2t) \cdot \frac{1}{1 + \cos t} dt = \pi \cdot (4 - \pi)u^3.$$



## Integrales



80.- Área interior simultáneamente a las dos curvas siguientes dadas en coordenadas polares:

$$r = \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{2} \quad (\text{circunferencia de centro en el polo y radio } \frac{1}{2}).$$

**Solución:**

El período es  $\pi$ . La curva queda dibujada entera para  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ .

Puntos de corte entre ambas curvas:

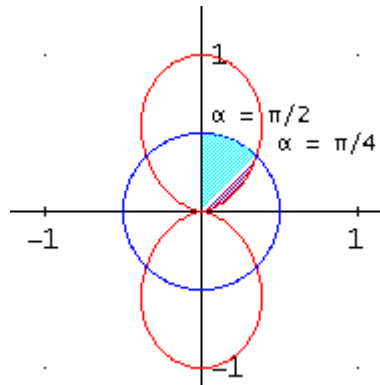
$$\left. \begin{array}{l} r = \operatorname{sen}^2(\alpha) \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{4} \\ \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

En el primer cuadrante el punto de corte se obtiene para  $\alpha = \pi/4$ .

Valores de  $\alpha$  para los que la curva alcanza el polo:

$$\left. \begin{array}{l} r = \operatorname{sen}^2(\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} \operatorname{sen}^2(\alpha) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pm \pi \end{cases}$$

En el primer cuadrante:  $\alpha = 0$ .



Calculamos el área del primer cuadrante y la multiplicamos por 4.

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 \, d\alpha = 4 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 \, d\alpha = 2 \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen}^2(\alpha))^2 \, d\alpha + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \, d\alpha = \frac{5\pi - 8}{64} u^2$$

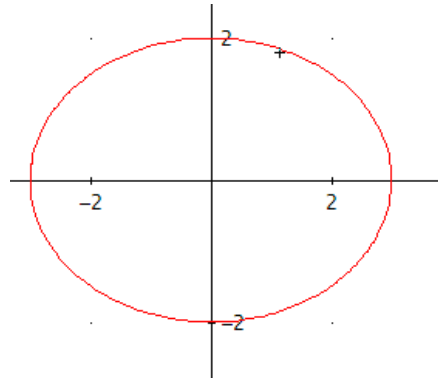
## Integrales

**81.-** La *elipse* de ecuación  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  gira alrededor del *eje de abscisas*.

Calcular el *volumen* y la *superficie del cuerpo de revolución* que se obtiene.

**Solución:**

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \left\{ \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \Rightarrow y' = \pm \frac{2}{3} \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \mp \frac{2}{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$



Corte con OX:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pm 3$$

Volumen de revolución:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_{-3}^3 \left( \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \right)^2 dx = \frac{4}{9} \pi \int_{-3}^3 (9-x^2) dx = \frac{4}{9} \pi \left[ 9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 = \frac{4}{9} \pi 36 = 16\pi \text{ u}^3$$

Superficie de revolución:

$$\begin{aligned} S_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_{-3}^3 \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \sqrt{1 + \left( \frac{2}{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right)^2} dx = \frac{4\pi}{9} \int_{-3}^3 \sqrt{81-5x^2} dx = \\ &= \frac{72\sqrt{5}\pi}{5} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) + 8\pi \approx 67.67287265 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

82.- Calcular las *derivadas* de las siguientes funciones:

a)  $F(x) = \int_5^{x^3} \ln(t^2) dt$ ; b)  $G(x) = \int_{5x}^{x^4} (\ln x) \sqrt{t} dt$ ; c)  $H(x) = \int_2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{sen} t dt$ .

d)  $I(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\operatorname{tg} x} \operatorname{sen} x \cos t dt$ ; e)  $J(x) = \int_3^{\ln x} \operatorname{tg} t dt$ ; f)  $K(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} t dt$ ;

g)  $L(x) = \int_1^{x^3} \cos t dt$ ; h)  $M(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos x \operatorname{sen} t dt$ ; i)  $N(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} t dt$

**Solución:**

a)  $F'(x) = 3x^2 \ln(x^3) = 3x^2 \ln(x^6)$ .

b)  $G(x) = (\ln x) \int_{5x}^{x^4} \sqrt{t} dt \Rightarrow$

$$G'(x) = \frac{1}{x} \int_{5x}^{x^4} \sqrt{t} dt + (\ln x) [4x^3 \sqrt{x^4} - 5\sqrt{5x}]$$

c)  $H'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) - 0 = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$ .

d)  $I(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\operatorname{tg} x} \operatorname{sen} x \cos t dt = \operatorname{sen} x \int_{\operatorname{sen} x}^{\operatorname{tg} x} \cos t dt \Rightarrow$

$$I'(x) = \cos x \int_{\operatorname{sen} x}^{\operatorname{tg} x} \cos t dt + \operatorname{sen} x \left( \frac{1}{\cos^2 x} \cos(\operatorname{tg} x) - \cos x \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \right) =$$

e)  $J'(x) = \frac{1}{x} \operatorname{tg}(\ln x) - 0 = \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}$ .

f)  $K(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} t dt = \operatorname{tg} x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt \Rightarrow$

$$K'(x) = (\operatorname{tg} x)' \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt + \operatorname{tg} x \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt \right)' =$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt + \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x} - 2x \operatorname{sen} x^2 \right)$$

g)  $L'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$ .

h)  $M(x) = \cos x \int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen} t dt \Rightarrow$

$$M'(x) = (-\operatorname{sen} x) \int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen} t dt + (\cos x) [3x^2 \operatorname{sen}(x^3) - 2x \operatorname{sen}(x^2)]$$

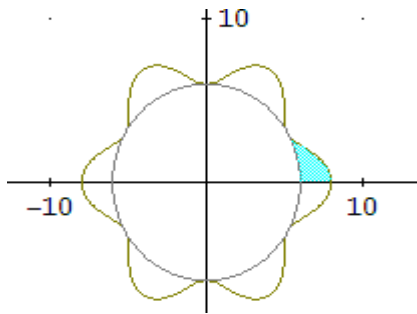
i)  $N(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} x \operatorname{sen} t dt = \operatorname{tg} x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt \Rightarrow$

$$G'(x) = (\operatorname{tg} x)' \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt + \operatorname{tg} x \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt \right)' =$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t dt + \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x} - 2x \operatorname{sen} x^2 \right)$$

**83.-** Hallar el *área* de la región comprendida entre la curva en *polares*  $r = 7 + \cos(6\alpha)$  y la *circunferencia* de centro el origen y radio 6.

**Solución:**



$$7 + \cos(6\alpha) = 6 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \dots$$

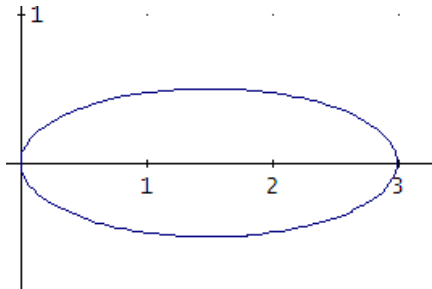
Por las simetrías de las curvas, el área A pedida es 12 veces el área rayada de la figura. Por tanto,

$$A = 12 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (7 + \cos(6\alpha))^2 d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 6^2 d\alpha \right] =$$

$$= 6 \left( \frac{33\pi}{4} - 6\pi \right) = 6 \frac{9\pi}{4} = \frac{27\pi}{2} u^2$$

**84.- Calcular la longitud de la curva  $9y^2 = x(3-x)$**

**Solución:**



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Puntos de corte con OX ( $y = 0$ ):

$$\left. \begin{array}{l} 9y^2 = x(3-x) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

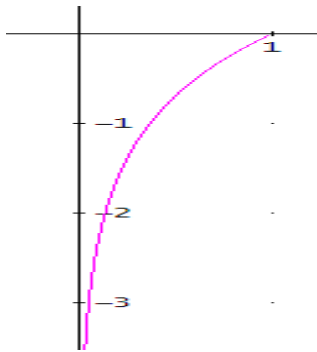
$$9y^2 = x(3-x) \Rightarrow y = \pm \frac{1}{3} \sqrt{x(3-x)} \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{3} \frac{3-2x}{2\sqrt{x(3-x)}} = \pm \frac{3-2x}{6\sqrt{x(3-x)}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2 \int_0^3 \sqrt{1 + \left( \frac{3-2x}{6\sqrt{x(3-x)}} \right)^2} dx \approx \mathbf{6.682099172u}$$

## Integrales

85.- Calcular el *volumen* del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje de abscisas del arco de la curva  $y = \ln x$  comprendido entre 0 y 1. Indica, en su caso, si la *integral* que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

*Solución:*



$$V = \pi \int_0^1 f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (\ln x)^2 dx = \pi \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 (\ln x)^2 dx = 2\pi u^3$$

Es una **integral impropia de segunda especie**:  
función no acotada en intervalo de integración finito pues

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = \infty$$

Es **convergente**.

86. - Calcular la *superficie* del elipsoide de revolución engendrada por la rotación alrededor del eje de *abscisas* de la *elipse* cuyas *ecuaciones paramétricas* son:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \operatorname{sent} \end{cases}$$

**Solución:**

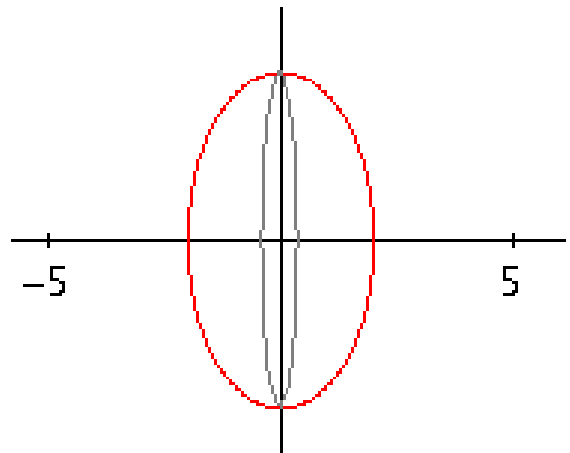
La elipse es simétrica respecto de los ejes y periódica de periodo  $2\pi$  (por serlo  $x$  e  $y$ ), en consecuencia, el elipsoide se genera rotando la mitad superior (intervalo  $[0, \pi]$ ).

Para  $t=0 \rightarrow (2,0)$  y para  $t=\pi \rightarrow (-2,0)$

$$S_L = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =$$

$$2\pi \int_0^\pi 3 \operatorname{sent} \sqrt{(-2 \operatorname{sent})^2 + (3 \cos t)^2} dt = 18 \cdot \pi -$$

$$\frac{1}{5} \left( 12\sqrt{5}\pi - \ln \left( \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \right) \right) \approx \mathbf{89 \text{ u}^2}$$





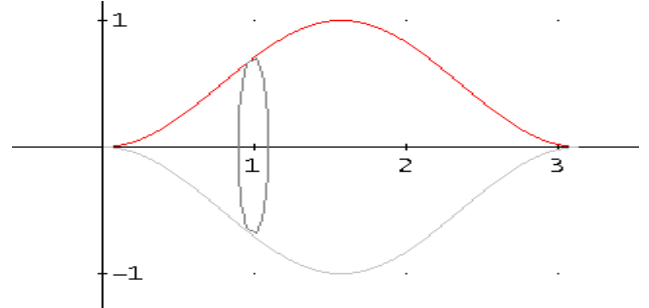
## Integrales



87.- Hallar el *volumen* del sólido generado al girar, alrededor del eje OX, el arco de la curva  $y = \sin^2 x$  comprendido entre  $x = 0$  y  $x = \pi$ .

*Solución:*

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_0^\pi (\sin^2 x)^2 dx = \frac{3\pi^2}{8} u^3$$





## Integrales



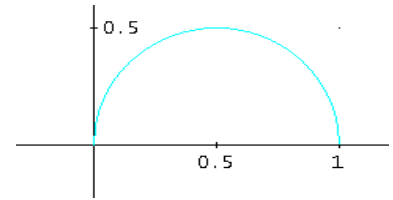
88.- Calcular la *longitud* de la curva  $y = \sqrt{x(1-x)}$ . Indica, en su caso, si la *integral* que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

**Solución:**

La curva corresponde a una semicircunferencia. Su dominio es el intervalo  $[0,1]$  que son los valores donde  $x(1-x) \geq 0$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\right)^2} dx =$$

$$2 \int_0^{0.5} \sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\right)^2} dx = 2 \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{0.5} \sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\right)^2} dx = \frac{\pi}{2} \mathbf{u}$$



Es una **integral impropia de segunda especie**: función no acotada en intervalo de integración

finito pues  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\right)^2} = \infty$  e igual para  $x \rightarrow 1^-$

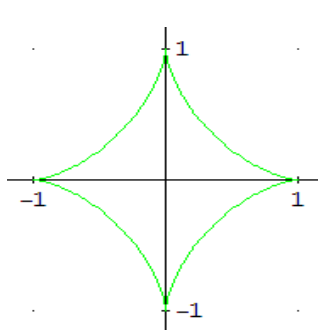
Es **convergente**.

**89.- Hallar la superficie del sólido generado por la astroide de ecuación**

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \text{ al girar alrededor del eje OY.}$$

**Solución:**

Por las simetrías de la curva, la superficie al girar alrededor del eje OY coincide con la obtenida al girar alrededor de OX:



$$\begin{cases} x = \cos^3 t = 1 \\ y = \sin^3 t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = \cos^3 t = 0 \\ y = \sin^3 t = 1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

La curva en el primer cuadrante se obtiene para  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , por tanto:

$$S_L = 2\pi \int_{t_2}^{t_1} x(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \text{ cuando es alrededor del eje OY.}$$

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3\cos^2 t \sin t \\ y' = 3\sin^2 t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x')^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t \\ (y')^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t = 9\sin^2 t \cos^2 t$$

$$S_L = 2\pi \int_{t_2}^{t_1} x(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t} dt = 12\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t dt =$$

$$12\pi \left[ \frac{-\cos^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{12\pi}{5} \mathbf{u^2}$$



## Integrales

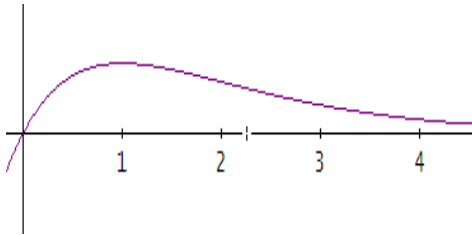


90.- Calcular el *volumen* del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje de *abscisas* del arco de la curva  $y = xe^{-x}$  para  $x \geq 0$ . Indica, en su caso, si la *integral* que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

**Solución:**

$$V = \pi \int_0^{\infty} f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\infty} (xe^{-x})^2 dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c (xe^{-x})^2 dx = \frac{\pi}{4} u^3$$



Es una integral **impropia de primera especie** (intervalo de integración infinito y función continua en el intervalo) convergente.

**91.- Calcular el área comprendida entre las curvas en polares:**

a)  $r = 1 + \cos \alpha$  y  $r = \cos \alpha$ .

b)  $r = 1 - \cos \alpha$  y  $r = -\cos \alpha$ .

**Solución:**

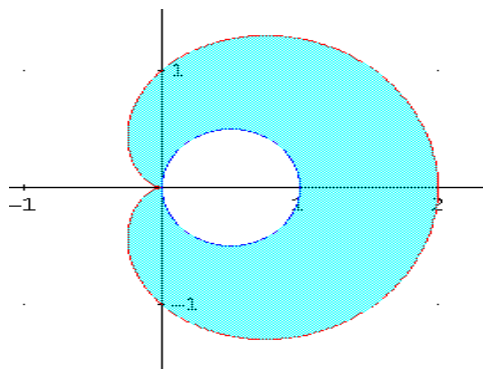
a) Ambas curvas son periódicas de periodo  $2\pi$  y simétricas respecto del eje polar por serlo el coseno, en consecuencia, el área es 2 veces la región por encima del eje de abscisas.

Los límites de integración se obtienen por intersección para  $r=0$ :

$$r = 1 + \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi ; r = \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Y para  $r=1$  en la circunferencia  $r = \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

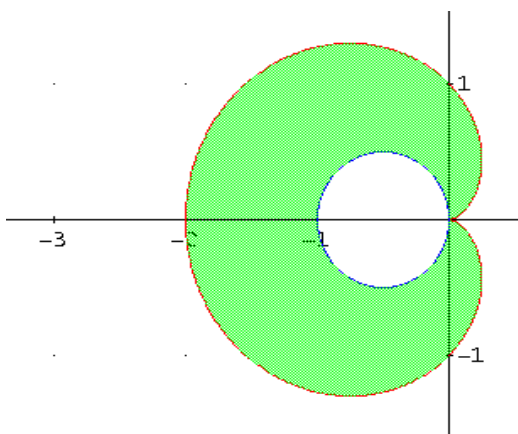
Y  $r=2$  en la cardioide  $r = 1 + \cos \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 0$



Por lo tanto,  $A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r(\alpha)^2 d\alpha =$

$$2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \alpha)^2 d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^2 d\alpha \right] = \frac{5}{4} \pi u^2$$

b) Ambas curvas son periódicas de periodo  $2\pi$  y simétricas respecto del eje polar por serlo el coseno, en consecuencia, el área es 2 veces la región por encima del eje de abscisas



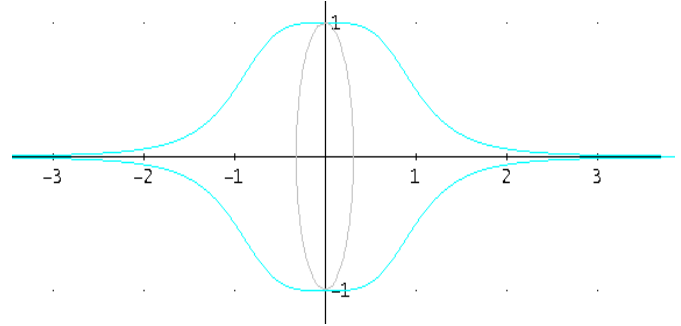
Por lo tanto,  $A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r(\alpha)^2 d\alpha =$

$$2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos \alpha)^2 d\alpha - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\pi/2} (-\cos \alpha)^2 d\alpha \right] = \frac{5}{4} \pi u^2$$

92.- Calcular el *volumen* del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje de abscisas de la curva  $y = \frac{1}{x^4 + 1}$ . Indica, en su caso, si la integral que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

*Solución:*

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi f(x)^2 dx = 2\pi \int_0^\infty \left( \frac{1}{x^4 + 1} \right)^2 dx = \\ &= 2\pi \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \left( \frac{1}{x^4 + 1} \right)^2 dx = \frac{3\sqrt{2}\pi^2}{8} u^3 \end{aligned}$$



Es una **integral impropia de primera especie** (función continua en intervalo de integración infinito:  $(0, \infty)$ ) y es convergente.

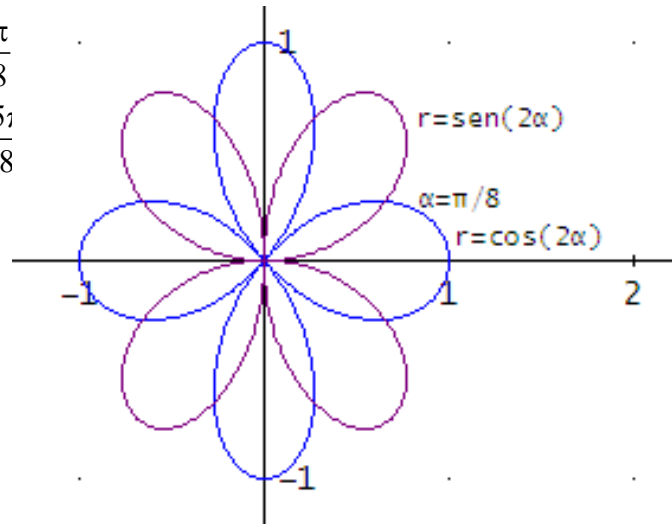
93.- Las curvas, en *polares*,  $r = \text{sen}(2\alpha)$  y  $r = \text{cos}(2\alpha)$ , se cortan dando lugar a varios recintos interiores comunes a ambas curvas, todos de la misma *área*. Calcular el *área* de uno de estos recintos.

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} r = \text{sen}(2\alpha) \\ r = \text{cos}(2\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sen}(2\alpha) = \text{cos}(2\alpha) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{8} \\ \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} r = \text{sen}(2\alpha) \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sen}(2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} r = 0 \\ r = \text{cos}(2\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \text{cos}(2\alpha) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



La fórmula a utilizar es:  $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r(\alpha)^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \text{sen}^2(2\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\pi/8}^{\pi/4} \text{cos}^2(2\alpha) d\alpha =$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \text{cos}^2(4\alpha)}{2} \right]_0^{\pi/8} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \text{cos}^2(4\alpha)}{2} \right]_{\pi/8}^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \text{ u}^2$$



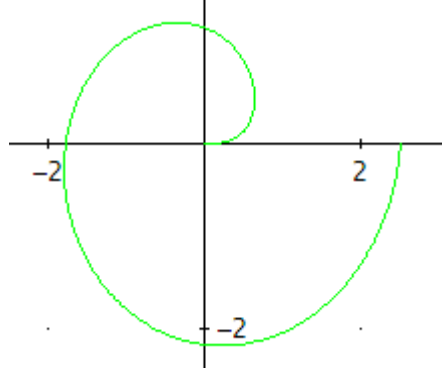
## Integrales



94.- Plantear la integral que da la *longitud* del primer arco de la espiral  $r = \sqrt{\alpha}$  (coordenadas polares).

*Solución:*

Para valores de  $\alpha$  entre 0 y  $2\pi$ , se obtiene el primer arco de la espiral:



$$r = \sqrt{\alpha} \Rightarrow r' = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

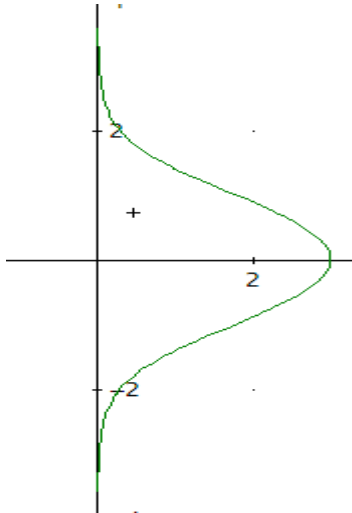
La longitud viene dada por:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\alpha)^2 + r'(\alpha)^2} d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sqrt{\alpha})^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4\alpha^2 + 1}{4\alpha}} d\alpha \approx \mathbf{11.27394126u}$$

Aproximando esta integral con el comando  $\approx$  de Derive.

95.- Calcular el *volumen* obtenido por la rotación de la curva  $y^2 = \frac{3-x}{\sqrt[3]{x}}$  alrededor del eje de abscisas. Indica, en su caso, si la integral que has utilizado es *impropia*, a qué tipo pertenece y si es *convergente* o *divergente*.

*Solución:*



$$y^2 = \frac{3-x}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x = 3$$

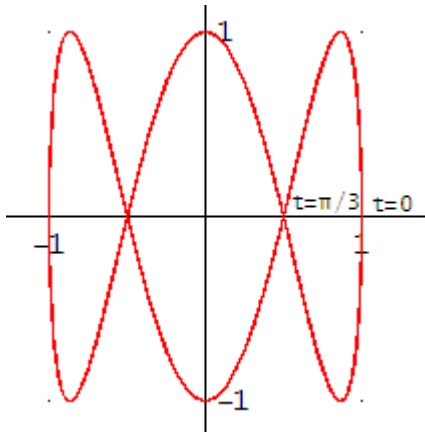
El volumen pedido viene dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{3-x}{\sqrt[3]{x}} dx = \\ &= \pi \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^3 \frac{3-x}{\sqrt[3]{x}} dx = \pi \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^3 \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx - \pi \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x}} dx = \\ &= \pi \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[ \frac{9}{2} x^{2/3} \right]_k^3 - \pi \lim_{k \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{5} x^{5/3} \right]_k^3 = \pi \frac{27}{10} 3^{2/3} \mathbf{u^3}. \end{aligned}$$

La integral utilizada es una **integral impropia de segunda especie** (función no acotada en un intervalo de integración finito) convergente.

96.- Calcular la *superficie de revolución* engendrada por la rotación alrededor del eje de abscisas del bucle derecho de la curva  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}(3t) \end{cases}$

**Solución:**



$$\begin{cases} 0 \Rightarrow x = \cos 0 = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ y = \text{sen}(3t) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \pi \Rightarrow x = \cos \pi = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Para  $t = 0$ , se obtiene el punto:  $(1, 0)$ .

Para  $t = \pi/3$ , se obtiene el punto  $(1/2, 0)$ .

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}(3t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\text{sen}t \\ y' = 3\cos(3t) \end{cases}$$

$$S_L = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}(3t) \sqrt{(-\text{sen}t)^2 + (3\cos(3t))^2} dt \approx \mathbf{6.825649852u^2}$$

97.-

a) Hallar el **área** limitada por las regiones

$$x^2 + y^2 \geq 2x; \quad x^2 + y^2 \leq 4x; \quad y \leq x; \quad y \geq 0.$$

b) Hallar el **área** limitada por las curvas

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \cos t \\ y = \text{sent} \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 2\text{sent} \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

c) Hallar el **área** limitada por las curvas

$$r = 2 \cos \alpha; \quad r = 4 \cos \alpha; \quad \text{tg} \alpha = 1; \quad \text{sen} \alpha = 0$$

**Solución:**

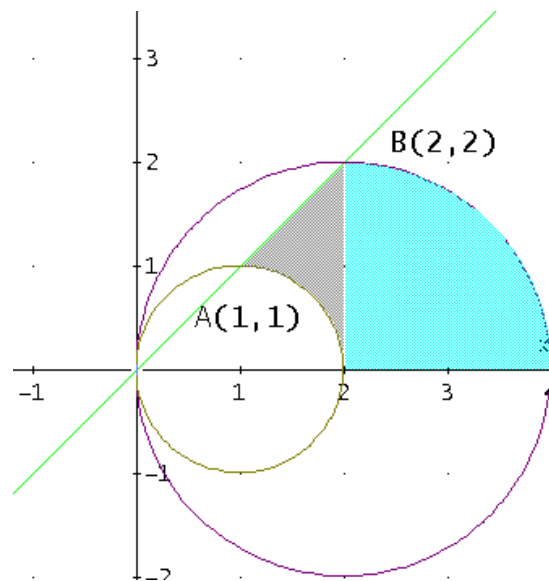
a) Buscamos los puntos de intersección entre las circunferencias y la recta:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow A(1,1) \qquad \qquad \qquad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow B(2,2)$$

$$A = \int_1^2 (x - \sqrt{2x - x^2}) dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2} dx = \int_1^2 x dx - \int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2} dx = (*)$$

Calculamos cada integral por separado:

$$I_1 = \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$



$$I_2 = \int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \int_2^4 \sqrt{4x - x^2} dx = \int_2^4 \sqrt{4 - (x-2)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\text{sen}^2 t} 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 4 \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\text{sen} 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Quedando,  $A = (*) = I_1 - I_2 + I_3 = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4}$  u<sup>2</sup>



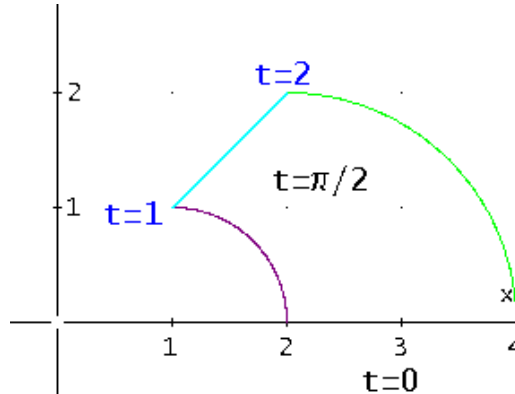
## Integrales

b) Buscamos los puntos de intersección entre las circunferencias y la bisectriz del primer cuadrante:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \cos t_1 \\ y = \text{sent}_{t_1} \\ x = t_2 \\ y = t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 2 \cos t_1 \\ y = 2 \text{sent}_{t_1} \\ x = t_2 \\ y = t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$$

Obviamente con el eje de abscisas resulta en los dos casos  $t=0$ .



En el caso de la recta  $\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array} \right\}$  los límites son 1 y 2

La fórmula a utilizar será:  $A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)| dt$

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t \end{array} \right\} \Rightarrow x'(t) = 1 \Rightarrow I_1 = \int_1^2 t \cdot 1 \cdot dt = \frac{3}{2}$$

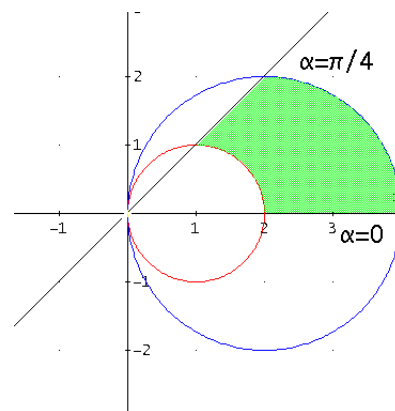
$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \cos t \\ y = \text{sent} \end{array} \right\} \Rightarrow x'(t) = -\text{sent} \Rightarrow I_2 = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 2 \cos t \\ y = 2 \text{sent} \end{array} \right\} \Rightarrow x'(t) = -2 \text{sent} \Rightarrow I_3 = 4 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t dt = \pi$$

$$\text{Quedando, } A = I_1 - I_2 + I_3 = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4} u^2$$

Obsérvese que  $I_2$  e  $I_3$  son la cuarta parte de círculos de radios 2 y 1 respectivamente.

c) La recta  $\text{tg}\alpha=1$  tiene un ángulo de  $45^\circ$ , es decir,  $\pi/4$  radianes con el eje polar, luego:



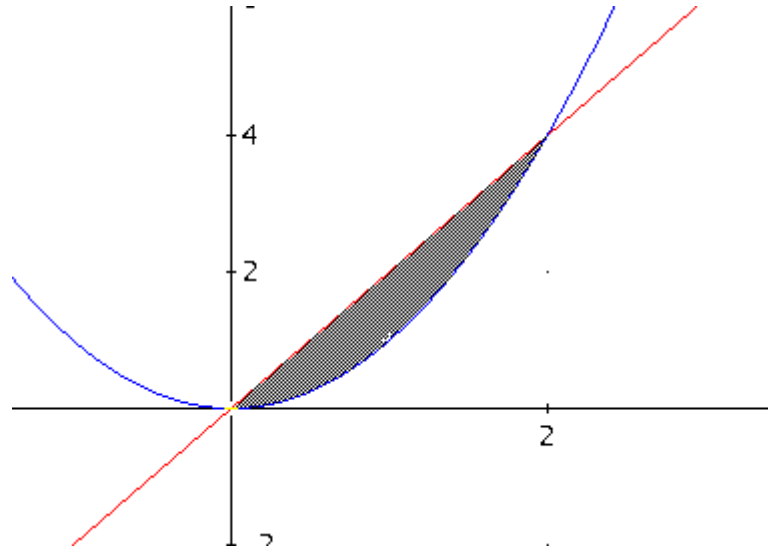
$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (r_2^2 - r_1^2) d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (16 \cos^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha) d\alpha = 6 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{3(\pi+2)}{4} u^2$$

98.- Hallar el *volumen* del sólido obtenido al hacer girar la región comprendida entre  $y=x^2$  e  $y=2x$  alrededor del eje X.

*Solución:*

El volumen pedido viene dado por:  $V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$

Haciendo  $x^2=2x$ , resulta los puntos  $x=0, x=2$



$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_0^2 ((2x)^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[ \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{64}{15} \pi u^3$$

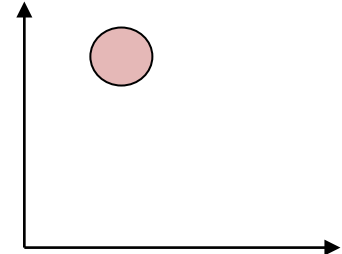


99.-Hallar la *superficie* engendrada por la rotación de la *circunferencia* de ecuación  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$  cuando gira alrededor del eje OX.

**Solución:**

Al ser una circunferencia de centro (2,4) y radio 1 los límites de integración correspondiente al girar alrededor del eje X son:  
 $2-1=1$  y  $2+1=3$

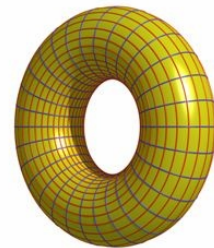
Resolviendo en y queda  $y = 4 \pm \sqrt{1-(x-2)^2} \Rightarrow y' = \frac{2-x}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$



La superficie engendrada, en general, viene dada por

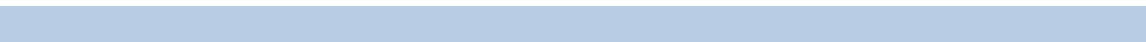
$$S_L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

En este caso, la superficie del toro de revolución es la generada por el área encerrada entre la semicircunferencia superior y el eje X, e igual la generada por el área que queda entre la semicircunferencia inferior y el eje X.



$$S_L = 2 \cdot 2\pi \int_1^3 y \sqrt{1+(y')^2} dx =$$

$$= 4\pi \int_1^3 \left( \left( 4 + \sqrt{1-(x-2)^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{2-x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \right)^2} \right) dx = \boxed{8\pi(2\pi-1)} u^2$$



100.-a) Hallar el *área* interior al *círculo*  $r=1$  y exterior a la *cardioide*  $r=1-\cos\alpha$ .

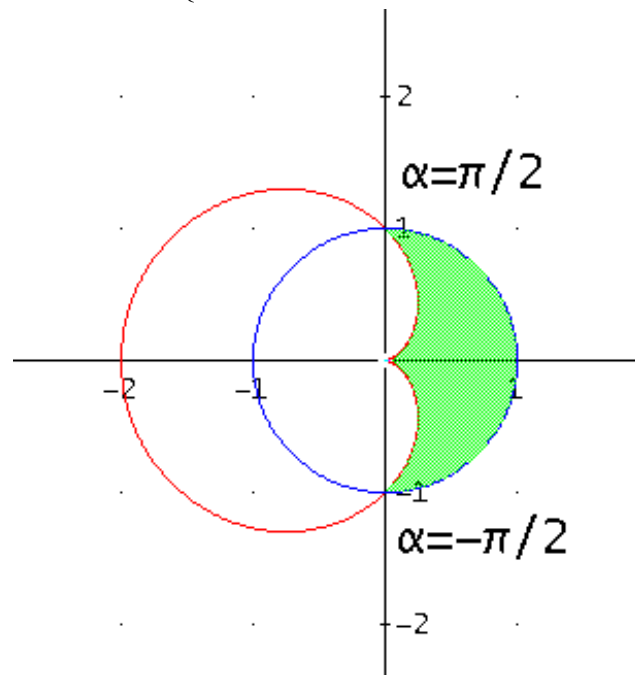
b) Determinar la longitud de la cardioide  $r=1-\cos\alpha$

Solución:

a) La fórmula a utilizar es:  $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (r_2^2 - r_1^2) d\alpha$

Los puntos de intersección entre las dos curvas son

$$\left. \begin{array}{l} r = 1 \\ r = 1 - \cos\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1^2 - (1 - \cos\alpha)^2) d\alpha = \boxed{2 - \frac{\pi}{4}} u^2$$

b)

Al ser una curva de periodo  $2\pi$ , la longitud viene dada por:

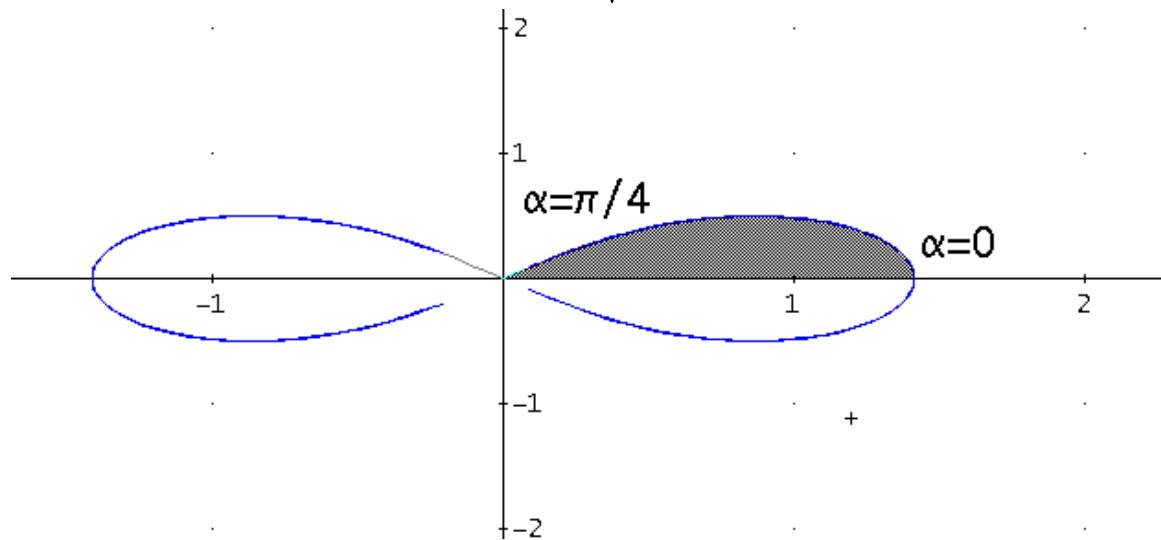
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \text{sen}^2\alpha} d\alpha = \boxed{8} u$$

101.- Obtener el *área* de la *superficie* generada por la curva  $r = \sqrt{2 \cos(2\alpha)}$  al girar alrededor del eje polar.

*Solución:*

En el polo  $r=0$ , obtenemos  $r = 0 = \sqrt{2 \cos(2\alpha)} \Rightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4}$

Y en la intersección con el eje polar  $r = \sqrt{2} = \sqrt{2 \cos(2\alpha)} \Rightarrow \cos(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \{0, \pm\pi\}$



$$r = \sqrt{2 \cos(2\alpha)} \Rightarrow r^2 = 2 \cos(2\alpha)$$

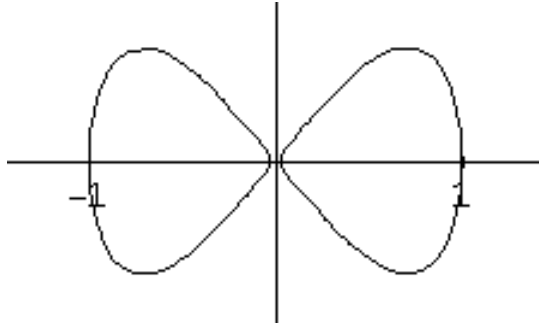
$$r' = -\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(2\alpha)}{\sqrt{\cos(2\alpha)}} \Rightarrow (r')^2 = \frac{2 \operatorname{sen}^2(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \operatorname{sen} \alpha \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 \cos(2\alpha)} \operatorname{sen} \alpha \sqrt{2 \cos(2\alpha) + \frac{2 \operatorname{sen}^2(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}} d\alpha \approx$$

$$\pi(8 - 4\sqrt{2}) \text{ u}^2$$

102.- Hallar el **volumen** engendrado al rotar la curva  $y^2 = x^2 - x^4$  alrededor del eje de abscisas.

*Solución*



Calculamos los puntos de intersección con el eje de abscisas

$$\text{Es decir, resolvemos } x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

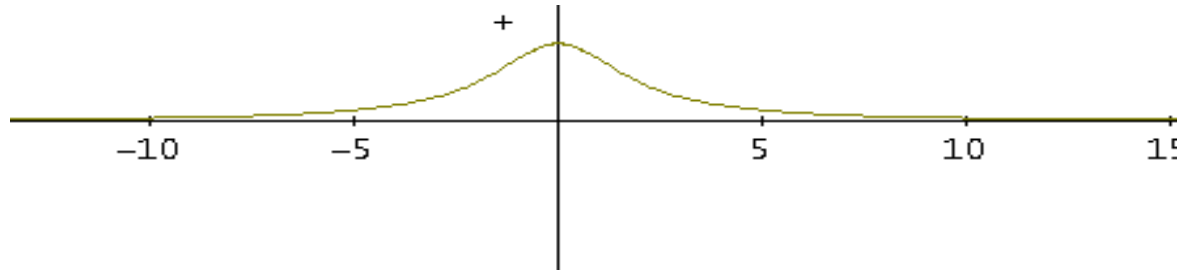
El volumen pedido viene dado por:  $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 - x^2) dx = \frac{4\pi}{15} u^2$$



103.- Estudiar si el **área** de la región comprendida entre la curva de ecuaciones  $\left. \begin{matrix} x(t) = 2t g(t) \\ y(t) = 2\cos^2(t) \end{matrix} \right\}$  y su **asíntota** es finita o no.

**Solución**



Tiene una asíntota horizontal que es el eje de abscisas ( $y=0$ ) para  $t = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2tg(t) = \pm\infty; \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t = 0$$

Además, la curva es simétrica respecto del eje de ordenadas pues

$$\left. \begin{matrix} x(-t) = 2t g(-t) = -2tg(t) = -x(t) \\ y(-t) = 2\cos^2(-t) = 2\cos^2(t) = y(t) \end{matrix} \right\}$$

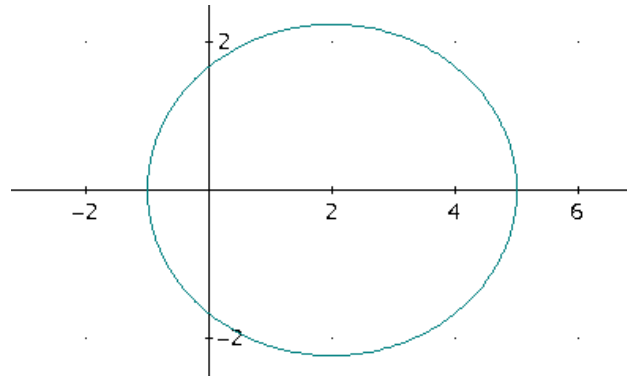
La fórmula a utilizar será:  $A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)| dt$

$$x'(t) = \frac{2}{\cos^2 t}$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)| dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t \frac{2}{\cos^2 t} dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4\pi \text{ u}^2$$

104.- Hallar la *longitud* de la elipse de ecuación  $r = \frac{5}{3 - 2 \cos \alpha}$ .

*Solución*



La fórmula a utilizar es:  $L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha$

Estableciendo los límites de integración entre 0 y  $2\pi$

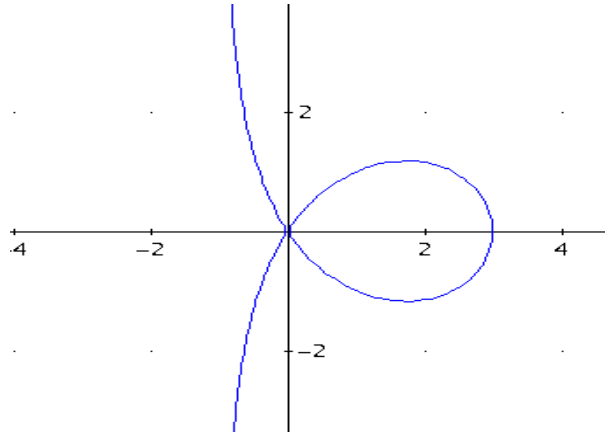
$$r(\alpha) = \frac{5}{3 - 2 \cos \alpha} \Rightarrow r'(\alpha) = -\frac{10 \operatorname{sen} \alpha}{(3 - 2 \cos \alpha)^2} \Rightarrow$$

$$(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2 = \left(\frac{5}{3 - 2 \cos \alpha}\right)^2 + \left(-\frac{10 \operatorname{sen} \alpha}{(3 - 2 \cos \alpha)^2}\right)^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{5}{3 - 2 \cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{-10 \operatorname{sen} \alpha}{(3 - 2 \cos \alpha)^2}\right)^2} d\alpha \approx \boxed{16.53724725} \text{ u}$$

105.- Hallar el **volumen** engendrado al rotar la curva  $y^2 = \frac{x^2(3-x)}{1+x}$  (Trisectriz de Maclaurin) alrededor del eje de abscisas.

**Solución**



Calculamos los puntos de intersección con el eje de abscisas.

$$0 = \frac{x^2(3-x)}{1+x} \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

El volumen pedido viene dado por:  $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

$$V = \pi \int_0^3 \frac{x^2(3-x)}{1+x} dx = \pi(8 \ln 2 - 3) u^3$$



**106.- Hallar el volumen del cuerpo intersección de los cilindros:**

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad y^2 + z^2 = r^2$$

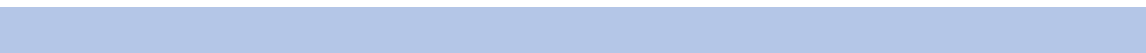
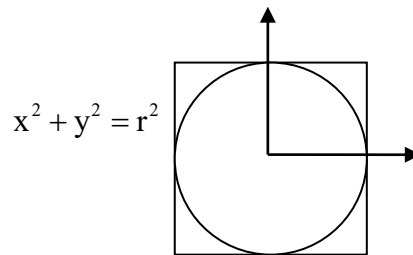
**Solución:**

Podemos observar que al hacer cortes perpendiculares a la sección común de los dos cilindros se obtienen cuadrados de lado  $2y$ . Por lo tanto,

El volumen pedido viene dado por:  $V = \int_a^b A(x)dx$

$$A(x) = (2y)^2 = \left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2$$

$$V = \int_{-r}^r 4(r^2 - x^2)dx = 4 \left[ r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = 4 \frac{4}{3} r^3 = \frac{16}{3} r^3 \text{ u}^3$$



107.- Dada la curva en coordenadas polares  $r = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ , se pide:

a) Período de la curva.

b) Dominio de  $r(\alpha)$ .

c) Longitud de la curva (para valores de  $\alpha$  dentro del dominio de la función).

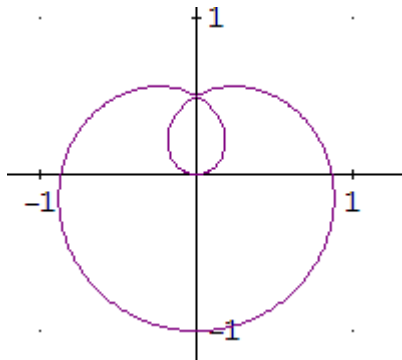
**Solución:**

a)  $T = 3 \times 2\pi = 6\pi$

b) La curva se dibuja completa para  $\alpha \in [0, 6\pi] \Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in [0, 2\pi]$

Ha de ser  $r(\alpha) \geq 0$ , es decir:  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in [0, \pi] \Rightarrow \alpha \in [0, 3\pi]$

c)



La fórmula a utilizar es:  $L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha$

Estableciendo los límites de integración entre 0 y  $3\pi$

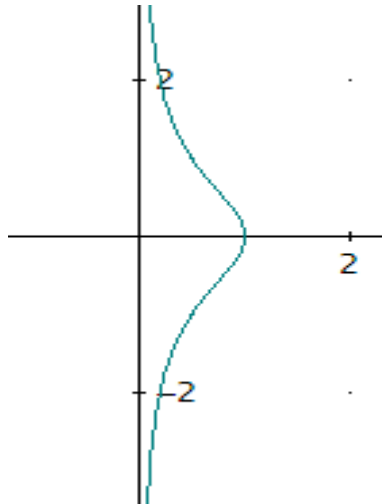
$$r(\alpha) = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow r'(\alpha) = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow$$

$$(r(\alpha))^2 + (r'(\alpha))^2 = \left(\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2$$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = \int_0^{3\pi} \sqrt{\left(\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2} d\alpha \approx 6.682446610 \text{ u}$$

108.- Hallar el área encerrada entre la curva  $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \text{tg } t \end{cases}$  y su asíntota.

**Solución**



$$\begin{cases} x = \cos^2 t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{tg } t) = \pm\infty \\ y = \text{tg } t = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = \cos^2 0 = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ \pi \Rightarrow x = \cos^2 \pi = (-1)^2 = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ -\pi \Rightarrow x = \cos^2 (-\pi) = 1 \Rightarrow (1, 0) \end{cases} \end{cases}$$

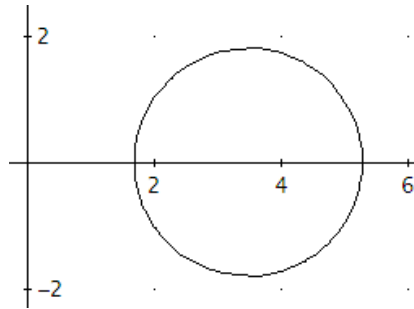
Obviamente la asíntota es el eje de ordenadas ( $x=0$ )

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \text{tg } t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \cos t \text{sent} \\ y' = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \boxed{\pi u^2}$$

109.- Hallar la superficie de revolución engendrada al rotar la curva  $y^2 = x - (3 - x)^2$  alrededor del eje de abscisas.

*Solución*



$$y^2 = x - (3 - x)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$y = \pm \sqrt{x - (3 - x)^2} \Rightarrow y' = \mp \frac{1 - 2(3 - x)(-1)}{2\sqrt{x - (3 - x)^2}} = \mp \frac{7 - 2x}{2\sqrt{x - (3 - x)^2}}$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_a^b \left( \sqrt{x - (3 - x)^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{7 - 2x}{2\sqrt{x - (3 - x)^2}} \right)^2} dx \approx 40.84070174 \text{u}^2$$

110.- Dada la curva en coordenadas polares  $r = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ , se pide:

a) Período de la curva.

b) Dominio de  $r(\alpha)$ .

c) Longitud de la curva (para valores de  $\alpha$  dentro del dominio de la función).

*Solución*

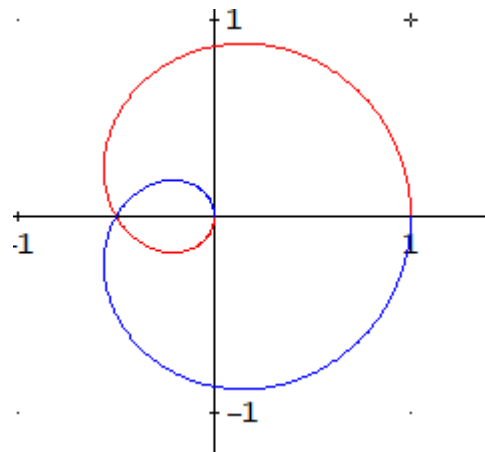
a)  $T = 3 \times 2\pi = 6\pi$

b) La curva se dibuja completa para  $\alpha \in [0, 6\pi] \Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in [0, 2\pi]$

Ha de ser  $r(\alpha) \geq 0$ , es decir:

$$r = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{2}, 6\pi\right]$$

c)



$$r(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow r'(\alpha) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

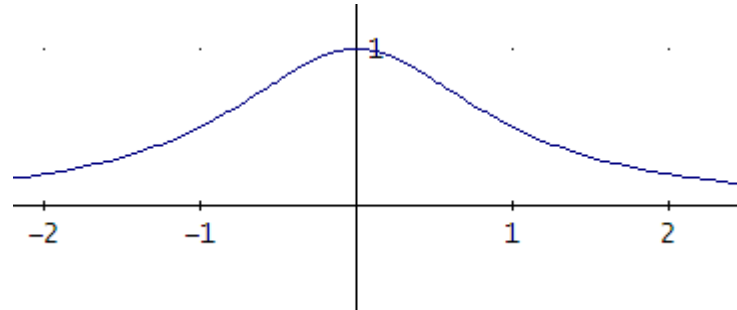
$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\alpha =$$

$$= \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2} \, d\alpha + \int_{9\pi/2}^{6\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)^2} \, d\alpha \approx$$

**6.68244661u**

111.- Hallar el área encerrada entre la curva  $\begin{cases} x = \frac{1}{\operatorname{tg} t} \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$  y su asíntota.

**Solución**



$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \infty \\ \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{sen}^2 t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow y = 0 \text{ es su asíntota; } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t = 1 \end{array} \right. \Rightarrow P = (0, 1)$$

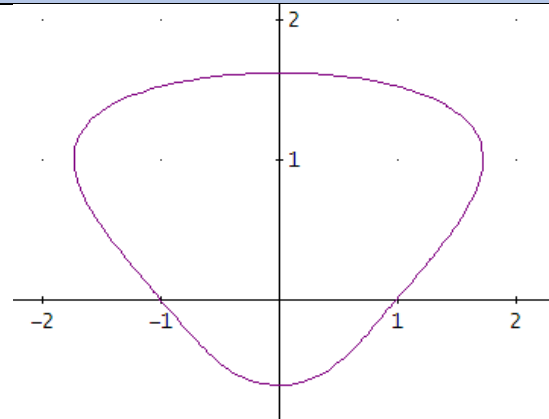
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\operatorname{tg} t} \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \\ y = 2 \operatorname{sen} t \cos t \end{array} \right.$$

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{t_0}^{t_1} |y(t) \cdot x'(t)| dt = 2 \int_0^{\pi/2} \left| \operatorname{sen}^2 t \cdot \left( -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \right) \right| dt = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi \text{ u}^2$$



112.- Hallar la superficie de revolución engendrada al rotar la curva  $x^2 = (y + 1)^2 - y^4$  alrededor del eje de ordenadas.

*Solución*



$$x^2 = (y + 1)^2 - y^4 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \sqrt{(y + 1)^2 - y^4} \Rightarrow x' = \frac{2(y + 1) - 4y^3}{\pm 2\sqrt{(y + 1)^2 - y^4}} = \frac{1 + y - 2y^3}{\pm \sqrt{(y + 1)^2 - y^4}}$$

$$S = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{(y + 1)^2 - y^4} \sqrt{1 + \left( \frac{1 + y - 2y^3}{\pm \sqrt{(y + 1)^2 - y^4}} \right)^2} dy \approx$$

**27.21509683u<sup>2</sup>**

113.- Dada la curva en coordenadas polares  $r = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , se pide:

a) Período de la curva.

b) Dominio de  $r(\alpha)$ .

c) Área encerrada por la curva y el eje OY (para valores de  $\alpha$  dentro del dominio de la función).

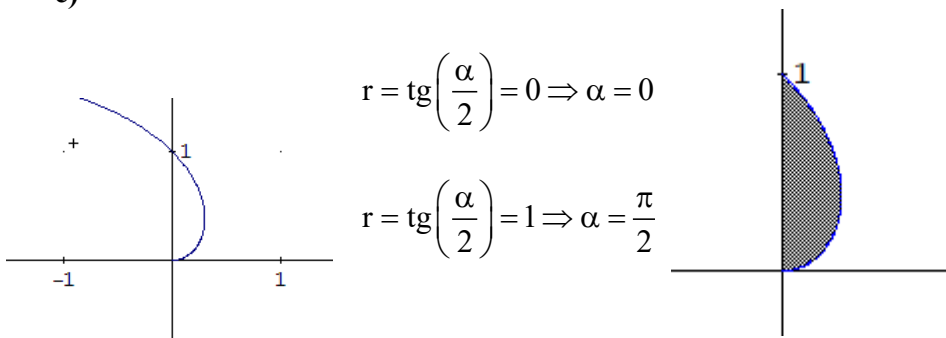
**Solución**

a)  $T = 2 \times \pi = 2\pi$

b) La curva se dibuja completa para  $\alpha \in [0, 2\pi] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in [0, \pi]$

Ha de ser  $r(\alpha) \geq 0$ , es decir:  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha \in [0, \pi]$

c)



$$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = (*)$$

Con el cambio  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t \Rightarrow \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \frac{d\alpha}{2} = dt \Rightarrow d\alpha = \frac{2dt}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2dt}{1 + t^2}$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow t = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow t = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$(*) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = [t - \operatorname{arctg}t]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

114.- Hallar el volumen engendrado al girar el área encerrada entre la curva

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases} \text{ y su asíntota alrededor de dicha asíntota.}$$

**Solución**

Buscamos su asíntota

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \cos^2 t = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \pm \infty \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

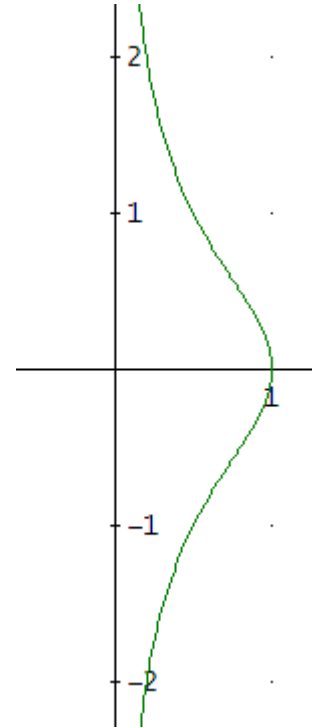
Al girar alrededor del eje Y

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} (x(t))^2 y'(t) dt$$

$$y(t) = \operatorname{tg} t \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} (x(t))^2 y'(t) dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^2 \frac{1}{\cos^2 t} dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

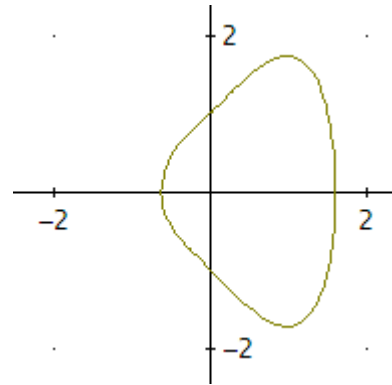
$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{\pi}{2} \left[ t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \mathbf{u^3}$$



**115.- Hallar la longitud de la curva  $y^2 = (x + 1)^2 - x^4$ .**

**Solución:**

$$y^2 = (x + 1)^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$$y = \sqrt{(x + 1)^2 - x^4} \Rightarrow y' = \frac{2(x + 1) - 4x^3}{\pm 2\sqrt{(x + 1)^2 - x^4}} = \frac{1 + x - 2x^3}{\pm \sqrt{(x + 1)^2 - x^4}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{1 + \left( \frac{1 + x - 2x^3}{\pm \sqrt{(x + 1)^2 - x^4}} \right)^2} dx \approx 4.498824500 \text{ u}$$

Hay que multiplicar por 2 para obtener la longitud total de la curva, pues el resultado anterior se refiere a la parte positiva ( $y \geq 0$ ):

$$L = 2 (4.498824500) = 8.997649000 \text{ u}$$

116- Determinar la curva que pasa por el punto  $(e, 2)$  y cuya pendiente en cada punto  $(x,y)$ , tal que  $x > 0$ , es  $\ln \sqrt{x}$

*Solución*

$$y = \int \ln \sqrt{x} dx = \frac{x}{2} (\ln(x) - 1) + C$$

Obligamos a que la curva pase por el punto  $(e, 2)$ :

$$2 = \frac{e}{2} (\ln(e) - 1) + C \Rightarrow C = 2$$

Luego, la curva pedida es:

$$y = \frac{x}{2} (\ln(x) - 1) + 2$$

**117.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:**

a)  $F(x) = \int_3^{\ln x} \cos t \, dt .$

b)  $G(x) = \int_{\cos x}^{\ln x} \cos x \, \text{sen } t \, dt .$

**Solución:**

a)

Sea  $G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$

Consideramos la función continua en  $\mathbb{R}$ :  $f(t) = \cos t$  y  $g(x) = \ln x$  una función derivable. Entonces:

$$F(x) = \int_2^{\ln x} \cos t \, dt = \int_a^{g(x)} f(t) \, dt = G(g(x))$$

Derivando:

$$F'(x) = G'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = f(\ln x) \frac{1}{x} = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

b)  $G(x) = \cos x \int_{\cos x}^{\ln x} \text{sen } t \, dt \Rightarrow$

Sea  $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$

Consideramos la función continua en  $\mathbb{R}$ :  $f(t) = \text{sen } t$  y  $g_1(x) = \ln x$ ;  $g_2(x) = \cos x$  funciones derivables.

Entonces:  $G(x) = \cos x \int_{\cos x}^{\ln x} \text{sen } t \, dt = \cos x \left( \int_{\cos x}^a \text{sen } t \, dt + \int_a^{\ln x} \text{sen } t \, dt \right) = \cos x \left( \int_a^{\ln x} \text{sen } t \, dt - \int_a^{\cos x} \text{sen } t \, dt \right) =$   
 $= \cos x \left( \int_a^{g_2(x)} f(t) \, dt - \int_a^{g_1(x)} f(t) \, dt \right) = \cos x (F(g_2(x)) - F(g_1(x)))$

Derivando:

$$G'(x) = \cos x (F'(g_2(x))g_2'(x) - F'(g_1(x))) - \text{sen } x (F(g_2(x)) - F(g_1(x))) =$$

$$= \cos x \left( f(g_2(x)) \frac{1}{x} - f(g_1(x)) \text{sen } x \right) - \text{sen } x (F(g_2(x)) - F(g_1(x))) =$$

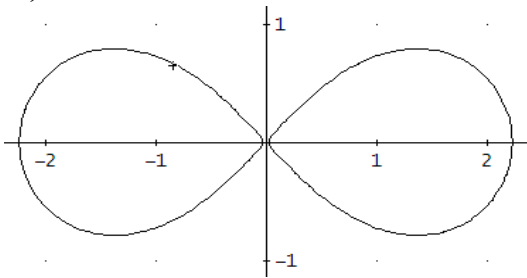
$$G'(x) = \cos x \left[ \text{sen}(\ln x) \frac{1}{x} + \text{sen}(\cos x) \text{sen } x \right] - \text{sen } x \int_{\cos x}^{\ln x} \text{sen } t \, dt .$$

118.- Calcular:

- a) La longitud de la curva en polares  $r^2 = 5 \cos(2\alpha)$
- b) El área encerrada por uno de los bucles de la curva anterior.
- c) El área interior común a la curva anterior y a  $r^2 = 5 \sin(2\alpha)$ .

Solución:

a)



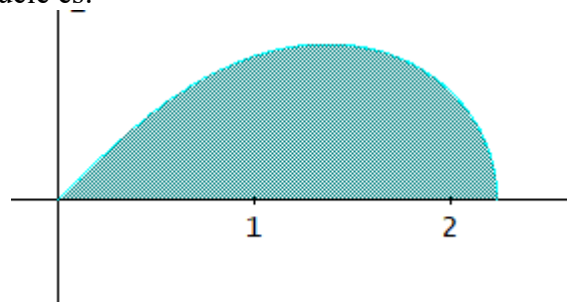
$$r^2 = 5 \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{5 \cos(2\alpha)} \Rightarrow r' = -\frac{5 \sin(2\alpha)}{\sqrt{5 \cos(2\alpha)}}$$

$$L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{5 \cos(2\alpha) + \left(-\frac{5 \sin(2\alpha)}{\sqrt{5 \cos(2\alpha)}}\right)^2} d\alpha = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\frac{5}{\cos(2\alpha)}} d\alpha \approx$$

**11.72536142** unidades lineales.

b) El área de la mitad del bucle es:

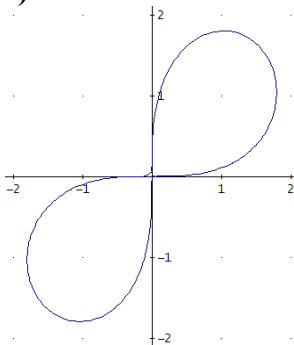


$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 5 \cos(2\alpha) d\alpha = \frac{5}{4} [\sin(2\alpha)]_0^{\pi/4} = \frac{5}{4}$$

Luego, el área pedida es:

$$2A = 2 \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

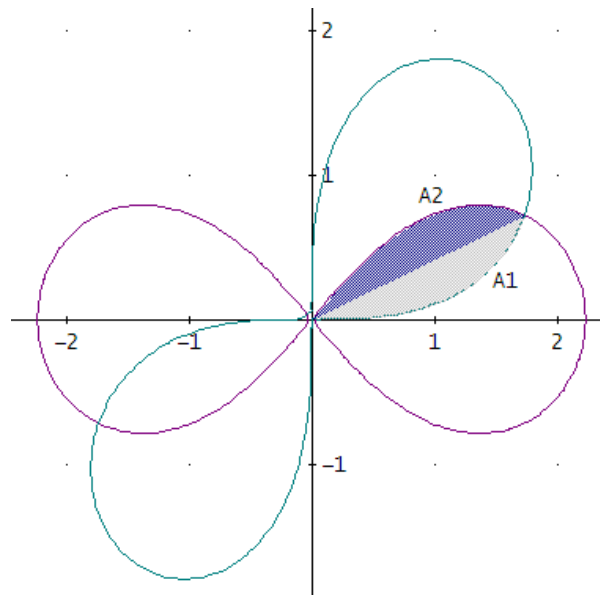
c)



$$r^2 = 5 \sin(2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$r^2 = 5 \cos(2\alpha) = 5 \sin(2\alpha) \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{8} \\ \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

El área correspondiente al primer cuadrante es suma de dos áreas  $A_1$  y  $A_2$ :



$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} 5 \operatorname{sen}(2\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\pi/8}^{\pi/4} 5 \cos(2\alpha) d\alpha =$$

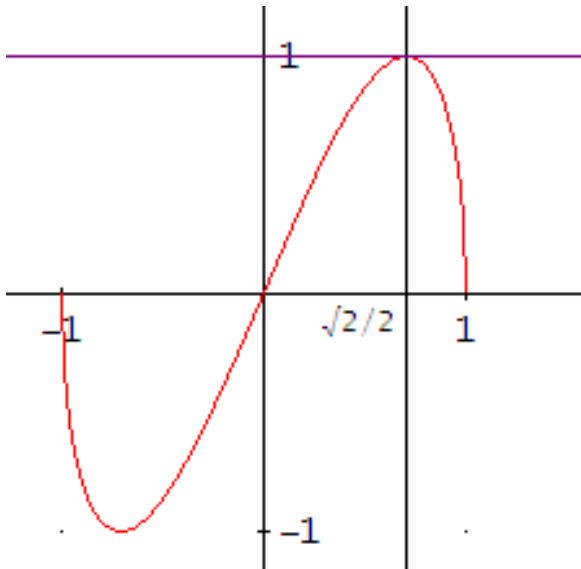
$$= \frac{5}{4} [-\cos(2\alpha)]_0^{\pi/8} + \frac{5}{4} [\operatorname{sen}(2\alpha)]_{\pi/8}^{\pi/4} = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Para obtener el área total interior a ambas curvas hemos de multiplicar por 2:

$$2 \left( \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4} \right) = \boxed{5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}} \text{ unidades cuadradas.}$$

**119.- Dada la función  $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ , calcular el volumen engendrado al girar la curva alrededor del eje de ordenadas.**

**Solución:**



$$V_{OY} = \pi \int_{y_1}^{y_2} [x(y)]^2 dy$$

Consideramos el arco de curva del primer cuadrante y posteriormente multiplicaremos por 2 el resultado.

Hemos de calcular para qué valor de x esta función alcanza el máximo:

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo en la función, se obtiene la imagen:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

El volumen será la resta de los volúmenes siguientes:

El generado al girar la curva desde  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  hasta  $x = 1$  menos el volumen obtenido cuando la curva gira desde  $x = 0$  hasta  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Los valores entre los que varía la “y” son los mismos en ambos casos, no así la expresión para “x” en cada uno de los dos tramos de curva.

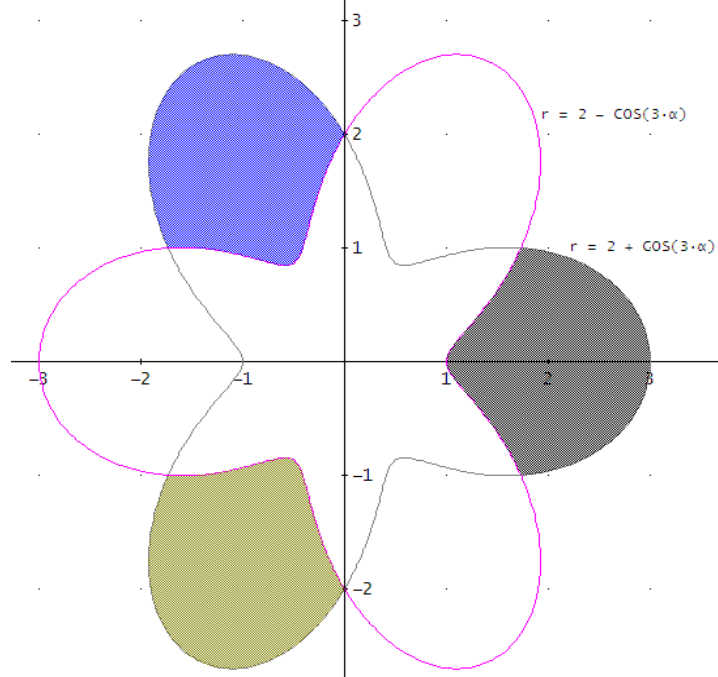
$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} = y \Rightarrow 4x^2(1-x^2) = y^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 \pm \sqrt{1-y^2})}$$

$$\begin{aligned} V_{OY} &= \pi \int_{y_1}^{y_2} [x(y)]^2 dy = \pi \int_0^1 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 + \sqrt{1-y^2})} \right]^2 dy - \pi \int_0^1 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 - \sqrt{1-y^2})} \right]^2 dy = \\ &= \pi \left( \frac{4 + \pi}{8} \right) - \pi \left( \frac{4 - \pi}{8} \right) = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Como se indicaba más arriba, hemos de multiplicar por 2:

$$2 \left( \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2} \text{ unidades cúbicas.}$$

120.- Hallar el área sombreada de la figura que es simultáneamente exterior a la curva en polares  $r = 2 + \cos(3\alpha)$  e interior a  $r = 2 - \cos(3\alpha)$ .



**Solución:**

Resolvemos la intersección de las dos curvas

$$2 + \cos(3 \cdot \alpha) = 2 - \cos(3 \cdot \alpha)$$

Obteniendo

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} \vee \alpha = \frac{\pi}{6} \vee \alpha = \frac{\pi}{2}$$

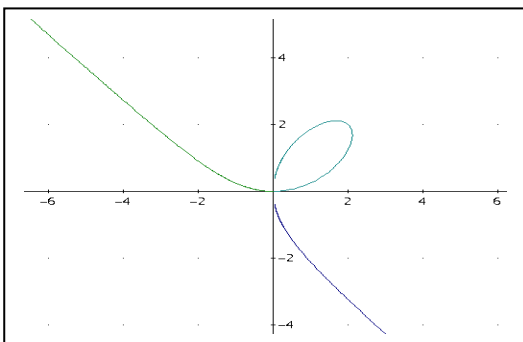
Si calculamos la región correspondiente al primer cuadrante:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left( (f_1(\theta))^2 - (f_2(\theta))^2 \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( (2 + \cos(3\alpha))^2 - (2 - \cos(3\alpha))^2 \right) d\alpha = \frac{4}{3}$$

El área total será 6 veces:  $8\text{u}^2$

121.- Las ecuaciones paramétricas  $\begin{cases} x = \frac{4t}{1+t^3} \\ y = \frac{4t^2}{1+t^3} \end{cases}$  describen la curva denominada Folium de Descartes, se pide:

- El intervalo de  $t$  para el que las anteriores ecuaciones describen el lazo.
- La longitud del lazo.
- La superficie de revolución engendrada al girar el lazo alrededor del eje de abscisas.
- El volumen engendrado al girar el lazo alrededor del eje de abscisas.



**Solución:**

a) El intervalo de  $t$  para el que las ecuaciones describen el lazo son los valores de  $t$  para los que  $x$  e  $y$  pasan por el origen, luego  $t \in [0, \infty)$  pues en  $t=0$ ,  $x$  e  $y$  valen 0 y

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t}{1+t^3} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2}{1+t^3} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

b) La longitud del lazo viene dada por

$$L = \int_0^{\infty} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{4t}{1+t^3} \\ y(t) &= \frac{4t^2}{1+t^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x'(t) &= \frac{4(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y'(t) &= \frac{4t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \end{aligned} \right\}; L = \int_0^{\infty} \sqrt{\left(\frac{4(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{4t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}\right)^2} dt \approx 6,55665 \text{ u}$$

c) La superficie de revolución engendrada al girar el lazo alrededor del eje de abscisas viene dada por  $S_L = \int_0^{\infty} 2\pi y \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ , luego

$$S_L = \int_0^{\infty} 2\pi \frac{4t^2}{1+t^3} \sqrt{\left(\frac{4(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{4t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}\right)^2} dt \approx 42,88384 \text{ u}^2$$

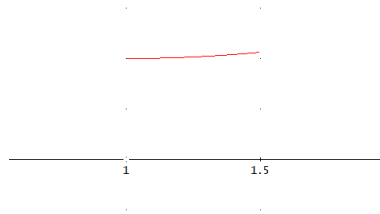
d) El volumen engendrado al girar el lazo alrededor del eje de abscisas viene dado por:

$$V = \int_0^{\infty} \pi [y(t)]^2 x'(t) dt = \int_0^{\infty} \pi \left[\frac{4t^2}{1+t^3}\right]^2 \frac{4(1-2t^3)}{(t^3+1)^2} dt \approx 18,009185 \text{ u}^3$$

- 122.- Hallar la longitud de las siguientes curvas:  
 a) Arco de la parábola  $y=x^2-2x+5$  entre  $x=1$  y  $x=3/2$ .  
 b)  $x(t)=2\cos t$ ;  $y(t)=2\sin t$ .  
 c)  $r = \text{sen}^3(\alpha / 3)$ .

Solución:

a)

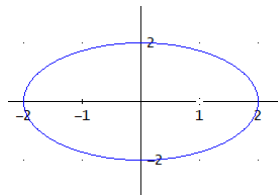


$$L = \int_1^{3/2} \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_1^{3/2} \sqrt{1+(2x-2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+(\text{senht})^2} \cosh t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ t + \frac{\text{senh}(2t)}{2} \right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{4} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}) \text{ u}$$

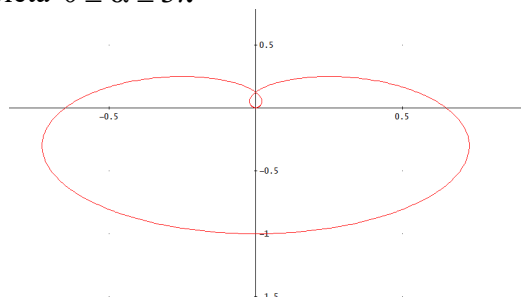
$$f(x) = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 = \text{senht} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 3/2 \Rightarrow \text{senht} = 1 \Rightarrow t = \ln(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

b)



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\text{sen}t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 2 \int_0^{2\pi} dt = 4\pi \text{ u}$$

c) Para dibujar la curva completa  $0 \leq \alpha \leq 3\pi$



$$r = \text{sen}^3(\alpha / 3) \Rightarrow r^2 = \text{sen}^6(\alpha / 3)$$

$$r' = \frac{d}{d\alpha} \text{sen}^3(\alpha / 3) \cos(\alpha / 3) = \frac{1}{3} \text{sen}^2(\alpha / 3) \cos(\alpha / 3) \Rightarrow (r')^2 = \text{sen}^4(\alpha / 3) \cos^2(\alpha / 3)$$

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\alpha = \int_0^{3\pi} \sqrt{\text{sen}^6(\alpha / 3) + \text{sen}^4(\alpha / 3) \cos^2(\alpha / 3)} d\alpha = \int_0^{3\pi} \text{sen}^2(\alpha / 3) d\alpha =$$

$$= \int_0^{3\pi} \frac{1 - \cos(2\alpha / 3)}{2} d\alpha = \frac{1}{2} \left[ \alpha - \frac{3}{2} \text{sen}(2\alpha / 3) \right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2} \text{ u}$$

**123.- Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje OX, del arco de la curva  $y=e^{-x}$  para  $x>0$ .**

**Solución:**

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-x} \sqrt{1+(-e^{-x})^2} dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}} dx = (*)$$

$$\text{Con el cambio } 1+e^{-2x} = t^2 \Rightarrow -2e^{-2x} dx = 2t dt \Rightarrow dx = -\frac{t}{t^2-1} dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$(*) = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^1 \sqrt{t^2-1} \cdot t \cdot \left(-\frac{t}{t^2-1}\right) dt = -2\pi \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}} dt = (**)$$

$$\text{Por partes: } \begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = dt \Rightarrow v = \sqrt{t^2-1} \end{cases}$$

$$(**) = -2\pi \left( t\sqrt{t^2-1} \Big|_{\sqrt{2}}^1 - \int_{\sqrt{2}}^1 \sqrt{t^2-1} dt \right) = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^1 \sqrt{t^2-1} dt = (***)$$

$$\text{Otro cambio de variable: } t = \text{ch}z \Rightarrow dt = \text{sh}z dz \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \Rightarrow z = \arg \text{ch} \sqrt{2} = \ln(1+\sqrt{2}) \\ t = 1 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

$$(***) = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi \int_{\ln(1+\sqrt{2})}^0 \text{sh}^2 z dz = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi \int_{\ln(1+\sqrt{2})}^0 \frac{\text{ch}2z-1}{2} dz = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi \left[ \frac{\text{sh}2z}{4} - \frac{z}{2} \right]_{\ln(1+\sqrt{2})}^0 =$$

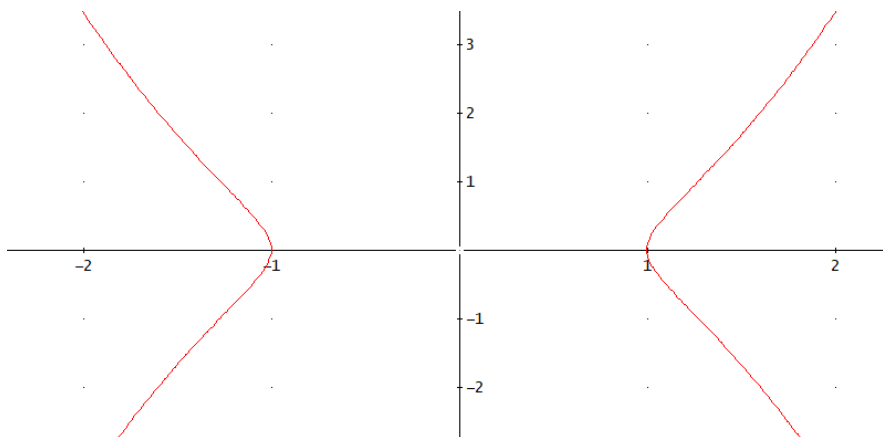
$$= 2\pi\sqrt{2} - 2\pi \left[ \frac{\text{sh}2z}{4} - \frac{z}{2} \right]_{\ln(1+\sqrt{2})}^0 = 2\pi\sqrt{2} - 2\pi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} \right) =$$

124.- Hallar la superficie de revolución engendrada al rotar la curva  $y^2 = x^4 - x^2$  alrededor del eje de abscisas.

**Solución**

Dada la curva en implícitas observamos que el dominio es:  $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$ , ya que

$$y = \pm x\sqrt{x^2 - 1}$$



Calculamos los puntos de intersección con el eje de abscisas

$$\text{Es decir, resolvemos } x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

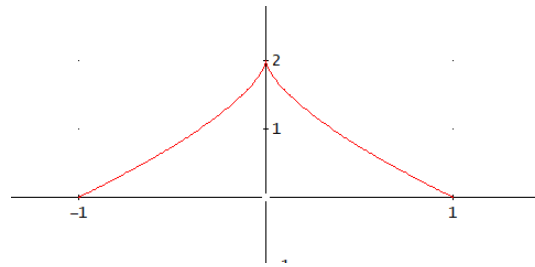
La superficie pedida viene dada por:  $S_L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ , y teniendo en cuenta la simetría:

$$S_L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \cdot 2 \cdot \pi \int_1^\infty \sqrt{x^4 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)} dx = \infty$$

125.- Hallar volumen del sólido generado por la curva de ecuación  $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = 2\text{sen}^2 t \end{cases}$  al girar alrededor del eje de abscisas.

**Solución:**

Buscamos los puntos de intersección con los ejes



$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t = 1 \\ y(t) = 2\text{sen}^2 t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} x(t) = \cos^3 t = -1 \\ y(t) = 2\text{sen}^2 t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \pi$$

La curva en el primer cuadrante se obtiene para  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  y completa para  $t \in [0, \pi]$ , por tanto:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = 2\text{sen}^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -3\cos^2 t \text{sen} t \\ y'(t) = 4\text{sen} t \cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) x'(t) dt = \pi \int_{\pi}^0 (2\text{sen}^2 t)^2 (-3\cos^2 t \text{sen} t) dt = 12\pi \int_0^{\pi} \text{sen}^5 t \cos^2 t dt = \\ &= 12\pi 2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^5 t \cos^2 t dt = 12\pi \beta(3, 3/2) = 12\pi \frac{\Gamma(3)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3+3/2)} = 12\pi \frac{16}{105} \frac{64\pi}{35} \mathbf{u^3} \end{aligned}$$

**Soluciones de los ejercicios propuestos:**

1.- Calcular, si son convergentes, las integrales:

a)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{5-2x} dx$       b)  $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx$  con  $a > 0$ .

**Solución:** a)  $e^{5/4}$       b)  $\frac{\Gamma(p)}{a^p}$

2.- Calcular  $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

**Solución:**  $-4$

3.- Hallar p y q para que  $2 \int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^3 t dt = \beta(p, q)$  y calcular  $\int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^3 t dt$ .

**Solución:**  $1/24$

4.- Lo mismo para  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^6 t dt$

**Solución:**  $\frac{3\pi}{512}$

5.- Determínese si las integrales siguientes convergen o divergen:

a)  $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$     b)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$     c)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$     d)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x}$     e)  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx$

**Solución:** a)  $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$  (diverge)    b)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  (diverge)    c)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$  (converge)  
d)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x}$  (converge)    e)  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx$  (diverge)

6.- Hallar el área común al círculo  $\rho_1 = 3 \cos \alpha$  y a la cardioide  $\rho_2 = 1 + \cos \alpha$ .

**Solución:**  $5 \frac{\pi}{4}$

7.- La curva  $y^2 = 2x e^{-2x}$  gira alrededor de su asíntota. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

**Solución:**  $\frac{\pi}{2}$

## Convergencia

Aproximación de los términos de una sucesión hacia una función (o número) en algún sentido que se pueda precisar.

- Una integral impropia es **convergente** si existe y su valor es un número real.

## Integral definida

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y positiva, entonces la **integral definida** es  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  siendo  $F(x)$  una función primitiva cualquiera de  $f(x)$ .

## Área de una curva en coordenadas polares

Sea  $r = f(\theta)$  la ecuación de una curva en coordenadas polares, siendo  $f(\theta)$  continua en  $[\theta_1, \theta_2]$ . El **área** del sector limitado por la curva  $r = f(\theta)$  y los radios vectores  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$  es:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

## Área de una figura plana

- Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $[a, b]$ . El **área** de la región del plano determinada por  $f(x)$ , el eje OX, y las abscisas  $x=a$ ,  $x=b$  es  $\int_a^b |f(x)| dx$
- Si la curva viene dada en paramétricas  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)| dt$
- Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables en  $[a, b]$ , el **área** de la región del plano comprendida entre sus gráficas es  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

## Integral impropia

La integral  $\int_a^b f(x)dx$  es **impropia** si ocurre al menos una de las dos condiciones:

- a, b, o ambos son infinitos
- La función  $f(x)$  no está acotada en el intervalo  $[a,b]$

## Volúmenes de cuerpos de revolución

Se llama **sólido de revolución** al generado por la rotación de una región del plano alrededor de un eje situado en él. Si la región esta definida por  $y=f(x)$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  y  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$  el **volumen** es:

a)  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$  alrededor del eje OX.

b)  $V = \pi \int_c^d x^2 dy$  alrededor del eje OY.

c) Si la generatriz es una curva cerrada,  $V = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx$ .

d) Si la curva viene dada en paramétricas  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t) x'(t) dt$

e) Si la curva viene dada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$ , al girar alrededor del eje polar se obtiene:  $V = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \sin \theta d\theta$

## Longitud de un arco de curva

Sea  $y=f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y con derivada continua en  $(a, b)$ .

La longitud de la curva  $y=f(x)$  entre  $x=a$  y  $x=b$ , es :  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ .

- Si la curva viene dada en paramétricas  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

- Si la curva viene dada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$ , entonces:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

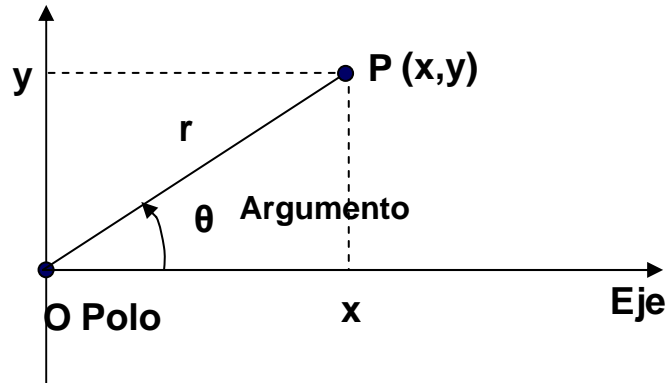
- Para una curva en el espacio definida por  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , la longitud

de una arco de curva es:  $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$

## Coordenadas polares

Sea O un punto fijo del plano, denominado “**polo**” y sea la semirrecta de origen O, denominada “**eje polar**”. Entonces cualquier punto del plano P, queda determinado por el par  $(r, \theta)$  siendo  $r$  la distancia euclídea del punto P al polo ( $r > 0$ ) y  $\theta$  el **argumento**, el ángulo formado por el eje polar y el segmento OP en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj).

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$



## Volumen por secciones

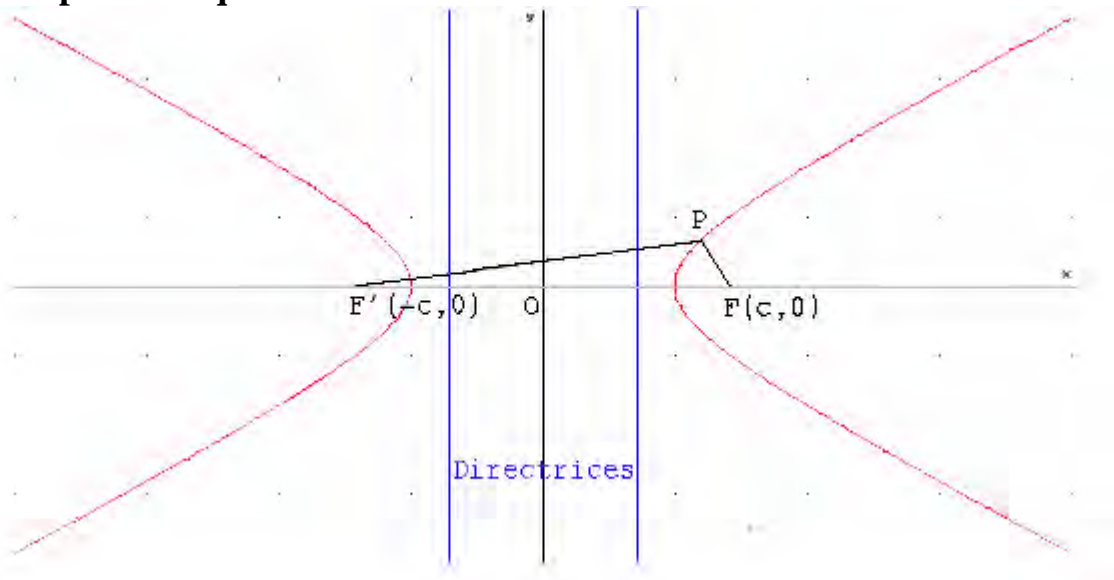
Dado un cuerpo, si se conoce la expresión del área  $A(x)$  de toda sección producida en ese cuerpo, por un plano perpendicular al eje  $OX$  en función de la abscisa  $x$  del punto donde el plano corta al eje, el **volumen** es:  $V = \int_a^b A(x)dx$ .

## Hipérbola

La diferencia de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola a los focos es igual a  $2a$ .

Sea la hipérbola de ecuación canónica  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , entonces:

- **Excentricidad:**  $e = \frac{c}{a} > 1$
- **Vértices:**  $A(a,0)$ ;  $A'(-a,0)$ .
- **Focos:**  $F(c,0)$ ;  $F'(-c,0)$ .
- **Directrices:**  $x = a^2/c$ ;  $x = -a^2/c$
- **Ejes de simetría:**  $x=0$ ;  $y=0$ ; eje focal:  $y=0$
- **Centro:**  $O(0,0)$  punto de intersección de los ejes de simetría
- **Distancia focal:**  $d(F,F')=2c$ .
- **Parámetro focal:**  $p = b^2/a$
- **Hipérbola equilátera:** cuando  $a=b$



## Asíntotas de una hipérbola

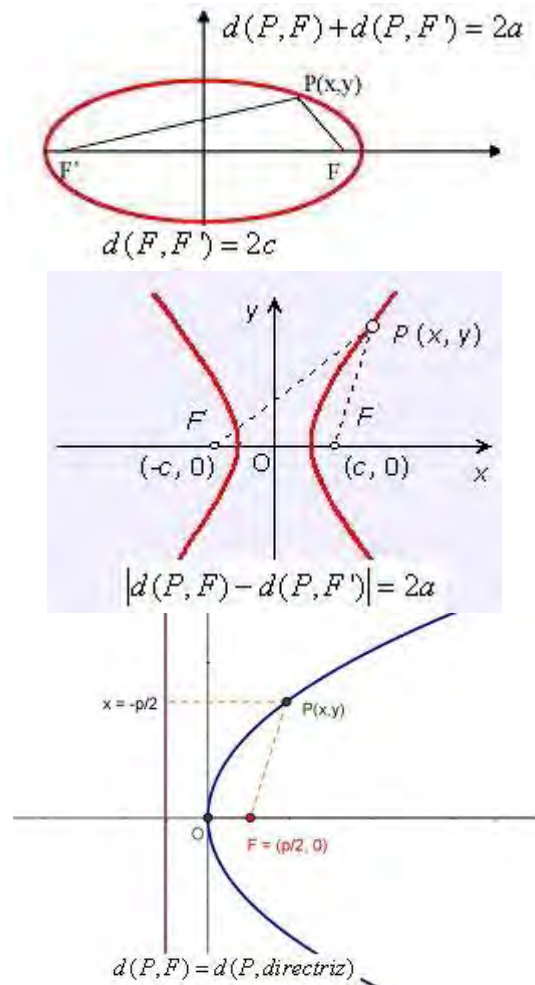
Las **asíntotas** de una hipérbola son rectas que pasan por el centro de la cónica y tienen de pendiente  $m$ , solución de la ecuación:  $a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0$ .

Este último resultado se obtiene de aplicar que, en general, las asíntotas oblicuas a una curva de ecuación  $y = f(x)$  tienen de pendiente  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

## Focos

**Focos** de una sección cónica son los puntos de contacto de su plano con las esferas inscritas en el cono y tangentes a dicho plano (el de la sección).

Relativo a una cónica es cada uno de los puntos fijos que determinan la cónica. Las cónicas con centro (elipse e hipérbola) tienen dos (a una distancia  $c$  del centro) y la parábola uno.



## Folium de Descartes Hoja de Descartes (1638)

### Área de una superficie de revolución

- Sea la curva  $y=f(x)$  siendo  $f(x)>0$  para todo  $x\in[a, b]$  y  $f'$  continua en  $[a, b]$ , el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva  $y=f(x)$  alrededor del eje OX entre los valores de abscisa a y b es:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

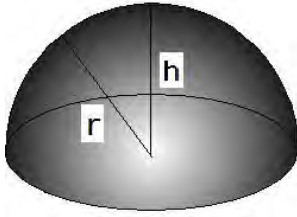
- Sea la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  donde las funciones x e y tienen derivada continua en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . El área de la superficie de revolución engendrada al girar, alrededor del eje OX, el arco de dicha curva entre los valores del parámetro  $t_0$  y  $t_1$  es:

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

- Si la curva está expresada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$ , y gira alrededor de su eje polar la superficie de revolución del arco de la curva entre los argumentos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  con  $\theta_0 < \theta_1$  es:

$$S = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \sin(\theta) \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

## Casquete esférico



**Casquete esférico:** parte de la superficie de la esfera, cortada por un plano que no pasa por su centro.

$$\text{Área} = 2\pi \cdot r \cdot h$$

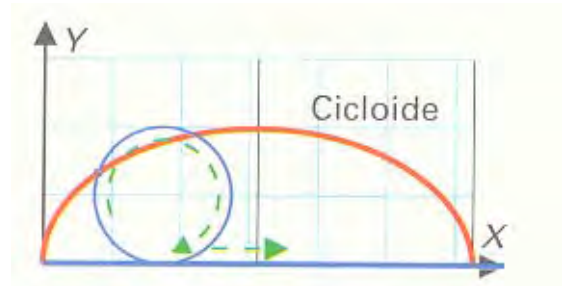
$$\text{Volumen} = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)$$

## Cicloide

Es el lugar descrito por un punto fijo P de una circunferencia que rueda sin deslizarse por una recta fija.

En coordenadas cartesianas, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = r ( t - \text{sent} t) \\ y = r ( 1 - \cos t) \end{cases}$$



Problema propuesto por Johan **BERNOULLI** (1696)

Entre todas las curvas que unen dos puntos del plano la curva de descenso más rápido (**braquistócrona**) es la cicloide. Un ejemplo de arco de cicloide son las pistas de salto de esquí.

Es **tautocrona**: si invertimos una cicloide y dejamos caer rodando dos canicas a diferente altura (sin rozamiento), las dos llegarán al punto más bajo al mismo tiempo.

Es **isócrona**: el período de un péndulo no varía cuando este oscila entre dos cicloides, siendo la trayectoria otra cicloide.

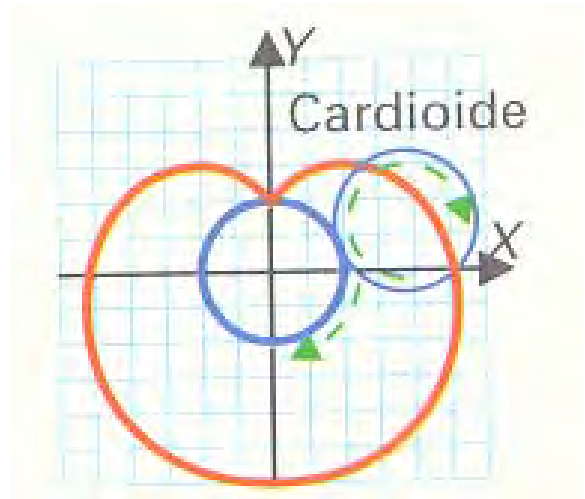
## Cardioide

Es el lugar descrito por un punto fijo P de una circunferencia que rueda sin deslizarse sobre otra circunferencia que tiene el mismo radio.

Las ecuaciones paramétricas, en coordenadas cartesianas, son:

$$\begin{cases} x = r (2\sin t - \sin 2t) \\ y = r (2\cos t - \cos 2t) \end{cases}$$

En coordenadas polares:  
 $\rho = a(1 + \cos \alpha) = 2a \cos^2(\alpha/2)$



## Pendiente

Tangente del ángulo formado por una línea o una superficie con el plano horizontal.

La derivada de una función  $f$  en un punto  $a$ ,  $f'(a)$ , representa la **pendiente** de la recta tangente a  $f$  en  $x=a$ .

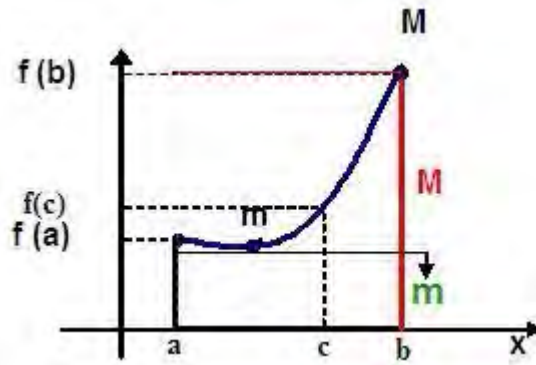
## Teorema del Valor Medio integral

Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , y  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , existe  $\mu \in [m, M]$  tal

$$\text{que } \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Si además  $f$  es continua en  $[a, b]$ , existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$



## Asíntotas de una función

**Verticales:** Si  $x \rightarrow a \Rightarrow y \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es una asíntota vertical}$$

(Sólo puede haber asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio)

**Horizontales:** Si  $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow b$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b \text{ es una asíntota horizontal}$$

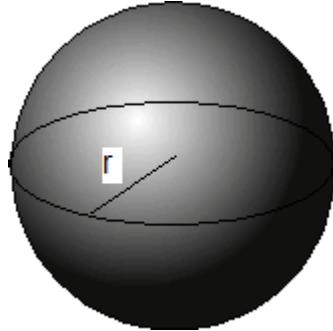
**Oblicuas:**  $y = mx + n$  es una asíntota oblicua, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right); \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Nota: las asíntotas nos informa de si la función está o no acotada.

## Esfera

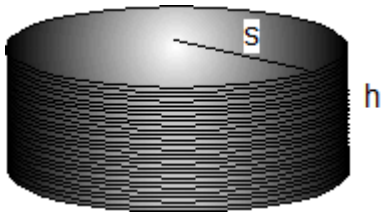
**Esfera:** sólido terminado por una superficie curva cuyos puntos equidistan todos de otro interior llamado centro.



$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

## Volumen del cilindro

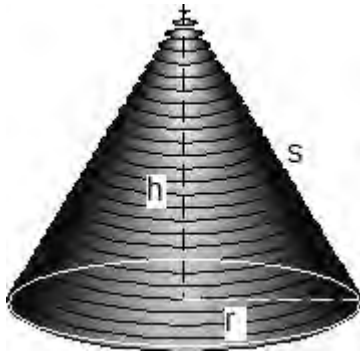


**Cilindro:** cuerpo limitado por una superficie cilíndrica cerrada y dos planos que la cortan.

$$\text{Volumen} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{Área lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h$$

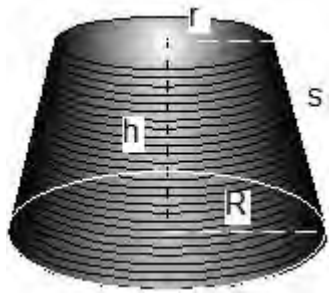
## Volumen del cono



**Cono:** sólido limitado por un plano que corta a una superficie cónica cerrada.

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{Área lateral} = \pi \cdot r \cdot s$$



### Volumen del tronco de cono

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi (r^2 + rR + R^2) \cdot h$$

$$\text{Área lateral} = \pi \cdot s \cdot (r + R)$$

## Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  donde el parámetro  $t$  recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

En el **plano**: siendo  $P(x_0, y_0)$  un punto cualquiera y  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  un vector director.

$$\text{Ecuaciones paramétricas de la recta: } \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

En el **espacio**: Siendo  $P=(p_1, p_2, p_3)$  un punto cualquiera y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  un vector director de la recta.

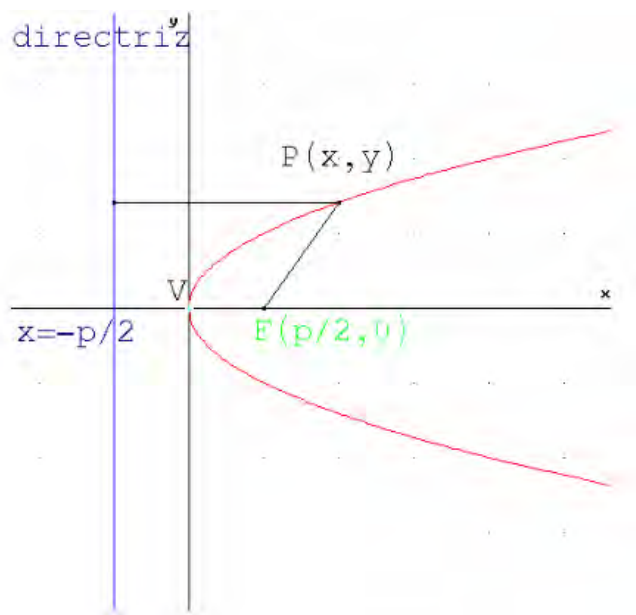
$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$$

## Parábola

**Parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo  $F$ , llamado **foco**, y una recta fija  $r$ , llamada **directriz**.

Sea la parábola de ecuación reducida  $y^2 = 2px$ , entonces:

- **Foco:**  $F(p/2, 0)$ .
- **Directriz:**  $x = -p/2$ .
- **Eje de simetría:** es la perpendicular del foco a la directriz  $y=0$
- **Vértice:**  $O(0,0)$  punto de intersección de la curva con el eje de simetría.
- **Parámetro:** es la distancia del foco a la directriz  $p$ .
- **Excentricidad:**  $e=1$



## **Triángulo Equilátero**

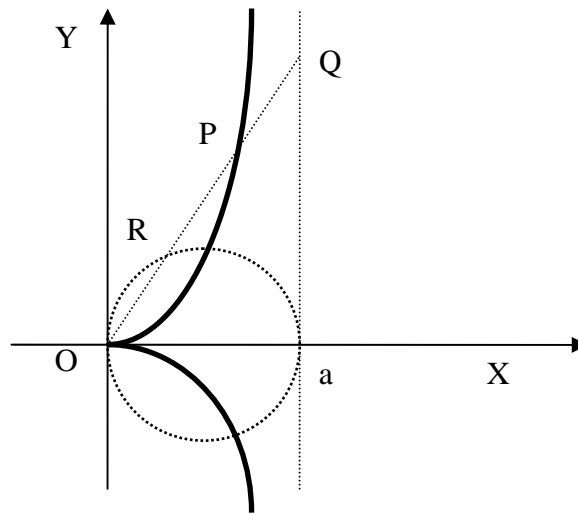
**Equilátero** si tiene los tres lados iguales.

## Cisoide de Diocles

Curva plana construida a partir de una circunferencia de radio  $a$ , un punto  $P$  que cumple que la distancia de  $P$  a  $Q$  es igual a la distancia de  $O$  a  $R$ . Con ella se puede resolver el problema de la duplicación del cubo.

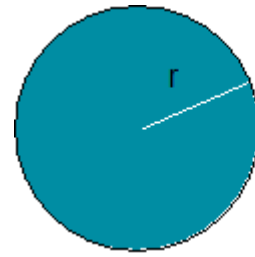
En coordenadas rectangulares:  $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$

En ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = 2a \operatorname{sen}^2 t \\ y = \frac{2a \operatorname{sen}^3 t}{\operatorname{cost}} \end{cases}$



## Circunferencia

**Circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una cantidad que se llama radio.



Para una circunferencia de centro  $C(a,b)$  y radio  $r$ , se tiene que:  $d(C,P)=r$  con  $P(x,y)$  punto genérico del plano

$$\text{obtenemos: } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$\text{Longitud}_{\text{Circunferencia}} = 2 \pi r$$

### **Dominio de definición o campo de existencia.**

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analítica de la función.

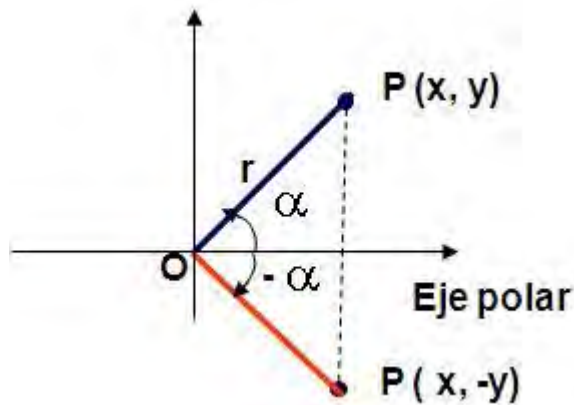
$$D = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tales que, existe } y = f(x) \}$$

## Simetrías de una curva en forma polar

Para una función  $r = r(\alpha)$  en forma polar:

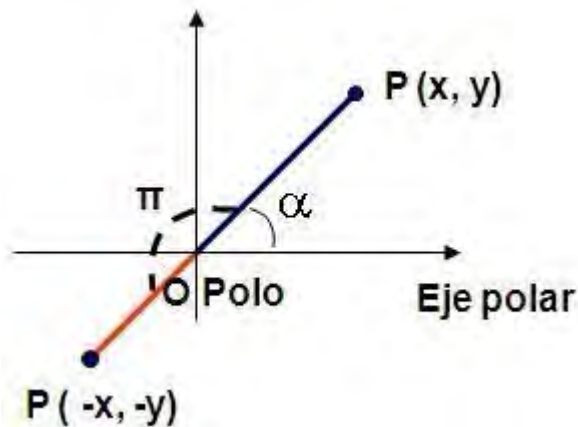
### Simetría respecto el eje polar:

Al sustituir  $\alpha$  por  $-\alpha$  queda lo mismo:  $r(\alpha) = r(-\alpha)$ :



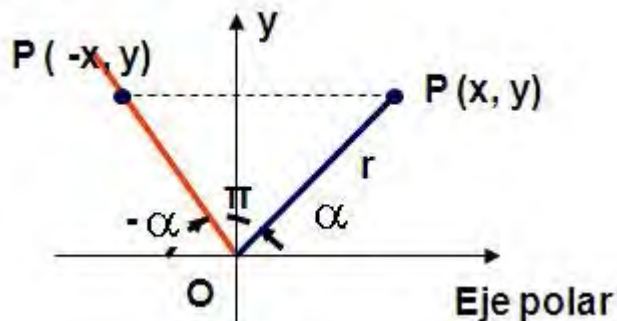
### Simetría respecto al polo:

Al sustituir  $\alpha$  por  $\alpha + \pi$  queda lo mismo:  $r(\alpha) = r(\alpha + \pi)$ :



### Simetría respecto el eje Y:

Al sustituir  $\alpha$  por  $\pi - \alpha$  queda lo mismo:  $r(\alpha) = r(\pi - \alpha)$ :



## Integrales en intervalos no acotados (Integral impropia de 1ª especie).

Los distintos tipos son: a)  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ , b)  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ , c)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

a) Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  función acotada e integrable en el intervalo  $[a, x]$  para todo  $x \geq a$ .

$$\text{Definimos } \int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^k f(x)dx$$

• Si éste límite existe, y es igual a un n° finito  $L$ , se dice que la integral  $\int_a^{\infty} f(x)dx = L$ , es **convergente**.

• Si tal límite es infinito la integral es **divergente**.

• Cuando no existe límite se dice que no existe valor de la integral o ésta es divergente por oscilación.

b) De la misma forma,  $f(x)$  es acotada e integrable en el intervalo  $[x, b]$  siendo  $b \in \mathbb{R}$ .

Se define:  $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^b f(x)dx$  En los casos en que, éste límite (sea finito, sea infinito o no exista), la integral será (convergente, divergente o b divergente por oscilación).

c) Se define  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$ . La integral del primer miembro se dice convergente, si existen y son finitas ambas integrales del segundo miembro. Se dice divergente si al menos una de ellas es no convergente.

**Integrales de funciones no acotadas.**  
**(Integral impropia de segunda especie).**

**a)** Sea  $f(x)$  una función definida en un intervalo  $(a,b]$ , integrable en todo intervalo  $[x,b]$  con  $a < x \leq b$  y no acotada en el límite inferior del intervalo de integración,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$

$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ ,  $I$  es **convergente**, **divergente** u oscilante si el límite es finito, infinito o no existe, respectivamente.

**b)** Análogamente se define la integral en intervalo de la forma  $[a,b)$ . Sea  $f(x)$  no acotada en el límite superior del intervalo de integración  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$

$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ ,  $I$  es **convergente**, **divergente** u oscilante si el límite es finito, infinito o no existe, respectivamente.

**c)** Si la función está definida en  $(a,b)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ , siendo integrable en todo intervalo contenido en  $(a,b)$  diremos que la integral  $I = \int_a^b f(x)dx$  es convergente cuando lo sean simultáneamente las integrales de  $f$  en los intervalos  $(a,c]$  y  $[c,b)$ .

**d)**  $f(x)$  no esta acotada en un punto  $c \in (a,b)$ .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

en caso de ser ambos límites finitos la integral del primer miembro es convergente, en otro caso la integral es divergente.

## Máximos locales.

- La función  $f$  tiene en el punto  $x=a$  un **máximo local o relativo** si existe un entorno  $(a-h, a+h)$  de  $a$  tal que para todo  $x \neq a$  del entorno se verifica:  
$$f(x) < f(a) \text{ resulta } f(x-h) < f(a) > f(x+h).$$

Si  $f'(a)=0$  y  $f''(a)<0$ , entonces  $(a, f(a))$  es un máximo local

También pueden existir **extremos** (máximos y mínimos) donde no es derivable la función.

- Se dice que  $f$  tiene un **máximo relativo** en un punto  $(x_0, y_0) \in A$  cuando  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y)$  perteneciente a un entorno de  $(x_0, y_0)$ .
- **Máximo Absoluto** es el mayor de los máximos locales o relativos.

## Eje

**Eje** es la recta del plano o del espacio que sirve de referencia a los puntos de ese plano o de ese espacio o bien a una figura o a una transformación.

La elipse y la hipérbola tienen dos **ejes de simetría**; la parábola solamente uno que pasa por su vértice.

**Eje de coordenadas:** cada una de las rectas mediante las que se define un sistema de coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.

**Eje de abscisas:** eje de coordenadas, generalmente horizontal, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina X.

**Eje de ordenadas:** eje de coordenadas, generalmente vertical, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina Y.

**Eje focal:** en una cónica es el eje de simetría que contiene a los focos.

- **Eje mayor** en la elipse corresponde al eje focal
- **Eje menor** en la elipse corresponde al eje no focal

**Eje polar** en coordenadas cartesianas polares es la semirrecta que parte del polo.

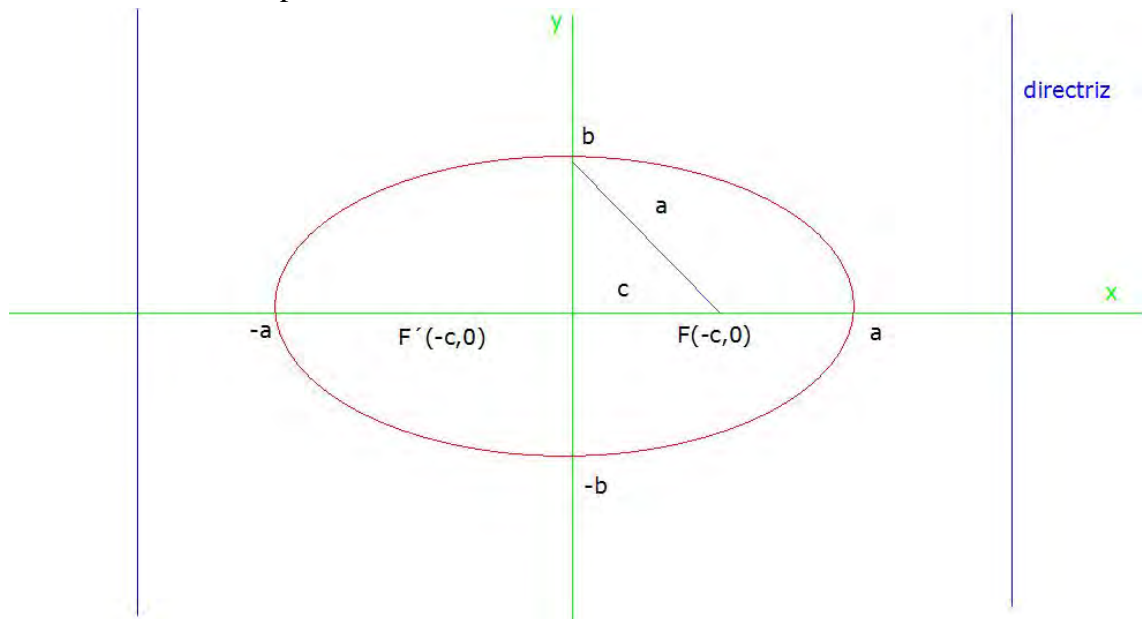
**Eje radical** de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias.

## Elipse

La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual al doble de su semieje mayor.

Sea la **elipse** de ecuación reducida  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , entonces:

- **Excentricidad:**  $e = \frac{c}{a} < 1$
- **Vértices:**  $A(a,0)$ ;  $A'(-a,0)$ ;  $B(0,b)$ ;  $B'(0,-b)$ .
- **Semieje mayor:**  $a$ ; **semieje menor:**  $b$ .
- **Focos:**  $F(c,0)$ ;  $F'(-c,0)$ .
- **Directrices:**  $x = \pm \frac{a^2}{c}$
- **Ejes de simetría:**  $x=0$ ;  $y=0$ ; eje focal o eje mayor:  $y=0$ .
- **Centro:**  $O(0,0)$  punto de intersección de los ejes de simetría.
- **Distancia focal:**  $d(F,F')=2c$ .
- **Parámetro focal:**  $p = b^2 / a$



## Divergencia

Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.

- Una integral impropia es **divergente** si existe y su valor es infinito.
- Sobre una función vectorial  $\vec{F} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad \text{DIVERGENCIA}$$

Físicamente, permite medir el flujo del campo a través de una superficie.

## Asíntotas en una curva plana

En este párrafo,  $t_0$  puede ser un número real ó  $\pm\infty$ .

a) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ , entonces: la recta  $x = a$  es **asíntota vertical**.

b) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$ , entonces: la recta  $y = b$  es **asíntota horizontal**.

c) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$

c<sub>1</sub>) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$ , la curva carece de asíntota y se dice que tiene una

**rama parabólica**.

c<sub>2</sub>) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m$

c<sub>21</sub>)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) = \pm\infty$ , entonces no hay asíntota; tiene una **rama parabólica**.

c<sub>22</sub>)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) = b$ , entonces la recta  $y = mx + b$  es **asíntota oblicua**.

## Lemniscata

Lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen que el producto de distancias a otros dos puntos fijos  $F(-f,0)$  y  $F'(f,0)$  vale el cuadrado de la semidistancia entre dichos puntos.

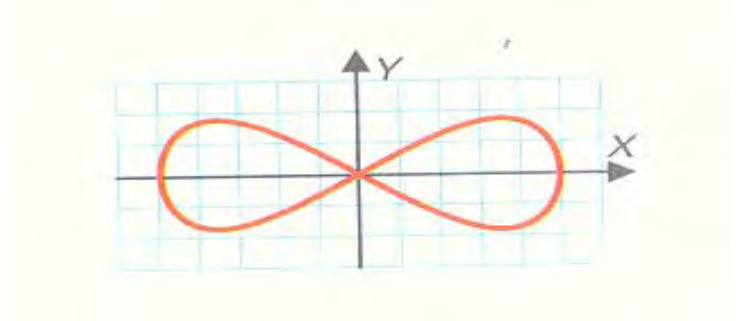
Es una curva en forma de lazo centrado en el origen.

La ecuación en coordenadas polares, es:

$$r^2 = k^2 \cos(2\alpha)$$

La ecuación implícita, en coordenadas cartesianas, es:

$$(x^2 + y^2)^2 = k^2 (x^2 - y^2)$$



## **Integrales Eulerianas**

### **Función gamma de Euler**

Sea  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p > 0$ . Sea  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$  **la función gamma de Euler**. Esta integral es convergente y recibe el nombre de **Integral Euleriana de 1ª especie**.

### **Función beta de Euler**

Sea  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p, q > 0$ . Sea  $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  **la función beta de Euler**. Esta integral es convergente y recibe el nombre de **Integral Euleriana de 2ª especie**.

## **Integrales Eulerianas**

### **Función gamma de Euler**

Sea  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p > 0$ . Sea  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$  **la función gamma de Euler**. Esta integral es convergente y recibe el nombre de **Integral Euleriana de 1ª especie**.

### **Función beta de Euler**

Sea  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p, q > 0$ . Sea  $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  **la función beta de Euler**. Esta integral es convergente y recibe el nombre de **Integral Euleriana de 2ª especie**.

### Periodicidad en una curva plana

Si  $x(t)$  e  $y(t)$  son funciones periódicas de períodos  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, la función vectorial  $\vec{F}(t) = (x(t), y(t))$  es también periódica de período  $p = \text{mínimo común múltiplo de } p_1 \text{ y } p_2$ , y sólo hará falta hacer variar  $t$  en un intervalo de amplitud  $p$  (es decir,  $t \in [a, a + p]$ ).

La gráfica será en este caso cerrada, siempre que  $x(t)$  e  $y(t)$  y sean funciones continuas.

La elección de  $a$  dependerá de consideraciones de simetría aplicables a la curva.

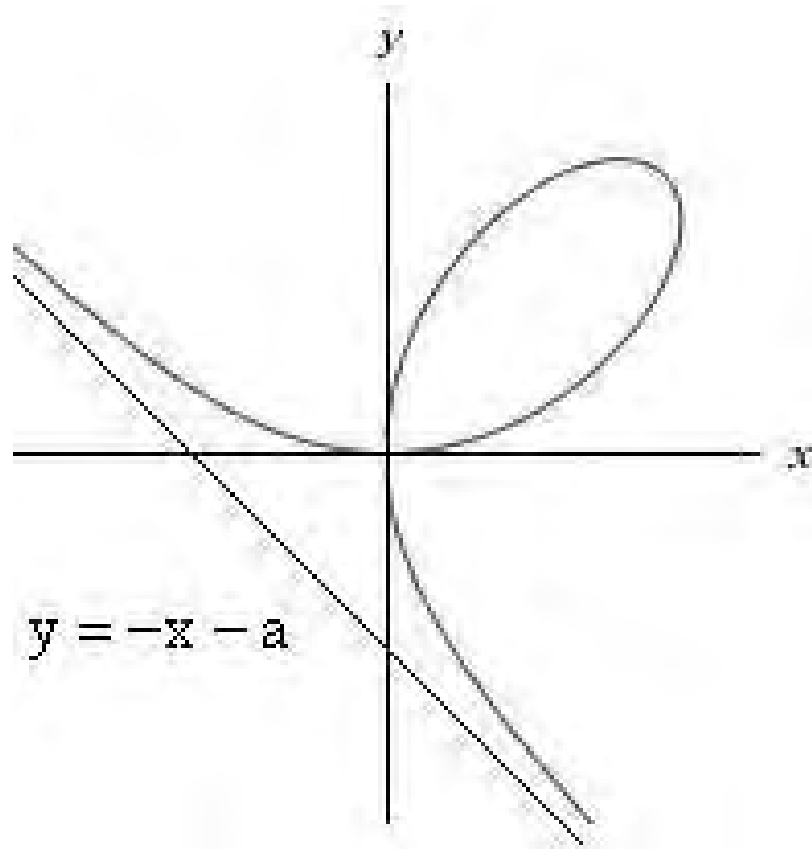
### Periodicidad de una función

Una función  $f(x)$  es **periódica**, de periodo  $T$  si existe  $T \neq 0$ , tal que,  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x$  perteneciente al dominio de definición.

(Sólo pueden ser periódicas las funciones cuya expresión analítica depende de las funciones  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$ ,  $\text{tg } x$ , etc.)

## Folium de Descartes

Hoja de Descartes (1638)



**Ecuaciones cartesianas:**

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ siendo } a \text{ una constante } a \in \mathfrak{R}$$

**Ecuaciones paramétricas:**

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \text{ siendo } a \text{ una constante } a \in \mathfrak{R}$$

**Ecuaciones polares:**

$$r = \frac{3a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \text{ siendo } a \text{ una constante } a \in \mathfrak{R}$$

Ecuación de la asíntota:

$$y = -x - a$$

### Derivada de una integral.

Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y una función derivable en  $x_0 \in (a, b)$ , entonces la función

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt \text{ es derivable en } x_0 \text{ y } F'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0)$$

Se generaliza de forma que  $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$  es derivable en  $x_0$ , siendo

$$F'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0) - f(h(x_0))h'(x_0).$$

---