

Cálculo Diferencial

1. Gráficas y modelos

Teoría: Ver páginas 4 y 5 del capítulo P del libro: *Preparación para el Cálculo* del libro “*Cálculo I*” de los autores Larson, R., Hostetler, R.P., y Edwards, B. Ediciones Pirámide del año 2002

En cada uno de los siguientes ejercicios estudiar si existe simetría respecto de los ejes o del origen y calcular las intersecciones con los ejes:

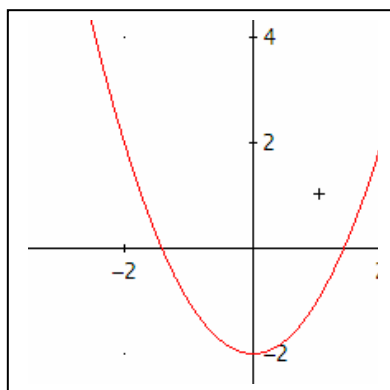
- | | | |
|-----------------------------|---------------|----------|
| 1. $y = x^2 - 2.$ | Apoyo teórico | Solución |
| 2. $xy = 4.$ | Apoyo teórico | Solución |
| 3. $y = 4 - \sqrt{x+3}.$ | Apoyo teórico | Solución |
| 4. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$ | Apoyo teórico | Solución |

Solución:

La función $y=f(x)$ es simétrica respecto el eje de ordenadas si $f(-x)=f(x)$

1. Es simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir, es una función par pues:

$$y = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2.$$



Cálculo de las intersecciones con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{los puntos de}$$

$$\text{intersección con el eje } x \text{ son } \begin{cases} (\sqrt{2}, 0) \\ (-\sqrt{2}, 0) \end{cases}$$

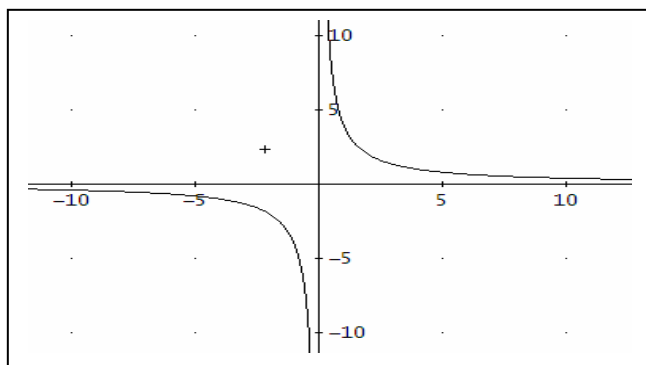
Cálculo de las intersecciones con el eje de ordenadas:

$$x = 0 \Rightarrow y = -2, \text{ luego hay un solo punto de intersección}$$

con el eje y que es $(0, -2)$.

La gráfica de una curva dada mediante ecuación en x e y es simétrica respecto el origen si al sustituir en ella x por $-x$ e y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

2. Es simétrica respecto del origen, es decir, es una función impar pues:



$$xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}, \text{ verificándose que}$$

$$\frac{4}{(-x)} = -\frac{4}{x} = -y$$

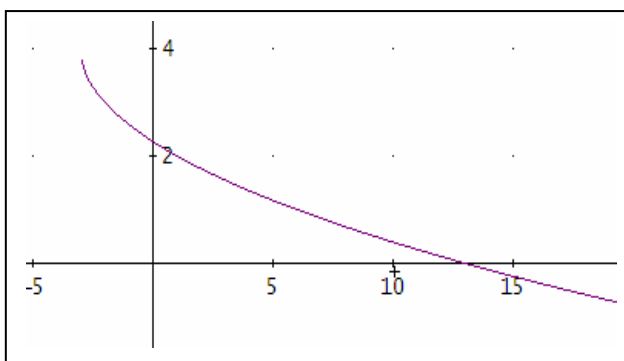
No corta al eje de abscisas pues $y \neq 0$ para cualquier valor de x .

Tampoco corta al eje de ordenada pues para $x = 0$, no está definido el cociente $\frac{4}{0}$

La función $y=f(x)$ es simétrica respecto el eje de ordenadas si $f(-x)=f(x)$

La función $y=f(x)$ es simétrica respecto el origen si $f(-x) = -f(x)$

3. No es simétrica ni respecto del eje de ordenadas (no es una función par), ni respecto del origen (no es una función impar) pues: $4 - \sqrt{(-x)+3} = 4 - \sqrt{-x+3} \neq y, -y$



Cálculo de la intersección con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow$$

$$4 = \sqrt{x+3} \Rightarrow 16 = x + 3 \Rightarrow x = 13,$$

luego hay un punto de intersección con el eje de abscisas que es (13, 0)

Cálculo de las intersecciones con el eje de ordenadas:

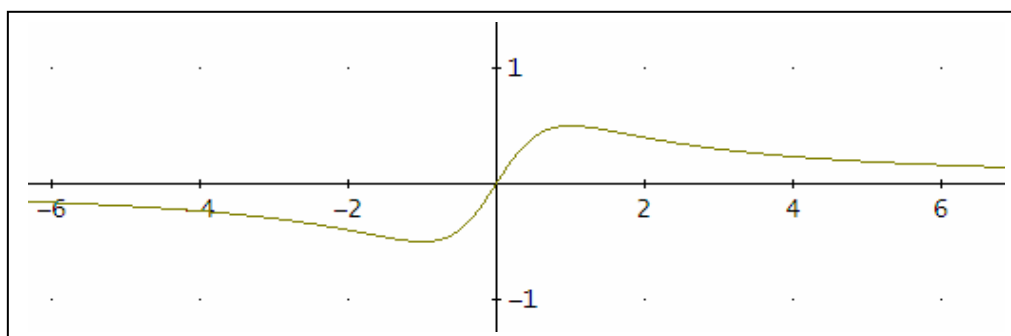
$$x = 0 \Rightarrow y = 4 - \sqrt{3},$$

luego hay un solo punto de intersección con el eje y que es $(0, 4 - \sqrt{3})$.

La función $y=f(x)$ es simétrica respecto el origen si $f(-x) = -f(x)$

4. La función es simétrica respecto del origen pues:

$$\frac{(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -y$$



Cálculo de las intersecciones con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow x = 0, \text{ luego solo hay un punto de intersección con el eje de abscisas que es el origen } (0, 0) \text{ (obviamente también es un punto de corte con el eje de ordenadas).}$$

Cálculo de las intersecciones con el eje de ordenadas:

$$x=0 \Rightarrow y=0, \text{ luego hay un solo punto de intersección con el eje } y \text{ que es el origen } (0, 0).$$

En los ejercicios 5 - 8 discutir si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explicar la razón o dar un contraejemplo que ponga de manifiesto la falsedad del enunciado.

5. Si (1,-2) es un punto de una curva simétrica respecto del eje x , entonces (-1,-2) es también un punto de dicha curva.

Apoyo teórico

Solución

6. Si (1,-2) es un punto de una curva simétrica respecto del eje y , entonces (-1,-2) es también un punto de dicha curva.

Apoyo teórico

Solución

7. Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a \neq 0$, entonces la curva $y = ax^2 + bx + c$ tiene dos puntos de intersección con el eje abscisas.

Apoyo teórico

Solución

8. Si $b^2 - 4ac = 0$ y $a \neq 0$, entonces la curva $y = ax^2 + bx + c$ tiene solo un punto de intersección con el eje abscisas.

Solución:

Apoyo teórico

Solución

La curva $y=f(x)$ es simétrica respecto el eje de abscisas si $y=f(-x)=f(x)$

5. Falso, dos puntos simétricos respecto del eje x tiene la misma abscisa y ordenadas opuestas.

La curva en la que sus puntos con abscisas opuestas tienen la misma ordenada es simétrica respecto el eje de ordenadas.

6. Verdadero, dos puntos simétricos respecto del eje y tienen la misma ordenada y abscisas opuestas.

$b^2 - 4ac$ discriminante en las raíces de una ecuación de segundo grado

7. Verdadero, para $y = 0$ queda una ecuación de segundo grado con discriminante positivo que da lugar a dos soluciones distintas.

$b^2 - 4ac$ discriminante en las raíces de una ecuación de segundo grado

8. Verdadero, para $y = 0$ queda una ecuación de segundo grado con discriminante nulo que da lugar a una única solución.

9. Hallar una ecuación para la curva formada por todos los puntos (x, y) cuya distancia al origen es K veces ($K \neq 1$) la distancia al punto $(2, 0)$.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

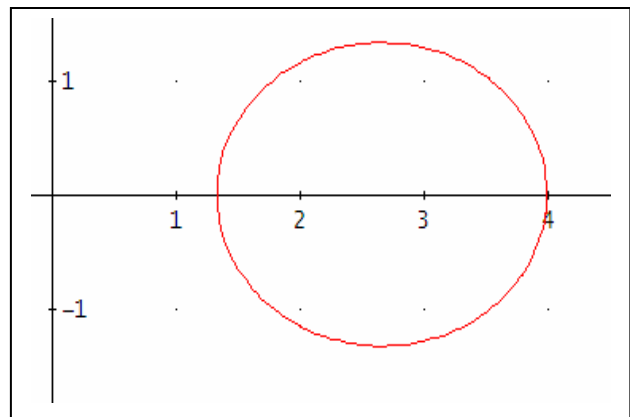
La distancia de un punto (x, y) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$ y la distancia del punto (x, y) al punto $(2, 0)$ es $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. En consecuencia se debe verificar que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = K\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

Para obtener una expresión más sencilla elevamos al cuadrado ambos miembros y simplificamos:

$$(1 - K^2)x^2 + (1 - K^2)y^2 + 4K^2x + 4K^2 = 0$$

Para $K=3$, la gráfica es



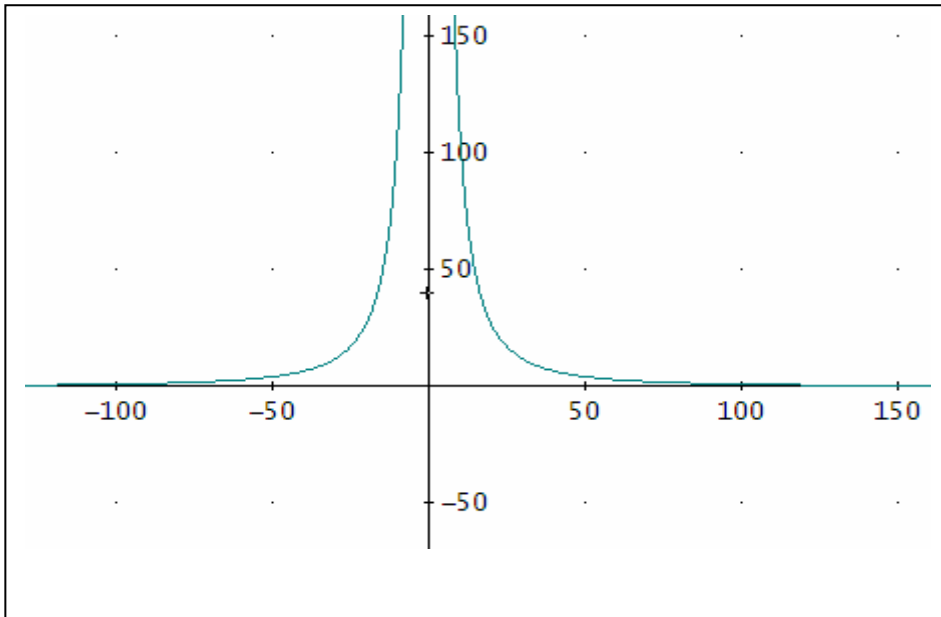
10. La resistencia en ohmios de 1000 m de hilo de cobre a 77°F admite el modelo matemático.

$$y = \frac{10770}{x^2} - 0.37 \quad \text{con } 10 \leq x \leq 200$$

donde x representa el diámetro del hilo en mm. Representar el modelo en Derive o en una calculadora. Si se duplica el diámetro del hilo ¿en qué factor aproximado varía la resistencia?

Solución

Solución:



Si sustituimos $x = 2u$

$$y = \frac{10770}{(2u)^2} - 0.37 = \frac{10770}{4u^2} - 0.37 = \frac{1}{4} \frac{10770}{u^2} - 0.37,$$

luego aproximadamente la resistencia varía en $\frac{1}{4}$

