Cónicas en forma Polar

1.-La Luna es el satélite natural de la Tierra y tiene una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Esta órbita tiene los siguientes datos: a= 384400 km, e=0.05. Tomando como radio de la Tierra R= 6370 km y como radio de la Luna 1738 km.

a) Hallar una *ecuación polar* de la órbita de la Luna.

b) Hallar la distancia más lejana de la superficie de la Tierra a la superficie de la Luna y la distancia para $\alpha = \pi/2$.

Solución

2.- Europa es el menor de los satélites galileanos de Júpiter y tiene una órbita *elíptica* con el *centro* de Júpiter en uno de sus *focos*.

Esta órbita tiene los siguientes datos: apoastro= 676938 km, periastro=664862 km. Tomando como radio de Júpiter R= 71492 km

a) Hallar una *ecuación polar* y la distancia de la superficie de Júpiter a la superficie Europa para $\alpha = \pi/2$.

b) Hallar una *ecuación cartesiana* de la órbita de Europa.

Solución

3.- Los planetas describen órbitas *elípticas* con el Sol en uno de sus *focos*.

a) Hallar la *ecuación polar* de la órbita de Marte sabiendo que tiene por *excentricidad* e = 0,0934 y que el semieje mayor es a = 227,94 x 10^6 km.

b) Hallar la distancia más lejana de Marte al Sol (*afelio*) y la distancia para $\alpha = \pi/6$.

c) Hallar una *ecuación cartesiana* de la órbita.

Solución

4.- Los planetas describen órbitas *elípticas* con el Sol en uno de sus focos.

a) Hallar la *ecuación polar* de la órbita de Júpiter sabiendo que tiene por *excentricidad* e = 0,0483 y que el semieje mayor es a = 778,33 x 10^6 km.

b) Hallar la distancia más cercana de Júpiter al Sol (*perihelio*) y la distancia para $\alpha = -\pi/9$.

c) Hallar una *ecuación cartesiana* de la órbita.

Solución

5.- El 28 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más alto y más bajo sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122000 millas. El centro de la Tierra es el *foco* de la órbita.

a) Hallar la *ecuación en polares* de la órbita del satélite.

b) Hallar la *ecuación polar* de las directrices de la órbita.

c) Calcular la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$. (Suponer que el radio de la Tierra es 4000 millas y que el *foco* mencionado es el izquierdo).

Solución

6.- El cometa Halley describe una órbita elíptica de *excentricidad* e ≈ 0.97. la longitud del *eje mayor* de la órbita es, aproximadamente, 36.18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas). a) Hallar una *ecuación en polares* para la órbita b) ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol? ¿y la distancia mayor (*afelio*)? c) Si su periodo es de 76 años ¿cuánto tiempo invierte desde el *perihelio* (α=0 hasta α= π/2). d) Hallar la *ecuación polar* de sus *directrices*.

Solución

7.- Dada la ecuación de la *hipérbola* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, hallar la *ecuación polar* de su rama derecha suponiendo que la dirección del *eje polar* coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el *polo* está:

a) en el foco derecho de la hipérbola.

b) en el foco izquierdo de la hipérbola.

En el caso a), hallar la *ecuación polar* de sus *directrices* y *asíntotas*.

Solución

8.- Dada la *parábola* de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su *ecuación polar* suponiendo que la dirección del *eje polar* coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el *polo* está en el *foco* de la parábola.

Solución

9.- Verificar que la ecuación $r=\frac{21}{5-2\cos\alpha}$ determina una *elipse* y hallar los *semiejes* y las *ecuaciones polares* de sus *directrices*.

Solución

10.- Verificar que la ecuación $r=\frac{16}{3-5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una *hipérbola* y hallar las *ecuaciones polares* de sus *directrices* y *asíntotas*.

Solución

11.- Una *elipse* de *excentricidad* $e=\frac{1}{4}$ tiene un *foco* F en el origen (*polo*) y su *directriz* correspondiente tiene de ecuación polar $r\cos\alpha = 8$. Sabiendo que el *eje polar* es OX^+, se pide:

a) Hallar las coordenadas del otro foco F'.
b) La *ecuación polar* de la elipse
c) Dibujar la elipse

Solución

12.- La Luna describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra tal que el centro de la Tierra es uno de sus focos. La longitud del *eje mayor* de dicha órbita es 768.806 km y la del *menor* 767.746 km. Se pide:

a) Hallar su *excentricidad* y las distancias del centro de la Tierra al *perigeo* y al *apogeo*.

b) Suponiendo que el centro de la Tierra se encuentra en el *foco* derecho de la *elipse* y el *eje polar* es la semirrecta con origen en dicho foco y dirección opuesta al otro foco, hallar la *ecuación polar* de la órbita y de sus *directrices*.

Solución

13.-Los planetas describen órbitas *elípticas* con el sol en uno de sus *focos*.

a) Hallar la *ecuación polar* de la órbita de Saturno sabiendo que el *semieje mayor* de la órbita es a = 1.427 $\times 10^9$ millas y la *excentricidad* es e = 0.0543.

b) Hallar la distancia más cercana de Saturno al Sol (*perihelio*) y la distancia para $\alpha = \pi/4$.

c) Hallar una *ecuación cartesiana* de la órbita.

Solución

14.-El asteroide Apolo describe una órbita aproximada de $r = \dfrac{9}{9+5\cos\alpha}$ alrededor del sol. Se pide:

a) La *excentricidad*.

b) La distancia para $\alpha = \pi/4$.

c) Hallar una *ecuación cartesiana* de la órbita.

d) Sabiendo que tarda 79 días en desplazarse desde $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ hasta $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, calcular el período del asteroide.

Solución

15.- a) Hallar la *ecuación polar* de la rama izquierda de la *hipérbola* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que tiene de *excentricidad* e = 2 y una de sus *directrices* es la recta x = 1, tomando el *polo* en su *foco* izquierdo y la dirección del *eje polar* la de OX^+.

b) Hallar la *ecuación polar* de la rama derecha de la *hipérbola* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que tiene de *excentricidad* e = 2 y una de sus *directrices* es la recta x = 1, tomando el *polo* en su *foco* izquierdo y la dirección del *eje polar* la de OX^+.

c) Halla la *ecuación polar* de sus *asíntotas*.

Solución

16.- Dada la *elipse* de ecuación $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, hallar su *ecuación polar* suponiendo que la dirección del *eje polar* coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el *polo* está:

a) En el *foco* derecho de la elipse.

b) En el *foco* izquierdo de la elipse.

Solución

17.- Verificar que la ecuación $r = \dfrac{144}{13 - 5\cos\alpha}$ determina una *elipse* y hallar sus *semiejes*.

Solución

18.- Verificar que la ecuación $r = \dfrac{18}{4 - 5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una *hipérbola* y hallar sus *semiejes*.

Solución

19.- Hallar en la *parábola* $r = \dfrac{p}{1-\cos\alpha}$ los puntos:

a) cuyos radios polares sean mínimos.
b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución

20.- Dada la *hipérbola* de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, hallar su *ecuación polar*, suponiendo que la dirección del *eje polar* coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el *polo* está en el centro de la hipérbola.

Solución

21.- Dada la *elipse* de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, hallar su *ecuación polar*, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el centro de la elipse.

Solución

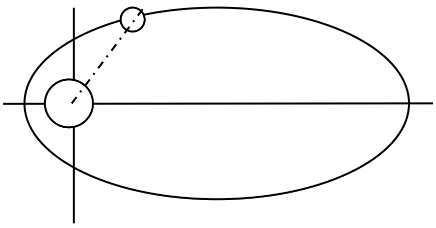
22.- Dada la *parábola* de ecuación $y^2 = 2px$, hallar su *ecuación polar*, suponiendo que la dirección del *eje polar* coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el vértice de la parábola.

Solución

23.- Hallar la *ecuación en polares* de la circunferencia de radio "a" y centro en el punto C de coordenadas polares C = (b, θ), suponiendo "b" positivo. ¿Cómo queda la ecuación si la circunferencia pasa por el origen? ¿Y si además el centro está sobre el eje de abscisas? ¿y sobre el de ordenadas?

Solución

24.- Los planetas describen órbitas *elípticas* con el Sol en uno de sus *focos*, como muestra la figura



a) Hallar la *ecuación polar* de Venus siendo a = 6,693·x 10^7 millas; e = 0,0068.

b) Hallar la distancia al Sol para el *afelio* y para $\alpha = 10\pi/9$.

c) Hallar las áreas barridas por un rayo trazado desde el Sol hasta el planeta mientras α crece desde 0 hasta $\pi/9$ y desde $\alpha = \pi$ hasta $\pi+\pi/9$.

d) Aplicar la segunda Ley de Kepler para estimar, respectivamente, el tiempo que Venus tarda en recorrer los dos arcos anteriores (período de traslación ≈ 225 días)

Solución

25.- Dada la *hipérbola* de ecuación $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{100} = 1$ hallar la *ecuación polar* de su rama derecha suponiendo que la dirección del *eje polar* coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el *polo* está:

i) en el *foco* izquierdo de la hipérbola.

ii) en el centro de la hipérbola.

En el caso i), hallar la *ecuación polar* de sus *directrices* y *asíntotas*.

Solución

26.- a) Hallar la *ecuación polar* de la órbita elíptica que describe el planeta Tierra alrededor del sol, sabiendo que: a = 92, 957 x 10^6 millas; e = 0,0167.

b) Hallar la *ecuación polar* de sus *directrices*.

c) Hallar las distancias del *afelio* (punto más alejado) y *perihelio* (punto más cercano).

Solución

27.- a) Hallar una *ecuación polar* de la órbita de Urano sabiendo que :

a = 287.1 x 10^7 km; e = 0.0461.

b) Calcular la distancia al Sol para el *afelio* y para $\alpha = \pi/6$.

Solución

28.- Se conoce la *excentricidad* de la órbita de un cometa e = 0.54769 así como la distancia del cometa al sol en el *perihelio* q = 1.874519 UA.

a) Hallar una ecuación en *polares* de la órbita del cometa.

b) Para dicha ecuación, hallar de manera aproximada la distancia del cometa al sol cuando $\alpha = \pi/4$.

c) Hallar también una ecuación en *cartesianas* de la órbita.

Solución

29.- Se conoce la medida del *semieje* mayor de la órbita de un cometa a = 4.14432358 UA, así como la distancia del cometa al sol en el *perihelio* q = 1.874519 UA.

a) Hallar la *excentricidad* de la órbita del cometa.

b) Hallar una ecuación en *polares* de la órbita del cometa.

c) Para dicha ecuación, hallar de manera aproximada la distancia del cometa al sol cuando $\alpha = \pi/2$.

d) Calcular la distancia del cometa al sol en el *afelio*.

e) Hallar también una ecuación en *cartesianas* de la órbita

Solución

Cónicas en forma Polar

Ejercicios propuestos

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

a) $r = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\alpha}$ **b)** $r = \dfrac{6}{1 - \cos\alpha}$ **c)** $r = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\alpha}$

d) $r = \dfrac{12}{2 - \cos\alpha}$ **e)** $r = \dfrac{5}{3 - 4\cos\alpha}$ **f)** $r = \dfrac{1}{3 - 3\cos\alpha}$

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

- **a)** en el foco izquierdo de la hipérbola;
- **b)** en el foco derecho.

3) Hallar en la elipse $r = \dfrac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

4) Hallar en la hipérbola $\rho = \dfrac{15}{3 - 4\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

5) Hallar en la parábola $r = \dfrac{p}{1 - \cos\alpha}$ los puntos:

- **a)** cuyos radios polares sean mínimos.
- **b)** cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución

1.-La Luna es el satélite natural de la Tierra y tiene una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Esta órbita tiene los siguientes datos: a= 384400 km, e=0.05. Tomando como radio de la Tierra R= 6370 km y como radio de la Luna 1738 km.

a) Hallar una ecuación polar de la órbita de la Luna.

b) Hallar la distancia más lejana de la superficie de la Tierra a la superficie de la Luna y la distancia para $\alpha = \pi/2$.

Solución:

a) a= 384400km, c=a·e=19220km, $b^2 = a^2 - c^2 = 147393951600$, p= b^2/a= 383439 km

$$r = \frac{383439}{1 - 0.05\, cos\alpha}$$

b) La distancia más lejana es el punto apogeo y hemos de tener en cuenta los radios, luego,

$$d_1 = a+c-R_T-R_L = \boxed{\mathbf{395512\ km}}$$

La distancia para $\alpha = \pi/2$ es $d_2 = \frac{383439}{1-0.05\, cos\pi/2}$ -6370-1738= $\boxed{\mathbf{375331\ km}}$ (obsérvese que se trata de la longitud del parámetro p menos los radios de los astros)

2.- Europa es el menor de los satélites galileanos de Júpiter y tiene una órbita elíptica con el centro de Júpiter en uno de sus focos.

Esta órbita tiene los siguientes datos: apoastro= 676938 km, periastro=664862 km. Tomando como radio de Júpiter R= 71492 km

a) Hallar una ecuación polar y la distancia de la superficie de Júpiter a la superficie Europa para $\alpha = \pi/2$.

b) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita de Europa.

Solución:

a) d_{ap}= 676938km = a + c, d_{pe} = 664862 km = a - c,

$d_{ap} + d_{pe}$ = 2a = 676938 + 664862 = 1341800, d_{ap}-d_{pe} = 2c = 676938 – 664862=12076

Operando obtenemos a = 670900 km, c = 6038 km, $b^2 = a^2 - c^2$ = 450070352556,

p= b^2/a= 670845,6588·km, e = c / a =0,009

$$r = \frac{670845{,}6588\cdot}{1-0.09\ cos\alpha}$$

La distancia de la superficie de Júpiter a la superficie Europa para $\alpha = \pi/2$ es:

$$\frac{670845{,}6588\cdot}{1-0.09\ cos\pi/2} - 71492 = 599353{,}6587\ km$$

(obsérvese que se trata de la longitud del parámetro p menos el radio de Júpiter)

b) La ecuación cartesiana de la órbita de Europa con centro en el centro de la elipse y dirección del eje de abscisas la del eje polar es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{450106810000} + \frac{y^2}{450070352556} = 1$$

3.- Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

a) Hallar la ecuación polar de la órbita de Marte sabiendo que tiene por excentricidad e = 0,0934 y que el semieje mayor es a = 227,94 x 10^6 km.

b) Hallar la distancia más lejana de Marte al Sol (afelio) y la distancia para $\alpha = \pi/6$.

c) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita.

Solución:

a) Ecuación polar de la órbita de Marte

$r = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha}$, con $p = \dfrac{b^2}{a}$.

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e \cdot a \approx 212.89\times10^5 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{515.03\times10^{14}}{227.94\times10^6} = 225.95\times10^6$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{225.95\times10^6}{1 - 0.0934\cos\alpha}}$$

b) Distancia más lejana al sol (afelio):

$$r = \frac{225.95\times10^6}{1 - 0.0934\cos 0} = \boxed{249.23\times10^6\ \textbf{km}}$$

Distancia para $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$:

$$r = \frac{225.95\times10^6}{1 - 0.0934\cos\frac{\pi}{6}} = \boxed{245.84\times10^6\ \textbf{km}}$$

c) Ecuación cartesiana de la órbita:

$$\frac{x^2}{(227.94\times10^6)^2} + \frac{y^2}{(226.94\times10^6)^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{519.57\times10^{14}} + \frac{y^2}{515.03\times10^{14}} = 1}$$

4.- Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

a) Hallar la ecuación polar de la órbita de Júpiter sabiendo que tiene por excentricidad $e = 0{,}0483$ y que el semieje mayor es $a = 778{,}33 \times 10^6$ km.

b) Hallar la distancia más cercana de Júpiter al Sol (perihelio) y la distancia para $\alpha = -\pi/9$.

c) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita.

Solución:

a) Ecuación polar de la órbita de Júpiter

$r = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha}$, con $p = \dfrac{b^2}{a}$.

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e \cdot a \approx 3.76 \times 10^7 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{604.38 \times 10^{15}}{778.33 \times 10^6} = 7.7651 \times 10^6$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{7.7651 \times 10^6}{1 - 0.0483\cos\alpha}}$$

b) Distancia más cercana al sol (perihelio):

$$r = \frac{7.7651 \times 10^6}{1 - 0.0483\cos\pi} = \boxed{740.73 \times 10^6 \ \textbf{km}}$$

Distancia para $\alpha = -\dfrac{\pi}{9}$:

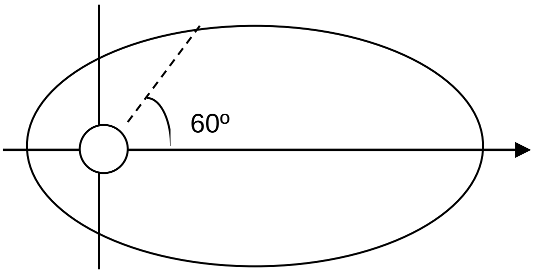
$$r = \frac{7.7651 \times 10^6}{1 - 0.0483\cos\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)} = \boxed{813.43 \times 10^6 \ \textbf{km}}$$

c) Ecuación cartesiana de la órbita:

$$\frac{x^2}{(778.33 \times 10^6)^2} + \frac{y^2}{(777.42 \times 10^6)^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{605.80 \times 10^{15}} + \frac{y^2}{604.38 \times 10^{15}} = 1}$$

5.- El 28 de noviembre de 1963, EE.UU. lanzó el Explorer 18. Sus puntos más alto y más bajo sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 122000 millas. El centro de la Tierra es el foco de la órbita. a) Hallar la ecuación en polares de la órbita del satélite.
b) Hallar la ecuación polar de las directrices de la órbita.
c) Calcular la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$. (Suponer que el radio de la Tierra es 4000 millas y que el foco mencionado es el izquierdo).

Solución:



a) Ecuación polar de la órbita del satélite:

2 a = 119 + 122000 + 2 4000 = 130119 $\Rightarrow$ a = 65059.5 millas
c = a – 119 – 4000 = 60940.5, e = c/a = 0.94

$$p = b^2/a = \frac{(a^2 - c^2)}{a} = 518994000/a = 7977.22$$

La ecuación de la órbita es:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \boxed{\frac{7977.22}{1 - 0.94\cos\alpha}}$$

b) La ecuación polar de la directriz asociada al foco que coincide con el origen de la referencia polar es:

$$\text{dir1} \equiv x' = -d = -(\frac{a^2}{c} - c) = -8516.405346 \Rightarrow r\cos\alpha = -8516.405346$$

$$\boxed{r = \frac{-8516.405346}{\cos\alpha}}$$

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que no coincide con el origen de la referencia polar es:

$$\text{dir2} \equiv x' = c + \frac{a^2}{c} = 1.303974053\times10^5 \Rightarrow r\cos\alpha = 1.303974053\times10^5 \Rightarrow$$

$$\boxed{r = \frac{1.303974053\times10^5}{\cos\alpha}}$$

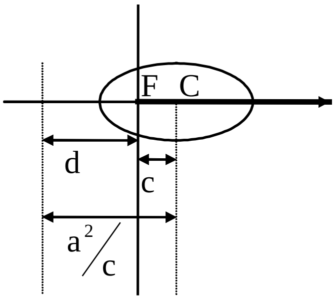
c) Distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\alpha = 60^\circ$:

$$\frac{7977.22}{1 - 0.94\cos\frac{\pi}{3}} - 4000 = \boxed{\textbf{11051.36 millas}}$$

6.- El cometa Halley describe una órbita elíptica de excentricidad e ≈ 0.97. la longitud del eje mayor de la órbita es, aproximadamente, 36.18 unidades astronómicas (una u.a., distancia media entre la Tierra y el Sol, es ≈ 93 millones de millas). a) Hallar una ecuación en polares para la órbita b) ¿Cuánto se acerca el cometa Halley al Sol? ¿y la distancia mayor (afelio)? c) Si su periodo es de 76 años ¿cuánto tiempo invierte desde el perihelio (α=0 hasta α= π/2). d) Hallar la ecuación polar de sus directrices.

Solución:

a)



$$e = 0.97 = \frac{c}{a}, \quad 2a = 36.18 \text{ u.a.} \Rightarrow a = 18.09 \text{ u.a.}$$

Tomamos una referencia polar de tipo1 y la ecuación de la cónica sería de la forma:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \frac{ed}{1 - e\cos\alpha}$$

$$d = \frac{a^2}{c} - c\,; \; c = a\,.\,e = 17.5473 \Rightarrow d = 1.1022 \Rightarrow$$

p = d . e =1.0691189. Luego, una ecuación en polares para la órbita es: $\boxed{r = \frac{1.0691}{1 - 0.97\cos\alpha}}$

b) La distancia mínima entre el cometa Halley y el Sol es el valor de "r" mínimo, que se obtiene cuando el denominador $1 - 0.97\cos\alpha$ es máximo, es decir, para $\cos\alpha = -1$:

$$\boxed{r = \frac{1.0691}{1 + 0.97} \approx 0.5427} \text{ u.a.}$$

Distancia del Afelio (millas). α= 0

$$\frac{1.0691}{1 - 0.97\cos 0} = \boxed{\mathbf{35.6367\ u.a}}.$$

c) Aplicamos la segunda Ley de Kepler: Las áreas barridas por los radio vectores son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{1.0691}{1 - 0.97\cos\alpha}\right)^2 d\alpha = 249.92$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{1.0691}{1 - 0.97\cos\alpha}\right)^2 d\alpha = 0.39$$

Luego $t = \frac{76}{249.92} \times 0.39 \approx 0{,}12$ años ≈ **1,4 meses**.

d) La ecuación polar de la directriz asociada al foco que coincide con el origen de la referencia polar es:

$$\text{dir1} \equiv x' = -d = -(\frac{a^2}{c} - c) = -1.1022 \Rightarrow r\cos\alpha = -1.1022 \Rightarrow \boxed{r = -\frac{-1.1022}{\cos\alpha}}$$

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que no coincide con el origen de la referencia polar es:

$$\text{dir2} \equiv x' = c + \frac{a^2}{c} = 36.19678453 \Rightarrow r\cos\alpha = 36.19678453 \Rightarrow \boxed{r = \frac{36.19678453}{\cos\alpha}}$$

7.- Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco derecho de la hipérbola.

b) en el foco izquierdo de la hipérbola.

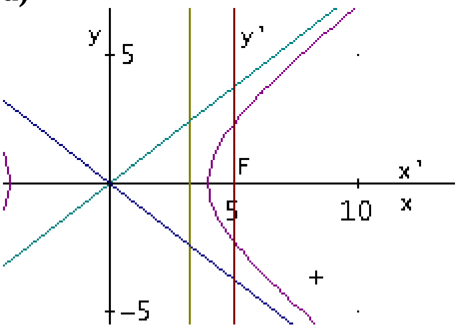
En el caso a), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=4,\ b=3 \ \Rightarrow c^2=a^2+b^2=16+9=25 \ \Rightarrow c=5$.

Por tanto, $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$, $p=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$, $d=\frac{b^2}{c}=\frac{9}{5}$.

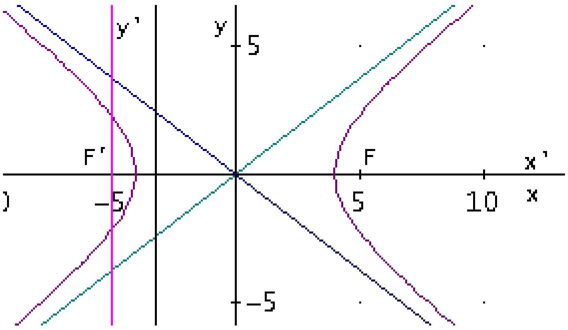
a)



La directriz es la recta $x=c-d=5-\frac{9}{5}=\frac{16}{5}$.

La ecuación, en este caso, es: $r=\frac{p}{1-e\cos\alpha}=$

$$\boxed{r=\frac{9/4}{1-5/4\ \cos\alpha}=\frac{9}{4-5\cos\alpha}}.$$



b)

La directriz es la recta $x=-c+d=-\frac{a^2}{c}=-\frac{16}{5}$.

La ecuación que se debe emplear ahora es:

$$r=\frac{-p}{1-e\cos\alpha}=\boxed{\frac{-9/4}{1-5/4\ \cos\alpha}=\frac{-9}{4-5\cos\alpha}}.$$

Directrices en el caso a):

$$\text{dir} \equiv x`=-(c-\frac{a^2}{c})=-\frac{9}{5} \Rightarrow r\cos\alpha=-\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{r=-\frac{9}{5\cos\alpha}}$$

$$\text{dir`} \equiv x`=-(c+\frac{a^2}{c})=-\frac{41}{5} \Rightarrow r\cos\alpha=-\frac{41}{5} \Rightarrow \boxed{r=-\frac{41}{5\cos\alpha}}$$

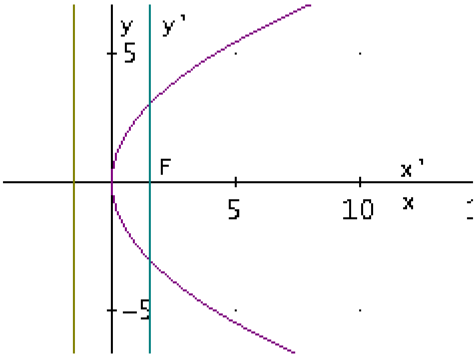
Asíntotas en el caso a):

Son rectas que pasan por O(0,0) en la referencia x y o bien O(-c, 0) = (-5, 0) en la x`y`, y tienen de pendiente $\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{3}{4}$, luego su ecuación es: $y`-0=\pm\frac{3}{4}(x`+5)$.

Pasando a polares:

$$r\text{sen}\alpha=\pm\frac{3}{4}\left(r\cos\alpha+5\right) \Rightarrow \boxed{r=\frac{15/4}{\text{sen}\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha}},\ \boxed{r=\frac{-15/4}{\text{sen}\alpha+\frac{3}{4}\cos\alpha}}$$

8.- Dada la parábola de ecuación $y^2 = 6x$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.



Solución:

$y^2 = 6x = 2px \Rightarrow p = 3$; $e = 1$.

La ecuación adecuada es:

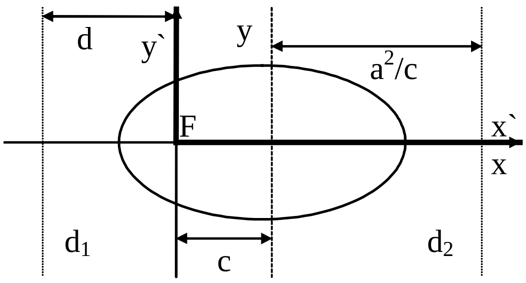
$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \boxed{\frac{3}{1 - \cos\alpha}}.$$

9.- Verificar que la ecuación $r = \dfrac{21}{5 - 2\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar los semiejes y las ecuaciones polares de sus directrices.

Solución:

$$r = \frac{21}{5-2\cos\alpha} = \frac{21/5}{1-\frac{2}{5}\cos\alpha} \Rightarrow p = \frac{21}{5},\ e = \frac{2}{5}$$

Por ser e < 1, se trata efectivamente de una *elipse*; y, por la forma de la ecuación, un foco está en el polo, la directriz no corta al eje polar y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz.



$$p = de \Rightarrow d = \frac{p}{e} = \frac{21/5}{2/5} = \frac{21}{2}\ .$$

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2} = 5,\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{21}}\ .$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 21 = 4 \Rightarrow c = 2\ .$$

La directriz d_1 tiene de ecuación:

$$x` = -d = -\frac{21}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = -\frac{21}{2} \Rightarrow \boxed{d_1 \equiv r = -\frac{21}{2\cos\alpha}}$$

La otra directriz d_2 tiene de ecuación:

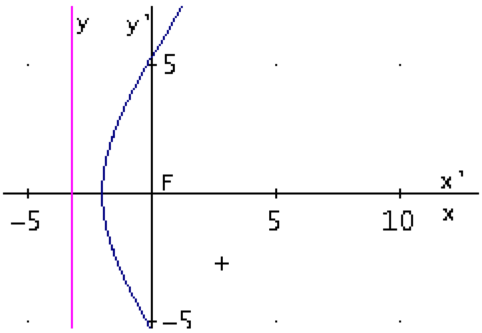
$$x` = c + \frac{a^2}{c} = 2 + \frac{25}{2} = \frac{29}{2} \Rightarrow r\cos\alpha = \frac{29}{2} \Rightarrow \boxed{d_2 \equiv r = \frac{29}{2\cos\alpha}}$$

10.- Verificar que la ecuación $r=\dfrac{16}{3-5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de sus directrices y asíntotas.

Solución:

$$r=\frac{16}{3-5\cos\alpha}=\frac{16/3}{1-5/3\cos\alpha}\Rightarrow p=\frac{16}{3},\ e=\frac{5}{3}\ .$$

Por ser e > 1, se trata de una rama de una hipérbola. A la vista de la ecuación, la cónica y el foco están del mismo lado respecto de la directriz y el eje polar no corta a dicha recta, luego, la situación es la siguiente:

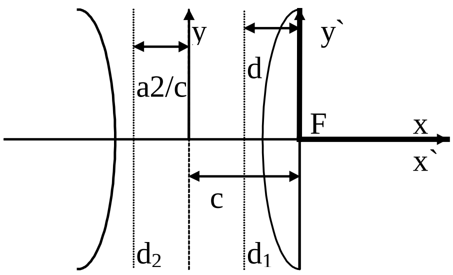


Así pues, se trata de la rama derecha de una hipérbola.

$$d=\frac{p}{e}=\frac{16}{5}\ ,\quad a=\frac{p}{e^2-1}=3\ ,\quad b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}=4\ .$$

$$c^2=a^2+b^2=25\Rightarrow c=5\ .$$

Las ecuaciones polares de las directrices se hallan de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, obteniéndose:



$$\boxed{d_1\equiv r=-\frac{16}{5\cos\alpha}\ ,\ d_2\equiv r=-\frac{34}{5\cos\alpha}}\ .$$

Las ecuaciones de las asíntotas respecto al sistema de referencia x , y (de origen el centro de la cónica, y de ejes los de la cónica) son: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Los nuevos ejes son ahora: $\begin{cases} x` = x-5 \\ y` = y \end{cases}$

Respecto a estos nuevos ejes, las ecuaciones cartesianas de las asíntotas son, por tanto:

$$y`=\pm\frac{4}{3}(x`+5)\ .$$

Por consiguiente, las ecuaciones polares de estas rectas son:

$r\,\mathrm{sen}\alpha=\pm\dfrac{4}{3}(r\cos\alpha-5)$; es decir, operando para cada uno de los signos se obtiene:

$$\boxed{r=\frac{20}{3\,\mathrm{sen}\alpha-4\cos\alpha}}\ ,\ \boxed{r=\frac{-20}{4\cos\alpha+3\,\mathrm{sen}\alpha}}$$

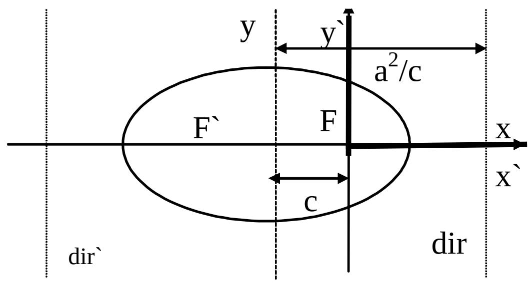
11.- Una elipse de excentricidad $e=\frac{1}{4}$ tiene un foco F en el origen (polo) y su directriz correspondiente tiene de ecuación polar $r\cos\alpha=8$. Sabiendo que el eje polar es OX⁺, se pide:

a) Hallar las coordenadas del otro foco F'.

b) La ecuación polar de la elipse

c) Dibujar la elipse

Solución:



De la ecuación de la directriz:

$$r=\frac{8}{\cos\alpha}\Leftrightarrow x`=8$$

se deduce que la directriz está a la derecha del foco F (polo); por tanto, el eje polar corta a la directriz y la cónica y el foco están en el mismo semiplano (izquierdo) respecto de la misma.

Debe usarse una ecuación del tipo 3: $r=\frac{p}{1+e\cos\alpha}$

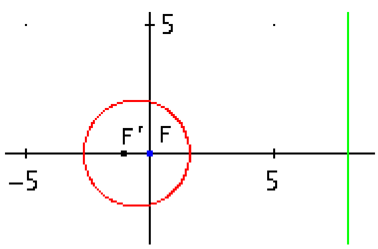
a) Las coordenadas polares del otro foco serán: F`(r = 2c, $\alpha=\pi$). Hallemos c:

$$e=\frac{1}{4}=\frac{c}{a}\Rightarrow a=4c\text{, luego }8=\frac{a^2}{c}-c=\frac{16c^2}{c}-c=15c\Rightarrow c=\frac{8}{15}.$$

Por tanto: F`($\boxed{\mathbf{r=2\frac{8}{15}=\frac{16}{15}}}$, $\alpha=\pi$).

b) $p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{(4c)^2-c^2}{4c}=\frac{15}{4}\frac{8}{15}=2\Rightarrow \boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\alpha}=\frac{2}{1+\frac{1}{4}\cos\alpha}}$

c)



12.- La Luna describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra tal que el centro de la Tierra es uno de sus focos. La longitud del eje mayor de dicha órbita es 768.806 km y la del menor 767.746 km. Se pide:

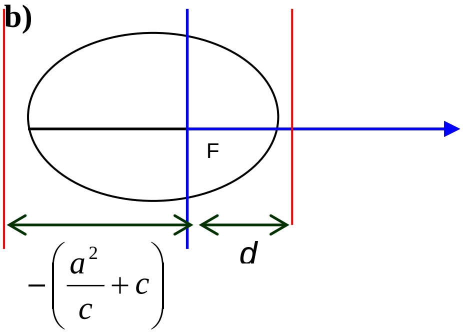
a) Hallar su excentricidad y las distancias del centro de la Tierra al perigeo y al apogeo.
b) Suponiendo que el centro de la Tierra se encuentra en el foco derecho de la elipse y el eje polar es la semirrecta con origen en dicho foco y dirección opuesta al otro foco, hallar la ecuación polar de la órbita y de sus directrices.

Solución:

a) Por ser una órbita elíptica la excentricidad es $e=\dfrac{c}{a}$, los datos nos dicen que 2*a*=768806 km, 2*b*=767746 km, luego *a*=384403 km, *b*=383873 km, en consecuencia, $c=\sqrt{a^2-b^2}=20178{,}857$ km. Por lo tanto:

$$\boxed{e=0{,}052; \quad \text{perigeo}=a-c=364224{,}1427 \text{ km}; \quad \text{apogeo}=a+c=404581{,}8572 \text{ km.}}$$

b)



La ecuación polar de la elipse correspondiente al sistema de referencia descrito es $r=\dfrac{p}{1+e\cos\alpha}$ donde $p=\dfrac{b^2}{a}$ =383343,7307, luego $\boxed{r=\dfrac{383343{,}7307}{1+0{,}052\cos\alpha}}$

Las ecuaciones de las directrices en el sistema cartesiano asociado al polar dado son:

$x=-d \Rightarrow r\cos\alpha=d \Rightarrow \boxed{r=\dfrac{d}{\cos\alpha}=\dfrac{p/e}{\cos\alpha}=\dfrac{7302617{,}699}{\cos\alpha}}$

$x=-\left(\dfrac{a^2}{c}+c\right) \Rightarrow r\cos\alpha=-\left(\dfrac{a^2}{c}+c\right)=7342975{,}414 \Rightarrow \boxed{r=\dfrac{7342975{,}414}{\cos\alpha}}$

13.-Los planetas describen órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.

a) Hallar la ecuación polar de la órbita de Saturno sabiendo que el semieje mayor de la órbita es a = 1.427 $\times 10^9$ millas y la excentricidad es e = 0.0543.

b) Hallar la distancia más cercana de Saturno al Sol (perihelio) y la distancia para α = π/4.

c) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita.

Solución:

a) Ecuación polar de la órbita de Saturno

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{p}}{1-\mathrm{e}\cos\alpha}, \text{ con } \mathrm{p} = \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}.$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e \cdot a \approx 0.077\times 10^9 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{2.03\times 10^{18}}{1.427\times 10^9} = 1.423\times 10^9$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1-e\cos\alpha} = \frac{1.423\times 10^9}{1-0.0543\cos\alpha}}$$

b) Distancia más cercana al sol (perihelio):

$$r = \frac{1.423\times 10^9}{1-0.0543\cos(\pi)} = 1.3495\times 10^9 \text{ millas}$$

Distancia para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$:

$$r = \frac{1.423\times 10^9}{1-0.0543\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = \boxed{1.4796\times 10^9} \text{ millas}$$

c) Ecuación cartesiana de la órbita:

$$\frac{x^2}{(1.427\times 10^9)^2} + \frac{y^2}{\left(1.425\times 10^9\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{2.036\times 10^{18}} + \frac{y^2}{2.030\times 10^{18}} = 1}$$

14.-El asteroide Apolo describe una órbita aproximada de $r=\dfrac{9}{9+5\cos\alpha}$ **alrededor del sol. Se pide:**
a) La excentricidad.
b) La distancia para α = π/4.
c) Hallar una ecuación cartesiana de la órbita.
d) Sabiendo que tarda 79 días en desplazarse desde $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$ **hasta** $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$**, calcular el período del asteroide.**

Solución:

a) Excentricidad

$$r=\frac{9}{9+5\cos\alpha}=\frac{1}{1+\frac{5}{9}\cos\alpha}=\frac{p}{1+e\cos\alpha}\Rightarrow \boxed{e=\frac{5}{9}}$$

b) Distancia

$$r=\frac{9}{9+5\cos\alpha}=\frac{9}{9+5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{9}{9+5\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{162-45\sqrt{2}}{137}}$$

c)

$$r=\frac{p}{1+e\cos\alpha},\text{ con } p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=1.$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{9}\Rightarrow c=\frac{5}{9}\cdot a\Rightarrow p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{a^2-\left(\frac{5}{9}\cdot a\right)^2}{a}=1\Rightarrow a=\frac{81}{56}$$

$$b^2=a^2-c^2=\left(\frac{81}{56}\right)^2-\left(\frac{45}{56}\right)^2=\frac{81}{56}$$

Ecuación cartesiana de la órbita:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{\frac{6561}{3136}}+\frac{y^2}{\frac{81}{56}}=1}$$

d) $$A_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}=\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{9+5\cos\alpha}\right)^2 d\alpha\approx 0.904292\quad u^2$$

$$\text{Área de la elipse} = \pi\ a\ b=\frac{729\sqrt{14}\pi}{1568}\approx 5.465065\quad u^2$$

79 ———— 0.904292

x ———— 5.465065

x = **477.4344 días**

15.- a) Hallar la ecuación polar de la rama izquierda de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ que tiene de excentricidad e = 2 y una de sus directrices es la recta x = 1, tomando el polo en su foco izquierdo y la dirección del eje polar la de OX^+.

b) Hallar la ecuación polar de la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ que tiene de excentricidad e = 2 y una de sus directrices es la recta x = 1, tomando el polo en su foco izquierdo y la dirección del eje polar la de OX^+.

c) Halla la ecuación polar de sus asíntotas.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} e=2=\frac{c}{a}\Rightarrow a=\frac{c}{2} \\ x=1=\frac{a^2}{c} \end{array}\right\}\Rightarrow 1=\frac{c^2}{4}\frac{1}{c}\Rightarrow c=4\Rightarrow a=2;\quad b^2=c^2-a^2=12\Rightarrow p=\frac{b^2}{a}=6$$

a) Se trata de una ecuación polar de tipo 3, luego: $\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\alpha}=\frac{6}{1+2\cos\alpha}}$.

b) Se trata de una ecuación polar de tipo 4, luego: $\boxed{r=\frac{-p}{1-e\cos\alpha}=\frac{-6}{1-2\cos\alpha}}$.

c) Las asíntotas son rectas que pasan por el punto (x’, y’) =(c, 0) y tienen de pendiente $\pm\frac{b}{a}=\pm\sqrt{3}$, siendo x’, y’ el sistema de referencia cartesiano con origen en el foco izquierdo de la cónica. Su ecuación es:

$$y'-0=\pm\sqrt{3}\left(x'-4\right)\Leftrightarrow rsen\alpha=\pm\sqrt{3}\left(r\cos\alpha-4\right)\Leftrightarrow \boxed{r=\frac{\mp4\sqrt{3}}{sen\alpha\mp\sqrt{3}\cos\alpha}}$$

16.- Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, hallar su ecuación polar suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) En el foco derecho de la elipse.

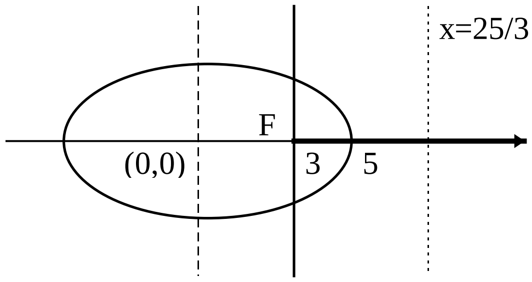
b) En el foco izquierdo de la elipse.

Solución:

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow a=5,\ b=4 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow c=3$.

Por tanto, $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$, $p=\frac{b^2}{a}=\frac{16}{5}$, $d=\frac{b^2}{c}=\frac{16}{3}$.

a)



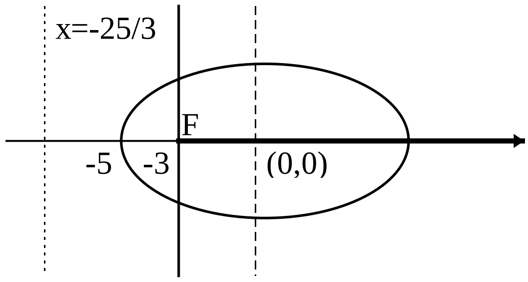
La directriz es la recta:

$x=d+c=\frac{16}{3}+3=\frac{25}{3}$.

Por las condiciones del problema, la ecuación a emplear es: $r=\frac{p}{1+e\cos\alpha}=\frac{16/5}{1+3/5\cos\alpha} \Leftrightarrow$

$\boxed{r=\frac{16}{5+3\cos\alpha}}$.

b)



La directriz es la recta:

$x=-d-c=-\frac{16}{3}-3=-\frac{25}{3}$.

En este caso, la ecuación adecuada es:

$r=\frac{p}{1-e\cos\alpha}=\frac{16/5}{1-3/5\cos\alpha}=\boxed{\frac{16}{5-3\cos\alpha}=r}$

17.- Verificar que la ecuación $r=\dfrac{144}{13-5\cos\alpha}$ determina una elipse y hallar sus semiejes.

Solución:

$$r=\frac{144}{13-5\cos\alpha}=\frac{144/13}{1-5/13\cos\alpha}=\frac{p}{1+e\cos\alpha}\Rightarrow p=\frac{144}{13},\ e=\frac{5}{13}.$$

Al ser **e < 1**, se trata de una elipse.

$$r=\frac{p}{1+e\cos\alpha},\ \text{con}\ p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{144}{13}.$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{13}\Rightarrow c=\frac{5}{13}\cdot a\Rightarrow p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{a^2-\left(\frac{5}{13}\cdot a\right)^2}{a}=\frac{144}{13}\Rightarrow\boxed{a=13}$$

$$b^2=a^2-c^2=13^2-5^2=12^2\Rightarrow\boxed{b=12}$$

O bien, sus semiejes son:

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{144/13}{1-25/169}=\frac{169}{13}=13$$

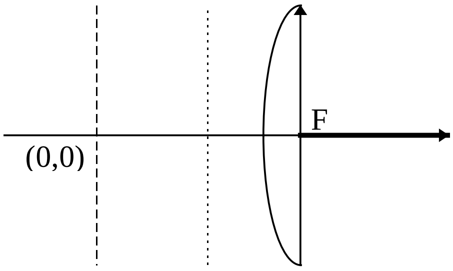
$$b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{144/13}{12/13}=\frac{144}{12}=12$$

18.- Verificar que la ecuación $r=\dfrac{18}{4-5\cos\alpha}$ determina la rama derecha de una hipérbola y hallar sus semiejes.

Solución:

$$r=\frac{18}{4-5\cos\alpha}=\frac{18/4}{1-5/4\cos\alpha}=\frac{9/2}{1-5/4\cos\alpha}\Rightarrow p=\frac{9}{2},\ e=\frac{5}{4}.$$

Por ser e > 1, se trata de la rama de una hipérbola.



A la vista de la ecuación dada, es **una cónica tal que ella y el foco se encuentran en el mismo semiplano respecto de la directriz, y el eje polar no corta a dicha directriz**; se trata por tanto, de la rama derecha de la hipérbola.

$$d=\frac{p}{e}=\frac{9/2}{5/4}=\frac{18}{5},$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos\alpha},\ \text{con}\ p=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{9}{2}.$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}\Rightarrow c=\frac{5}{4}\cdot a\Rightarrow p=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{\left(\frac{5}{4}\cdot a\right)^2-a^2}{a}=\frac{9}{2}\Rightarrow \boxed{a=8}$$

$$b^2=c^2-a^2=10^2-8^2=6^2\Rightarrow \boxed{b=6}$$

O bien, los semiejes son: $a=\dfrac{p}{e^2-1}=\dfrac{9/2}{25/16-1}=\dfrac{16}{2}=8$, $\quad b=\dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}=\dfrac{9/2}{3/4}=6$

19.- Hallar en la parábola $r = \frac{p}{1\text{-}\cos\alpha}$ los puntos:

a) cuyos radios polares sean mínimos.

b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución

a) $r = \frac{p}{1\text{-}\cos\alpha}$ será mínimo cuando $1 - \cos\alpha$ sea máximo, es decir, para $\cos\alpha = -1$,

y, por tanto, para $\alpha = \pi$. Para este ángulo, es $r = \frac{p}{2}$.

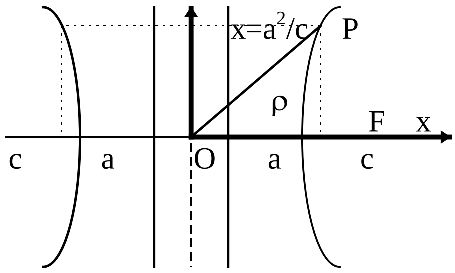
Así pues, el punto pedido es : $\boxed{\left(\frac{p}{2}, \pi\right)}$.

b) Ha de ser: $r = \frac{p}{1\text{-}\cos\alpha} = p \Rightarrow 1\text{-}\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Por tanto, los puntos buscados son $\boxed{\left(p, \frac{\pi}{2}\right)}$ y $\boxed{\left(p, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

20.- Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el centro de la hipérbola.

Solución



Sea P un punto genérico de la hipérbola, $P=(r,\alpha)$ en coordenadas polares, o bien $P=(r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha)$ en cartesianas.

Aplicando la definición de cónica, ha de ser:

$$e=\frac{\sqrt{(r\cos\alpha-c)^2+r^2\,\text{sen}^2\,\alpha}}{r\cos\alpha-\frac{a^2}{c}} \quad .$$

Vamos a operar en esta expresión con el fin de simplificarla:

$$[e(r\cos\alpha-\frac{a^2}{c})]^2=(r\cos\alpha-c)^2+r^2\,\text{sen}^2\,\alpha \quad .$$

Efectuando los cuadrados, sustituyendo e por c/a y agrupando, se obtiene:

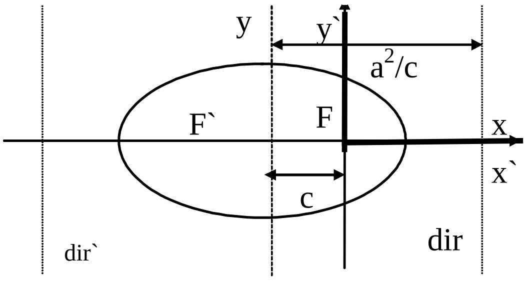
$$r^2=\frac{a^2(c^2-a^2)}{c^2\cos^2\alpha-a^2}=\frac{a^2b^2}{c^2\cos^2\alpha-a^2}\Leftrightarrow r^2=\frac{b^2}{c^2/a^2\cos^2\alpha-1}=-\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\alpha} \quad .$$

La ecuación polar de la hipérbola es, por tanto:

$$\boxed{r^2=-\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\alpha}} \quad .$$

21.- Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el centro de la elipse.

Solución:



Sea P un punto genérico de la elipse, $P=(r,\alpha)$ en coordenadas polares, o bien $P=(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ en cartesianas.

Aplicando la definición de cónica, ha de ser:

$$e=\frac{\sqrt{(r\cos\alpha-c)^2+r^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}}{r\cos\alpha-\frac{a^2}{c}}\ .$$

Vamos a operar en esta expresión con el fin de simplificarla:

$$[e(r\cos\alpha-\frac{a^2}{c})]^2=(r\cos\alpha-c)^2+r^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\ .$$

Efectuando los cuadrados, sustituyendo e por c/a y agrupando, se obtiene:

$$r^2=\frac{a^2(c^2-a^2)}{c^2\cos^2\alpha-a^2}=\frac{-a^2b^2}{c^2\cos^2\alpha-a^2}\Leftrightarrow r^2=\frac{-b^2}{{}^{c^2}\!/_{a^2}\cos^2\alpha-1}=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\alpha}\ .$$

La ecuación polar de la elipse es, por tanto:

$$\boxed{r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\alpha}}.$$

22.- Dada la parábola de ecuación $y^2 = 2px$, hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el vértice de la parábola.

Solución:

Sea P un punto genérico de la parábola, $P = (r, \alpha)$ en coordenadas polares, o bien $P = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$ en cartesianas.

Aplicando la definición de cónica, ha de ser:

$$e = \frac{\sqrt{\left(r\cos\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\alpha}}{r\cos\alpha + \frac{p}{2}} = 1 .$$

Vamos a operar en esta expresión con el fin de simplificarla:

$$\left(r\cos\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = \left(r\cos\alpha + \frac{p}{2}\right)^2 .$$

Efectuando los cuadrados, se obtiene:

$$2r\cos\alpha = r^2\operatorname{sen}^2\alpha$$

La ecuación polar de la parábola es, por tanto:

$$\boxed{r = \frac{2p\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

23.- Hallar la ecuación en polares de la circunferencia de radio "a" y centro en el punto C de coordenadas polares C = (b, θ), suponiendo "b" positivo. ¿Cómo queda la ecuación si la circunferencia pasa por el origen? ¿Y si además el centro está sobre el eje de abscisas? ¿y sobre el de ordenadas?

Solución

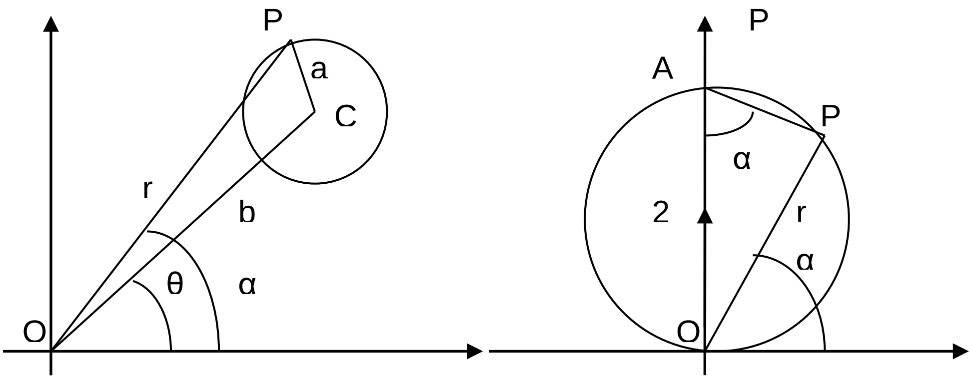


Figura 1 Figura 2

Sea P = (r, α) un punto cualquiera de la circunferencia, como se muestra en la figura 1. Aplicando la fórmula del coseno al triángulo OPC, se obtiene:

$$a^2 = r^2 + b^2 - 2br\ \cos\ (\alpha - \theta) \Rightarrow r^2 - 2br\ \cos\ (\alpha - \theta) + b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$r = \frac{2b\ \cos\ (\alpha - \theta) \pm \sqrt{4b^2 \cos^2\ (\alpha - \theta) - 4(b^2 - a^2)}}{2} =$$

$$\boxed{r = b\ \cos\ (\alpha - \theta) \pm \sqrt{b^2 \cos^2\ (\alpha - \theta) + (a^2 - b^2)}}$$

Para circunferencias que pasan por el origen, es a = b y la ecuación puede escribirse como

$$\boxed{r = 2a \cos (\alpha - \theta)}$$

En particular, cuando $\theta = 0$ (centro sobre el eje de abscisas), queda:

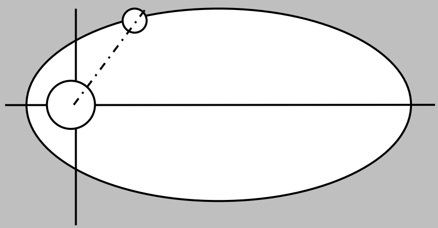
$$\boxed{r = 2a \cos \alpha}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ (centro sobre el eje de ordenadas), al ser $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$, queda:

$$\boxed{r = 2a\ \operatorname{sen}\alpha}$$

En este caso el triángulo OAP de la figura 2 nos proporciona un método geométrico más directo de obtener la ecuación anterior, ya que r es aquí el cateto opuesto al ángulo agudo α.

24.- Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos, como muestra la figura



a) Hallar la ecuación polar de Venus siendo *a* = 6,693·x 10^7 millas; *e* = 0,0068.

b) Hallar la distancia al Sol para el afelio y para α = 10π/9.

c) Hallar las áreas barridas por un rayo trazado desde el Sol hasta el planeta mientras α crece desde 0 hasta π/9 y desde α= π hasta π+π/9.

d) Aplicar la segunda Ley de Kepler para estimar, respectivamente, el tiempo que Venus tarda en recorrer los dos arcos anteriores (período de traslación ≈ 225 días)

Solución:

a)

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}$$

teniendo en cuenta que:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a\left(1 - e^2\right) = 6,693\cdot 10^7\left(1 - 0,0068^2\right) \approx 6,692690515\cdot 10^7$$

$$\boxed{r = \frac{6,692600515\cdot 10^7}{1 - 0,0068\cos\alpha}}$$

b) Distancia del Afelio (millas). α= 0

$$r(\alpha = 0) = \frac{6,692600515\cdot 10^7}{1 - 0,0068\cos 0} \approx \boxed{\mathbf{6,738512396\cdot 10^7}}$$

Distancia al Sol del punto α=10π/9 (en millas)

$$r(\alpha = 10\pi/9) = \frac{6,692600515\cdot 10^7}{1 - 0,0068\cos\left(\frac{10\pi}{9}\right)} \approx \boxed{\mathbf{6.650196357\cdot 10^7}}$$

c) Áreas barridas (en millas al cuadrado)

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{9}} \left(\frac{6,692600515\cdot 10^7}{1 - 0,0068\cos\alpha}\right)^2 d\alpha \approx \boxed{\mathbf{7.922922816\cdot 10^{14}}}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2}\int_\pi^{\pi + \frac{\pi}{9}} \left(\frac{6,692600515\cdot 10^7}{1 - 0,0068\cos\alpha}\right)^2 d\alpha \approx \boxed{\mathbf{7.714554982\cdot 10^{14}}}$$

d) El área total barrida en cada periodo de traslación (225 días) es el área de la elipse:

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{6,692600515\cdot 10^7}{1-0,0068\cos\alpha}\right)^2 d\alpha \approx 1.407283128\cdot 10^{16}$$

Como el planeta tarda tiempos iguales en barrer áreas iguales, mediante una simple regla de tres obtenemos el tiempo en días

$$\frac{7.922922816\cdot 10^{14}}{1.407283128\cdot 10^{16}}225 \approx \boxed{\mathbf{12.66737018}}$$

$$\frac{7.714554982\cdot 10^{14}}{1.407283128\cdot 10^{16}}225 \approx \boxed{\mathbf{12.33422639}}$$

El área barrida desde α=0 hasta α=π/9 es mayor que el área barrida desde α=π hasta α= π+π/9, sin embargo, los arcos de elipse son iguales por tratarse de arcos simétricos, el primero comienza en el afelio y el segundo en el perihelio, luego Venus va a mayor velocidad en el perihelio, como prueba el que Venus tarde menor tiempo en recorrer el segundo arco.

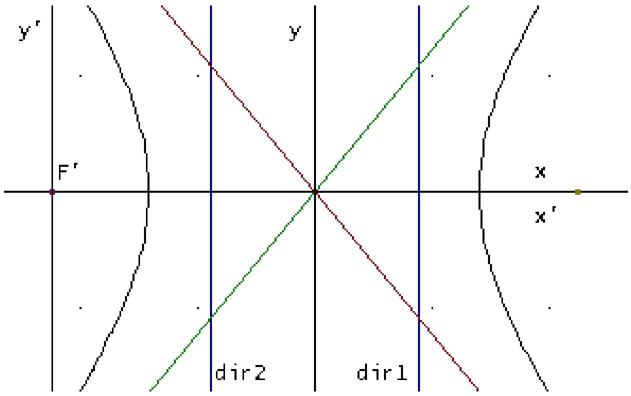
25.- Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{100}=1$ hallar la ecuación polar de su rama derecha suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

i) en el foco izquierdo de la hipérbola.

ii) en el centro de la hipérbola.

En el caso i), hallar la ecuación polar de sus directrices y asíntotas.

Solución:



i) $a^2=169 \Rightarrow a=13$

$b^2=100 \Rightarrow b=10$

$c^2=a^2+b^2=269 \Rightarrow$

$c=\sqrt{269}$

$$\left\{\begin{array}{l} p=\frac{b^2}{a}=\frac{100}{13} \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{269}}{13} \end{array}\right. \underset{\text{caso 4}}{\Rightarrow}$$

$$r=\frac{-p}{1-e\cos\alpha}=\frac{-\frac{100}{13}}{1-\frac{\sqrt{269}}{13}\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{r=\frac{-100}{13-\sqrt{269}\cos\alpha}}$$

Ecuación polar de las **directrices**:

$$dir_1 \equiv x'=c+\frac{a^2}{c}=\sqrt{269}+\frac{169}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow r\ \cos\alpha=\frac{438\sqrt{269}}{269} \Rightarrow \boxed{r=\frac{438\sqrt{269}}{269\cos\alpha}}$$

$$dir_2 \equiv x'=c-\frac{a^2}{c}=\sqrt{269}-\frac{169}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow r\ \cos\alpha=\frac{100\sqrt{269}}{269} \Rightarrow \boxed{r=\frac{100\sqrt{269}}{269\cos\alpha}}$$

Ecuación polar de las **asíntotas**:

Son rectas que, en el sistema de referencia x’ y’, pasan por el punto (c, 0) y tienen de pendiente $\pm\frac{b}{a}$; por tanto, tienen de ecuación:

$$y'=\pm\frac{b}{a}(x'-c) \Leftrightarrow y'=\pm\frac{10}{13}\left(x'-\sqrt{269}\right) \Leftrightarrow r\ \text{sen}\alpha=\pm\frac{10}{13}\left(r\cos\alpha-\sqrt{269}\right)$$

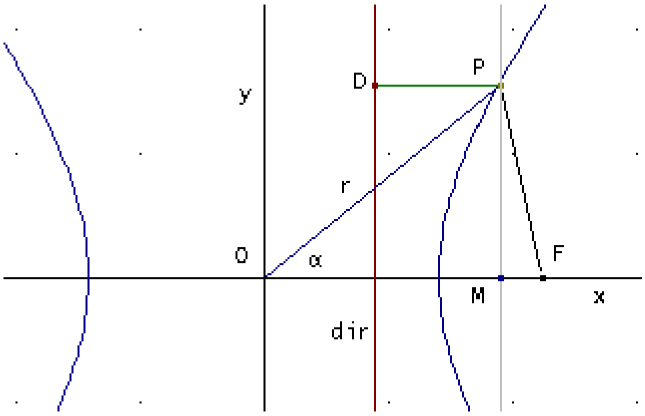
y despejando r se obtiene ya la ecuación polar:

$$\boxed{r=\frac{\mp\frac{10}{13}\sqrt{269}}{\text{sen}\alpha\mp\frac{10}{13}\cos\alpha}}$$

ii)

P (r, α) ∈ hipérbola ⇔ $\dfrac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,\text{dir})} = e$.

Por el teorema del coseno en el triángulo OPF, se verifica:



$$\overline{PF}^{\,2} = r^2 + c^2 - 2rc\cos\alpha$$

$$\text{dist}(P,\text{dir}) = \overline{PD} = \overline{OM} - \frac{a^2}{c} =$$

$$r\cos\alpha - \frac{a^2}{c}$$

Por tanto, $\dfrac{\overline{PF}}{\text{dist}(P,\text{dir})} = e \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc\cos\alpha}}{r\cos\alpha - \dfrac{a^2}{c}} = \dfrac{c}{a}$.

Elevando al cuadrado en la expresión anterior y operando se obtiene:

$$c^2r^2\cos^2\alpha + a^4 = a^2r^2 + a^2c^2 \Leftrightarrow r^2\left(a^2 - c^2\cos^2\alpha\right) = a^4 - a^2c^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) =$$

$$= a^2\left(-b^2\right) \Rightarrow r^2 = \frac{-a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\alpha} = -\frac{b^2}{1 - \dfrac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha} = -\frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\boxed{r^2 = -\frac{100}{1 - \dfrac{269}{169}\cos^2\alpha} = -\frac{16900}{169 - 269\cos^2\alpha}}$$

2º método

Efectuando el cambio a polares en la propia ecuación cartesiana de la hipérbola pues ahora coincide el polo con el origen del sistema de referencia cartesiano:

$$\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{100} = 1 \Leftrightarrow \frac{r^2\cos^2\alpha}{169} - \frac{r^2\text{sen}^2\alpha}{100} = 1 \Leftrightarrow \frac{100r^2\cos^2\alpha - 169r^2\text{sen}^2\alpha}{16900} = 1 \Leftrightarrow$$

$$r^2\left(100\cos^2\alpha - 169\text{sen}^2\alpha\right) = 16900 \Leftrightarrow r^2 = \frac{16900}{100\cos^2\alpha - 169\text{sen}^2\alpha} =$$

$$\frac{16900}{100\cos^2\alpha - 169\left(1 - \cos^2\alpha\right)} = -\frac{16900}{169 - 269\cos^2\alpha}$$

26.- a) Hallar la ecuación polar de la órbita elíptica que describe el planeta Tierra alrededor del sol, sabiendo que: a = 92, 957 x 10^6 millas; e = 0,0167.

b) Hallar la ecuación polar de sus directrices.

c) Hallar las distancias del afelio (punto más alejado) y perihelio (punto más cercano).

Solución:

a) Ecuación polar de la órbita de la Tierra:

e = c/a, luego c = a . e = 1.5523819·x 106 millas;

Conociendo a y c, se obtiene b con la fórmula $b^2 = a^2 - c^2$ y finalmente se calcula el parámetro de la cónica: $p = \frac{b^2}{a} = 9.293107522 \cdot x\, 10^7$ millas.

La ecuación de la órbita es:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \boxed{\frac{9.293107522 \cdot x10^7}{1 - 0.0167\cos\alpha}}$$

b) La ecuación polar de la directriz asociada al foco que coincide con el origen de la referencia polar es:

$$dir1 \equiv x' = -d = -(\frac{a^2}{c} - c) = -5.564735043 \times 10^9 \Rightarrow r\cos\alpha = -5.564735043 \times 10^9 \Rightarrow$$

$$\boxed{r = -\frac{5.564735043 \times 10^9}{\cos\alpha}}$$

La ecuación polar de la directriz asociada al foco que no coincide con el origen de la referencia polar es:

$$dir2 \equiv x' = c + \frac{a^2}{c} = 5.567839807 \times 10^9 \Rightarrow r\cos\alpha = 5.567839807 \times 10^9 \Rightarrow$$

$$\boxed{r = \frac{5.567839807 \times 10^9}{\cos\alpha}}$$

c) Distancia del Perihelio (millas). α= *π*

$$\frac{9.293107522 \cdot x10^7}{1 - 0.0167\cos\pi} = \boxed{9.140461809 \cdot 10^7}$$

Distancia del Afelio (millas). α= 0

$$\frac{9.293107522 \cdot x10^7}{1 - 0.0167\cos 0} = \boxed{9.45093819 \cdot 10^7}$$

27.- a) Hallar una ecuación polar de la órbita de Urano sabiendo que:

a = 287.1 x 10^7 km; e = 0.0461.

b) Calcular la distancia al Sol para el afelio y para $\alpha = \pi/6$.

Solución:

a) Suponiendo el origen de la referencia polar en el foco izquierdo y el eje polar en OX^+, la ecuación es de la forma $r = \dfrac{p}{1-e\cos\alpha}$. Por otro lado, $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = ae$, luego $\text{p} = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{a^2-c^2}{a} = \dfrac{a^2-(ae)^2}{a} = \dfrac{a^2(1-e^2)}{a} = a(1-e^2)$, en consecuencia la ecuación toma la forma $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1-\mathrm{e}\cos\alpha}$, sustituyendo se obtiene $\boxed{r = \dfrac{2.864898522\cdot 10^9}{1-0,0461\cos\alpha}}$.

b) La distancia para el afelio se obtiene para $\alpha = 0 \Rightarrow r(0) =$ **$3.003353099\cdot\cdot 10^9$ km** y la distancia para para $\alpha = \pi/6 \Rightarrow r(\pi/6) =$ **$2.984032346\cdot 10^9$ km**.

28.- Se conoce la excentricidad de la órbita de un cometa e = 0.54769 así como la distancia del cometa al sol en el perihelio q = 1.874519 UA.

a) Hallar una ecuación en polares de la órbita del cometa.

b) Para dicha ecuación, hallar de manera aproximada la distancia del cometa al sol cuando $\alpha = \pi/4$.

c) Hallar también una ecuación en cartesianas de la órbita.

Solución:

a) $e = c / a = 0.54769 \Rightarrow c = 0.54769\, a$

$a = q + c = 1.874519 + 0.54769\, a \Rightarrow a(1-0.54769) = 1.874519 \Rightarrow a = \dfrac{1.874519}{1-0.54769} =$ 4.144323583

$c = 0.54769\, a = 2.269804583 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 12.02340511 \Rightarrow p = \dfrac{b^2}{a} = 2.901174309$

Luego, una ecuación en coordenadas polares de la órbita del cometa es:

$$r = \frac{p}{1-e\cos\alpha} = \boxed{\frac{2.901174309}{1-0.54769\cos\alpha}}$$

b) $r = \dfrac{2.901174309}{1-0.54769\cos\frac{\pi}{4}} = \boxed{\mathbf{4.734874194\ UA}}$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{17.17541796} + \dfrac{y^2}{12.02340511} = 1}$

29.- Se conoce la medida del semieje mayor de la órbita de un cometa a = 4.14432358 UA, así como la distancia del cometa al sol en el perihelio q = 1.874519 UA.

a) Hallar la excentricidad de la órbita del cometa.

b) Hallar una ecuación en polares de la órbita del cometa.

c) Para dicha ecuación, hallar de manera aproximada la distancia del cometa al sol cuando $\alpha = \pi/2$.

d) Calcular la distancia del cometa al sol en el afelio.

e) Hallar también una ecuación en cartesianas de la órbita

Solución:

a) $c = a - q = 2.269804579$, $e = c / a = \boxed{\mathbf{0.5476899993}}$

b) $b^2 = a^2 - c^2 = 12.02340510 \Rightarrow p = \dfrac{b^2}{a} = 2.901174309$

Luego, una ecuación en coordenadas polares de la órbita del cometa es:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\alpha} = \boxed{\frac{2.901174309}{1 - 0.5476899993\cos\alpha}}$$

c)

$$r = \frac{2.901174309}{1 - 0.5476899993\cos\frac{\pi}{2}} = \boxed{2.901174309 \text{ UA}}$$

d)

$$r = \frac{2.901174309}{1 - 0.5476899993\cos 0} = \boxed{6.414128152 \text{ UA}}$$

e)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{17.17541793} + \frac{y^2}{12.02340510} = 1}$$

Ejercicios propuestos

1) Determinar las cónicas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

a) $r = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\alpha}$ **b)** $r = \dfrac{6}{1-\cos\alpha}$ **c)** $r = \dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\alpha}$

d) $r = \dfrac{12}{2-\cos\alpha}$ **e)** $r = \dfrac{5}{3-4\cos\alpha}$ **f)** $r = \dfrac{1}{3-3\cos\alpha}$

Solución:
a) Elipse **b)** Parábola **c)** Una rama de una hipérbola **d)** Elipse **e)** Una rama de una hipérbola **f)** Parábola.

2) Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$, hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

a) en el foco izquierdo de la hipérbola;
b) en el foco derecho.

Solución:
a) $r = \dfrac{144}{5+13\cos\alpha}$ **b)** $r = -\dfrac{144}{5+13\cos\alpha}$

3) Hallar en la elipse $r = \dfrac{12}{3-\sqrt{2}\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

Solución:
$\left(6,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\ -\frac{\pi}{4}\right)$

4) Hallar en la hipérbola $r = \dfrac{15}{3-4\cos\alpha}$ los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

Solución:
$\left(3,\ 2\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(6,\ -2\frac{\pi}{3}\right)$.

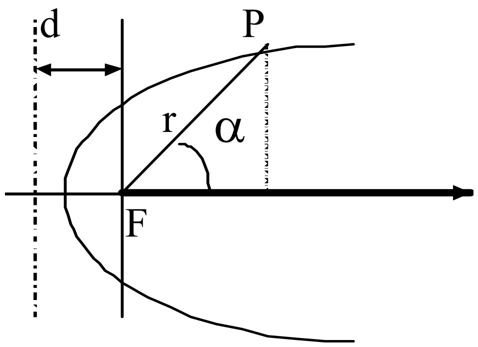
5) Hallar en la parábola $r = \dfrac{p}{1-\cos\alpha}$ los puntos:

a) cuyos radios polares sean mínimos.
b) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

Solución:
a) $\left(\frac{p}{2},\pi\right)$, **b)** $\left(\frac{\pi}{2},p\right)$, $\left(p,-\frac{\pi}{2}\right)$

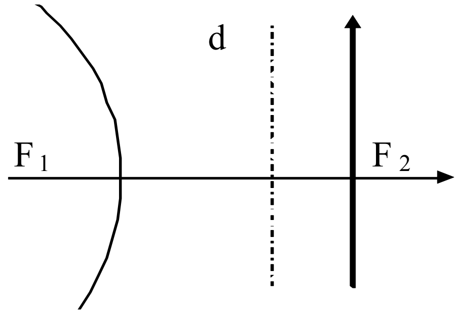
Cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a un punto fijo F (llamado **foco**) y a una recta fija (llamada **directriz**) es una cantidad constante e (llamada excentricidad). Además, la cónica es una ***elipse*** si $0 \le e < 1$, una ***parábola*** si $e = 1$ y una ***hipérbola*** si $e > 1$.

Ecuación polar de una cónica (elipse, una rama de hipérbola ó parábola)

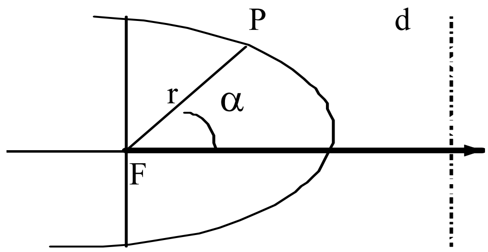


1) Si el polo se sitúa en el foco, el eje polar es perpendicular y va en dirección opuesta a la directriz (cuya distancia al foco es d), y la cónica está en el mismo semiplano que el foco respecto de la directriz, entonces la ecuación de la cónica en coordenadas polares es $\boxed{r = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha}}$, donde p es el parámetro focal, p = d e = (longitud de la semicuerda focal).

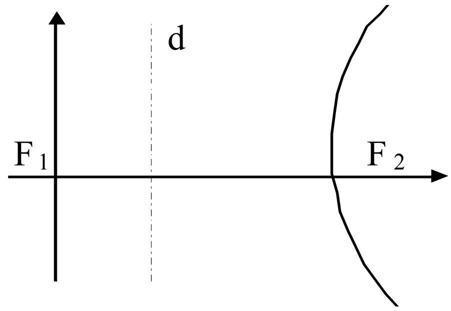
2) Si, con el mismo sistema polar de coordenadas que en el caso anterior, la cónica y el foco están en distinto semiplano respecto de la directriz, la ecuación es $r = \dfrac{-p}{1 + e\cos\alpha}$. (corresponde a una rama de la **hipérbola**)



3) Si el polo sigue en el foco, pero, el eje polar va hacia la directriz, y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz, la ecuación es: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\alpha}$

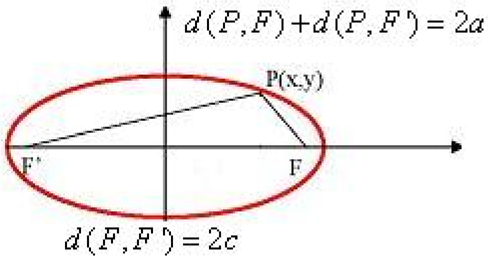


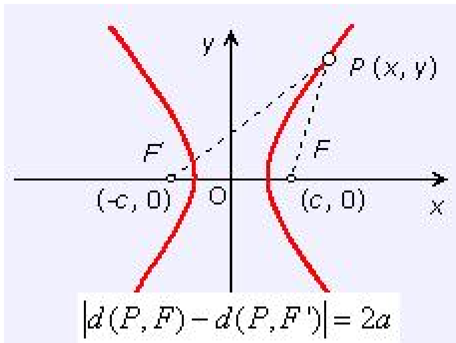
4) Si, con el mismo sistema polar de coordenadas que en el caso 3, la cónica y el foco están en distinto semiplano respecto de la directriz, la ecuación es $r = \dfrac{-p}{1 - e\cos\alpha}$. (corresponde a una rama de la **hipérbola**)

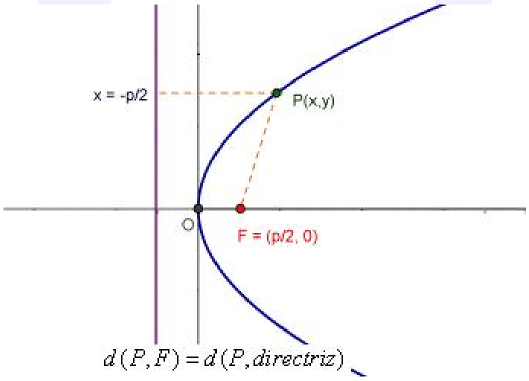


Focos

Focos de una sección cónica son los puntos de contacto de su plano con las esferas inscritas en el cono y tangentes a dicho plano (el de la sección).
Relativo a una cónica es cada uno de los puntos fijos que determinan la cónica. Las cónicas con centro (elipse e hipérbola) tienen dos (a una distancia c del centro) y la parábola uno.







Folium de Descartes
Hoja de Descartes (1638)

Directriz

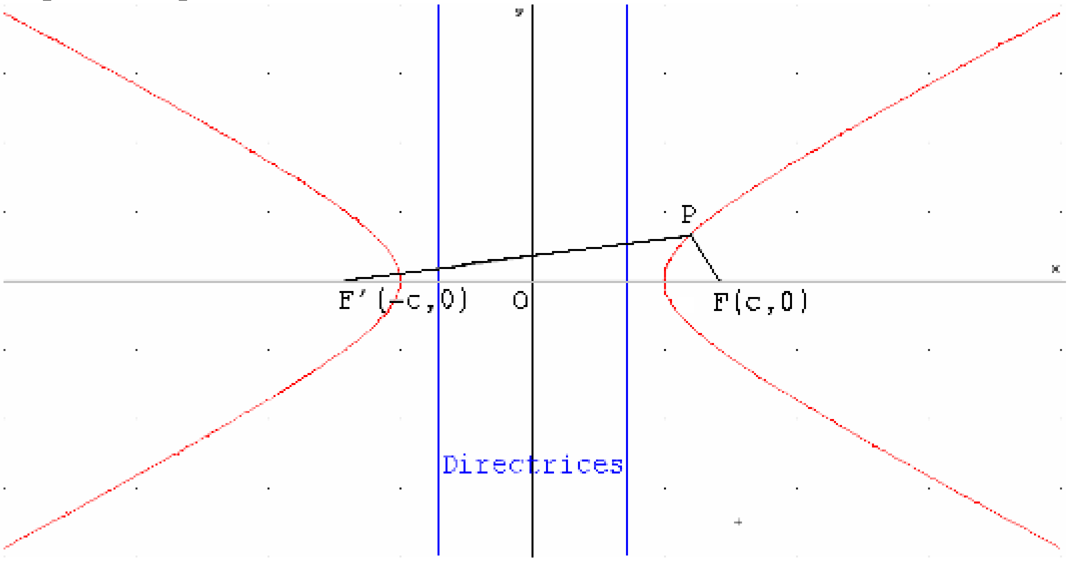
Directriz de una sección cónica es la recta intersección del plano de la cónica con el plano que contiene a la circunferencia de contacto (con el cono) correspondiente a uno de los focos.
En una cónica es la recta fija que la determina. Las cónicas con centro (elipse e hipérbola) tienen dos y la parábola una.

Hipérbola

La diferencia de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola a los focos es igual a 2a.

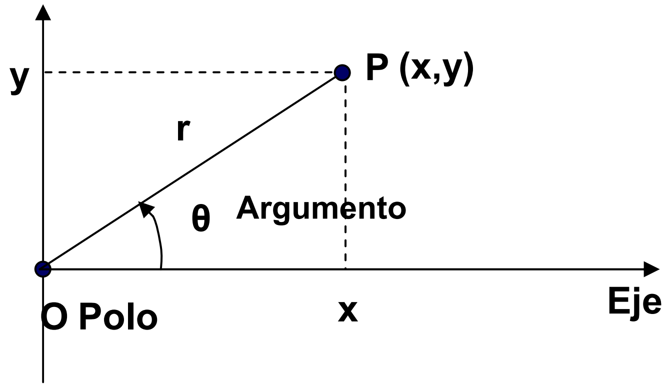
Sea la hipérbola de ecuación canónica $\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} - \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}$, entonces:

- **Excentricidad:** $e = \frac{c}{a} > 1$
- **Vértices**: A(a,0); A'(-a,0).
- **Focos**: F(c,0); F'(-c,0).
- **Directrices**: $x = a^2 / c; x = -a^2 / c$
- **Ejes de simetría**: x=0; y=0; eje focal: y=0
- **Centro**: O(0,0) punto de intersección de los ejes de simetría
- **Distancia focal**: d(F,F')=2c.
- **Parámetro focal**: $p = b^2 / a$
- **Hipérbola equilátera:** cuando a=b



Coordenadas polares

Sea O un punto fijo del plano, denominado “**polo**” y sea la semirrecta de origen O, denominada “**eje polar**”. Entonces cualquier punto del plano P, queda determinado por el par (r, θ) siendo r la distancia euclídea del punto P al polo (r > 0) y θ el **argumento**, el ángulo formado por el eje polar y el segmento OP en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). $\begin{cases} \mathbf{x = r\cos\theta} \\ \mathbf{y = r\,sen\theta} \end{cases}$



Asíntotas de una función

Verticales: Si x → a ⇒ y → ∞.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es una asíntota vertical}$$

(Sólo puede haber asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio)

Horizontales: Si x → ∞ ⇒ y → b.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b \text{ es una asíntota horizontal}$$

Oblicuas: y = mx + n es una asíntota oblicua, siendo:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right); \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

Nota: las asíntotas nos informa de si la función está o no acotada.

Asíntotas de una hipérbola

Las **asíntotas** de una hipérbola son rectas que pasan por el centro de la cónica y tienen de pendiente m, solución de la ecuación: $a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0$.
Este último resultado se obtiene de aplicar que, en general, las asíntotas oblicuas a una curva de ecuación y = f(x) tienen de pendiente $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

Asíntotas en una curva plana

En este párrafo, t_0 puede ser un número real ó $\pm\infty$.

a) Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = a$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, entonces: la recta **x = a** es **asíntota vertical**.

b) Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = b$, entonces: la recta **y = b** es **asíntota horizontal**.

c) Si $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$

c₁) Si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$, la curva carece de asíntota y se dice que tiene una **rama parabólica**.

c₂) Si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m$

c₂₁) $\lim_{t \to t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) = \pm\infty$, entonces no hay asíntota; tiene una **rama parabólica**.

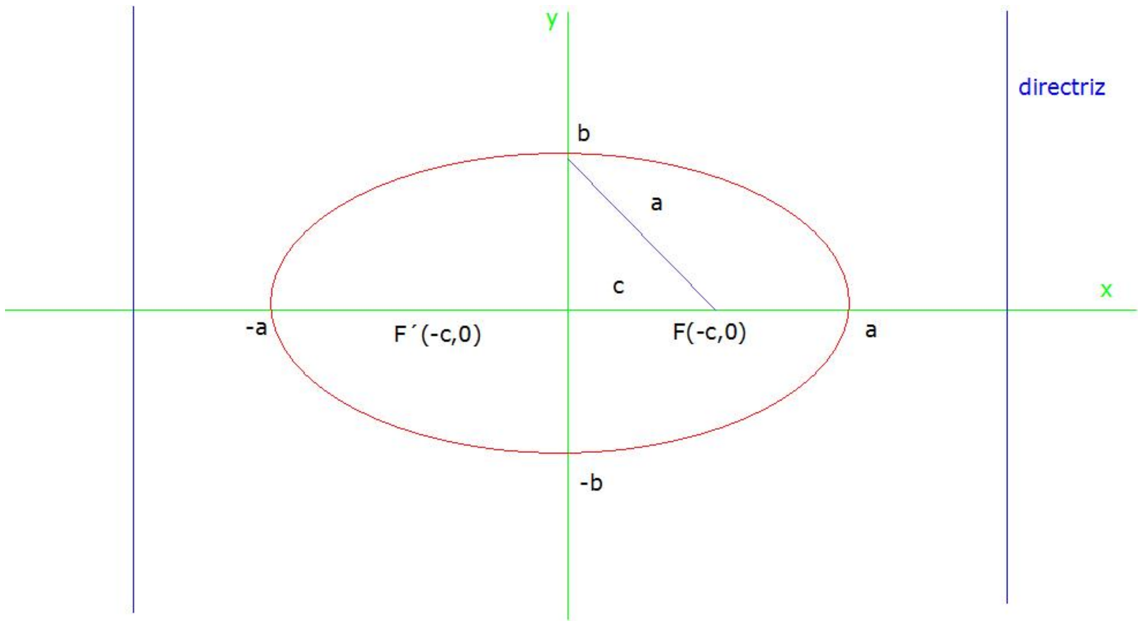
c₂₂) $\lim_{t \to t_0} (y(t) - m \cdot x(t)) = b$, entonces la recta **y = mx + b** es **asíntota oblicua**.

Elipse

La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual al doble de su semieje mayor.

Sea la **elipse** de ecuación reducida $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$, entonces:

- **Excentricidad:** $e=\frac{c}{a}<1$
- **Vértices:** A(a,0); A´(-a,0); B(0,b); B´(0,-b).
- **Semieje mayor**: a; **semieje menor**: b.
- **Focos**: F(c,0); F'(-c,0).
- **Directrices**: $x=\pm\frac{a^2}{c}$
- **Ejes de simetría**: x=0; y=0; eje focal o eje mayor: y=0.
- **Centro**: O(0,0) punto de intersección de los ejes de simetría.
- **Distancia focal**: d(F,F´)=2c.
- **Parámetro focal**: $p=b^2/a$

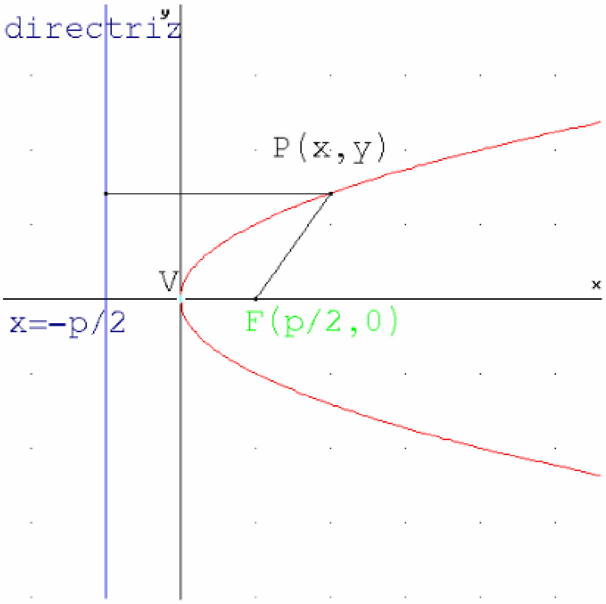


Parábola

Parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado **foco**, y una recta fija r, llamada **directriz**.

Sea la parábola de ecuación reducida $\mathbf{y^2 = 2px}$, entonces:

- **Foco**: F (p/2,0).
- **Directriz**: x= - p/2.
- **Eje de simetría**: es la perpendicular del foco a la directriz y=0
- **Vértice**: O(0,0) punto de intersección de la curva con el eje de simetría.
- **Parámetro**: es la distancia del foco a la directriz p.
- **Excentricidad**: e=1



Semiejes

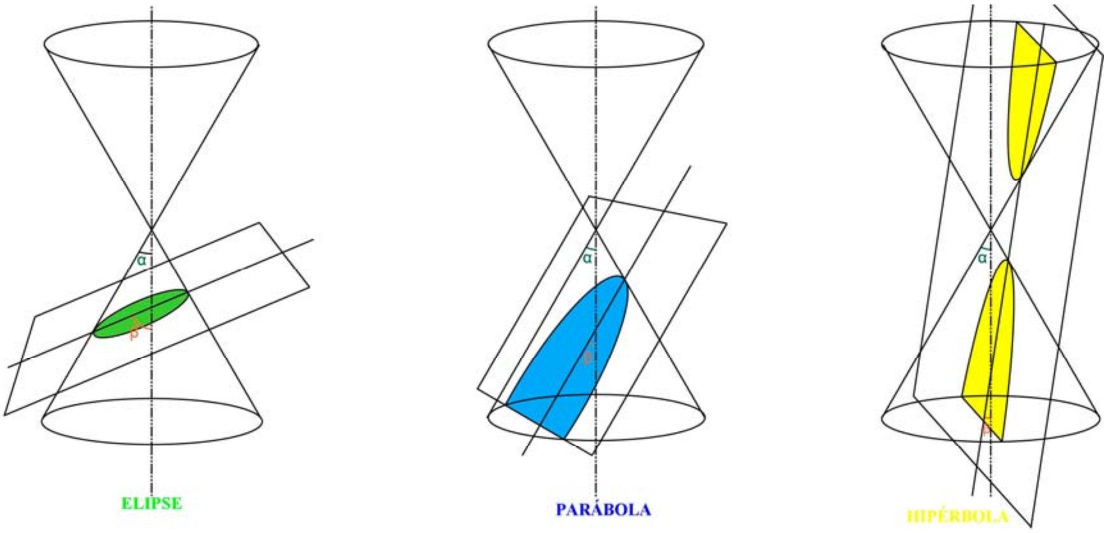
En una elipse son las distancias entre los vértices divididas por dos:

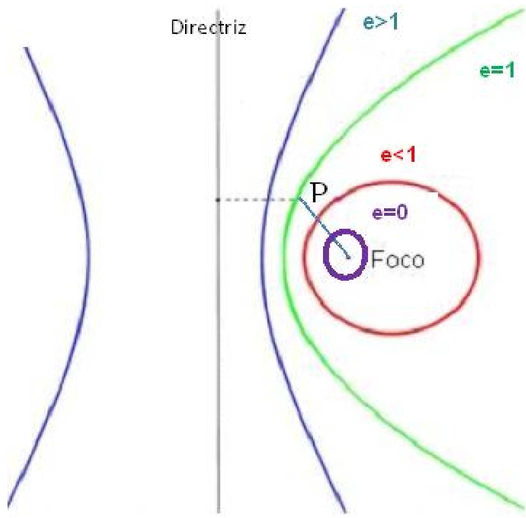
- **Semieje mayor**: a
- **Semieje menor**: b

Excentricidad

Valor constante del cociente de la distancia de los puntos de la cónica al foco y a la directriz. En el caso de la **elipse** es menor que 1, igual a 1 para la **parábola** y mayor que 1 en la **hipérbola**.

$e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \dfrac{c}{a}$; siendo c la semidistancia focal y a el semieje real





Eje

Eje es la recta del plano o del espacio que sirve de referencia a los puntos de ese plano o de ese espacio o bien a una figura o a una transformación**.**
La elipse y la hipérbola tienen dos **ejes de simetría**; la parábola solamente uno que pasa por su vértice.

Eje de coordenadas: cada una de las rectas mediante las que se define un sistema de coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.
Eje de abscisas: eje de coordenadas, generalmente horizontal, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina X.
Eje de ordenadas: eje de coordenadas, generalmente vertical, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina Y.

Eje focal: en una cónica es el eje de simetría que contiene a los focos.

- **Eje mayor** en la elipse corresponde al eje focal
- **Eje menor** en la elipse corresponde al eje no focal

Eje polar en coordenadas cartesianas polares es la semirrecta que parte del polo.

Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias.

Apogeo y Perigeo

Apogeo: punto más alejado a la Tierra en la trayectoria de un cuerpo en su movimiento alrededor de ella.
Perigeo: punto más próximo de la Tierra en la trayectoria de un cuerpo en su movimiento alrededor de ella.

Afelio y Perihelio

Afelio: punto más alejado del Sol en la trayectoria de un cuerpo en su movimiento alrededor de él.
Perihelio: punto más próximo al Sol en la trayectoria de un cuerpo en su movimiento alrededor de él.

Centro

- Punto alrededor del cual la figura es simétrica (centro de la elipse o de la hipérbola).
- Las transformaciones geométricas que tienen un único punto invariante se denomina **centro**. Así tenemos el centro del giro en el plano, el centro de homotecia y el centro de semejanza cuando la razón es $k \neq 1$.
- **Centro radical** de tres circunferencias es un punto del plano que tienen la misma potencia respecto de las tres circunferencias.