Gráficas de Funciones en explícitas

1.- Sea la función $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

1. ***Dominio*.**
2. **Signo de f(x) en función de x.**
3. ***Asíntotas*.**
4. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*.**
5. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*.**
6. ***Cortes con los ejes de coordenadas*.**
7. **Gráfica aproximada.**

Solución

2.- Sea la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$, se pide:

1. ***Dominio*.**
2. **Signo de f(x) en función de x.**
3. ***Asíntotas*.**
4. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.***
5. ***Cortes con los ejes de coordenadas*.**
6. **Gráfica aproximada.**

Solución

3.-Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, hallar:

a) Intervalos de *crecimiento* y *decrecimiento*. *Máximos* y *mínimos* relativos.

b) Intervalos de *concavidad* y *convexidad*. *Puntos de inflexión*.

Solución

4.- Dada la función $f(x) = \mathrm{sen}x - \dfrac{1}{3}\mathrm{sen}(3x)$, se pide:

a) Probar que *f*(*x*) es *continua* y *derivable* en todo R

b) Probar que *f*(*x*) es periódica con *periodo* T=2π.

c) Utilizando las fórmulas de trigonometría plana $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$, $\mathrm{sen}(2\alpha) = 2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha$ y $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha$, probar que:

$$f(x) = \mathrm{sen}x - \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) = \frac{4}{3}\mathrm{sen}^3x$$

d) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas en el intervalo [0,2π]

e) Probar que la curva no posee *asíntotas* horizontales, verticales u oblicuas.

f) Utilizando la resolución numérica de ecuaciones con Derive, calcular los extremos relativos y puntos de inflexión de *f*(*x*) en el intervalo [0, 2π].

g) Deduce de los apartados a) y *f*) los intervalos de *crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad* en dicho intervalo.

Solución

5.- Realizar un estudio completo de la función $y = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$

Solución

6.- Realizar un estudio completo de la función $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

Solución

7.- Realizar un estudio completo de la función $g(x)=\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}}$

Solución

8.- Dada la función $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Se pide calcular:

a) *Dominio*.
b) *Simetrías*.
c) *Puntos críticos*.

Solución

9.- Dada la función $y=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$. Se pide calcular:

a) *Dominio*.
b) *Simetrías*.
c) *Puntos críticos*.

Solución

10.- Dada la función $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$. Se pide calcular:

a) *Dominio*.
b) *Simetrías*.
c) *Puntos críticos*.

Solución

11.- Hacer un estudio y representar gráficamente la curva:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$$

Solución

12.- Representar gráficamente la función $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

Solución

13.-Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Solución

14.- Dada la curva $f(x)=-\dfrac{240\,x\,(3x^4-10x^2+3)}{\left(x^2+1\right)^6}$, se pide estudiar:

Solución

15.- Hallar el *dominio* y hacer un estudio de las *asíntotas, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad, convexidad, puntos de inflexión* y representar gráficamente la función: $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$.

Solución

1.- Sea la función $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

1 Dominio.
2. Signo de f(x) en función de x.
3. Asíntotas.
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.
5. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
6. Cortes con los ejes de coordenadas.
7. Gráfica aproximada.

Solución:

1. Dominio = **R - $\{0\}$**.
2. $f(x) \begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \\ <0 & \text{si } x<0 \end{cases}$, pues la exponencial es **siempre positiva**.
3. Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0\cdot 0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} +\infty$$

Luego, $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Luego, **no hay asíntotas horizontales**.

Oblicuas: $y = m\,x + n$.

Para $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x\to +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \underset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} 1$$

Análogamente, se obtiene también para $-\infty$ la asíntota:

$y = x + 1$

Corte con la asíntota: $x\,e^{\frac{1}{x}} = 1 + x$; no hay (DERIVE)

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

$y' = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$; no existe y' en $x = 0$.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f ’(x)	$\frac{-}{-} = +$	No existe	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
f(x)	$\uparrow$ **Creciente**	No existe	$\downarrow$ **Decreciente**	**e** **Mín Rel (1, e)**	$\uparrow$ **Creciente**

5. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \,; \quad \text{no existe } y'' \text{ en } x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f ''(x)	-	No existe	+
f(x)	**convexa**	**No existe**	**cóncava**

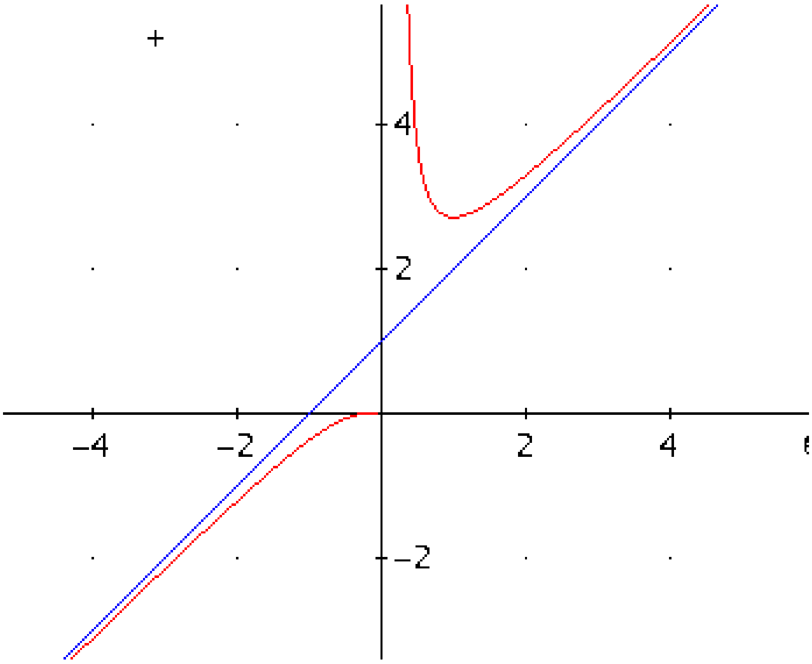
6. Cortes con los ejes de coordenadas.

Con OX: $y = 0 = x\, e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$

No hay corte, pero $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Con OY: $x = 0 \notin \text{Dom } f \Rightarrow$ **No hay corte**.

7. Gráfica aproximada:



2.- Sea la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$, se pide:

1.- Dominio.
2. Signo de f(x) en función de x.
3. Asíntotas.
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.
5. Cortes con los ejes de coordenadas.
6. Gráfica aproximada.

Solución:

1. Dominio = $\boxed{(-\infty,0]\cup(1,\infty)}$.

2. f(x) es siempre **positiva**.

3. Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

No hay

Horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$

Luego, **no hay asíntotas horizontales**.

Oblicuas: $y=mx+n$.

Para $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\frac{1}{2}$$

y = x + 1/2 Corte con la asíntota: (-1/3,1/6)

Análogamente, se obtiene también para $-\infty$ la asíntota:

y =-x - 1/2

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\,\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\dfrac{3}{2}\end{cases};\quad \text{no existe } y' \text{ en } x=0.$$

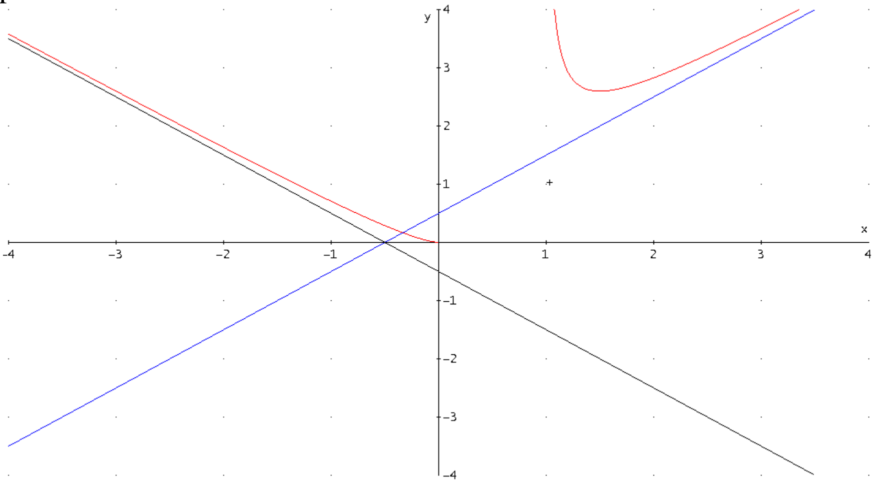
	$(-\infty,0)$	0	1	(1,3/2)	3/2	$(3/2,\infty)$
f ’	-	No existe	No existe	-	0	+
f	**Decreciente**	**0** **Mín Rel** **(0,0)**	**No existe**	**Decreciente**	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **Máx Rel**	**Creciente**

5. Cortes con los ejes de coordenadas.

Con OX: $y=f(x)=0\Rightarrow \boxed{x=0}$

Con OY: $x=0\Rightarrow$ **y=0**

6. Gráfica aproximada:



3.-Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, hallar:

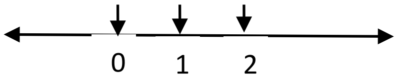
a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

b) Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Solución:

a) Hallamos los puntos críticos (donde la derivada se anula o no existe): $f'(x)=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)^2}$,

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,2$ y $f'(x)$ no existe en $x=1$.



	(-∞, 0)	**(0,1)**	**(1,2)**	**(2, ∞)**
Signo(f '(x)	+ ↗	↘	↘	+ ↗

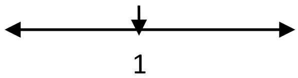
La función es estrictamente creciente en **(-∞, 0)∪ (2, ∞)**

La función es estrictamente creciente en **(0,1)∪ (1,2)**

En consecuencia la función presenta un valor máximo en x=0 cuyo valor es f(0)=0 y un valor mínimo en x=2 cuyo valor es f(2)=4, es decir, **M=(0,0) y m=(2,4)**

b) Hallamos la segunda derivada $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$

$f''(x)\neq 0$ para cualquier x y $f'(x)$ no existe en x=1.



	(-∞, 1)	**(1, ∞)**
Signo(f ''(x))	**convexa**	**+ cóncava**

4.- Dada la función $f(x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$, se pide:

a) Probar que *f*(*x*) es continua y derivable en todo R

b) Probar que *f*(*x*) es periódica con periodo T=2π.

c) Utilizando las fórmulas de trigonometría plana $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ y $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$, probar que:

$$f(x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)=\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3x$$

d) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas en el intervalo [0,2π]

e) Probar que la curva no posee asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

f) Utilizando la resolución numérica de ecuaciones con Derive, calcular los extremos relativos y puntos de inflexión de *f*(*x*) en el intervalo [0, 2π].

g) Deduce de los apartados a) y *f*) los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad en dicho intervalo.

Solución:

a) El dominio de la función $f(x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$ es **R** por ser **R** el dominio de sen*x* y de sen(3*x*). Análogamente *f*(*x*) es continua y derivable en **R** por serlo sen*x* y sen(3*x*).

b) sen*x* es una función periódica de periodo 2π y sen(3*x*) es una función periódica de periodo 2π/3 (sen(3*x*) toma todos los valores posibles cuando 0≤ 3*x* ≤ 2π, luego sen(3*x*) toma todos los valores posibles cuando 0≤ *x* ≤ 2π/3). Por tanto el periodo es 2π

c) $f(x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(2x+x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}(2x)\cos x+\cos(2x)\operatorname{sen}x\right)$

$=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\left(2\operatorname{sen}x\cos^2x+\left(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x\right)\operatorname{sen}x\right)=\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3x$

d) $\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3x=0\Rightarrow x=0,\ \pi,\ 2\pi$, luego son los puntos **(0,0)**, con OX y OY, **(π, 0), (2π,0)**.

e) Al ser periódica la función no puede tener asíntotas horizontales ni oblicuas, y por ser acotada $-\frac{4}{3}\le f(x)\le\frac{4}{3}$ la función **no tiene asíntotas** verticales.

f) Los puntos críticos son aquellos donde *f'*(*x*) = 0, o no existe, pero como en este caso *f* es derivable en **R,** solo calculamos los ceros de *f'*(*x*) (nos ayudamos con la *Fig.* 1**)**:

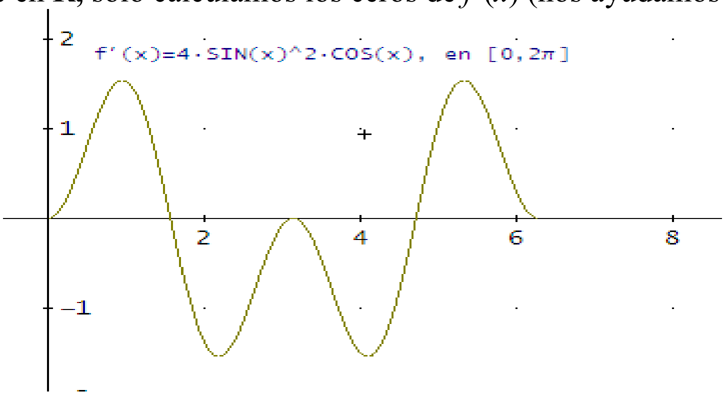


Figura 1: gráfica de f'(x) en [0,2π]

$$f'(x) = 4\text{sen}^2 x\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases}\text{sen}x = 0\\ \cos x = 0\end{cases} \Rightarrow \text{de forma exacta}$$

, $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

Para discriminar si corresponden a extremos o no, sustituimos en $f''(x)$

$$f''(0) = 12sen0\cos^2 0 - 4\text{sen}\,0 = 0$$
$$f''(\pi/2) = 12sen(\pi/2)\cos^2(\pi/2) - 4\text{sen}(\pi/2) = -4$$
$$f''(\pi) = 12sen(\pi)\cos^2(\pi) - 4\text{sen}(\pi) = 0$$
$$f''(3\pi/2) = 12sen(3\pi/2)\cos^2(3\pi/2) - 4\text{sen}(3\pi/2) = 4$$
$$f''(2\pi) = 12sen(2\pi)\cos^2(2\pi) - 4\text{sen}(2\pi) = 0$$

Observamos que f''(x) se anula en x=0, π, 2π, en estos valores hallamos el valor de

$$f'''(x) = 36\cos^3 x - 28\cos x \Rightarrow \begin{cases}f'''(0) = 8\\ f'''(\pi) = -8\\ f'''(2\pi) = 8\end{cases}$$

Pero podría haber otros puntos de inflexión, además de éstos por lo que debemos hallar todas las raíces de $f''(x)$ en $[0,2\pi]$

Observamos en la *Fig.2* que *f ''(x)*, además de anularse en *x*=0, π, 2π, también se anula:

- en un punto del interior del intervalo [0.5, 1.5]
- en un punto del interior del intervalo [1.5, 2.5]
- en un punto del interior del intervalo [3.5, 4.5]
- en un punto del interior del intervalo [4.5, 5.5]

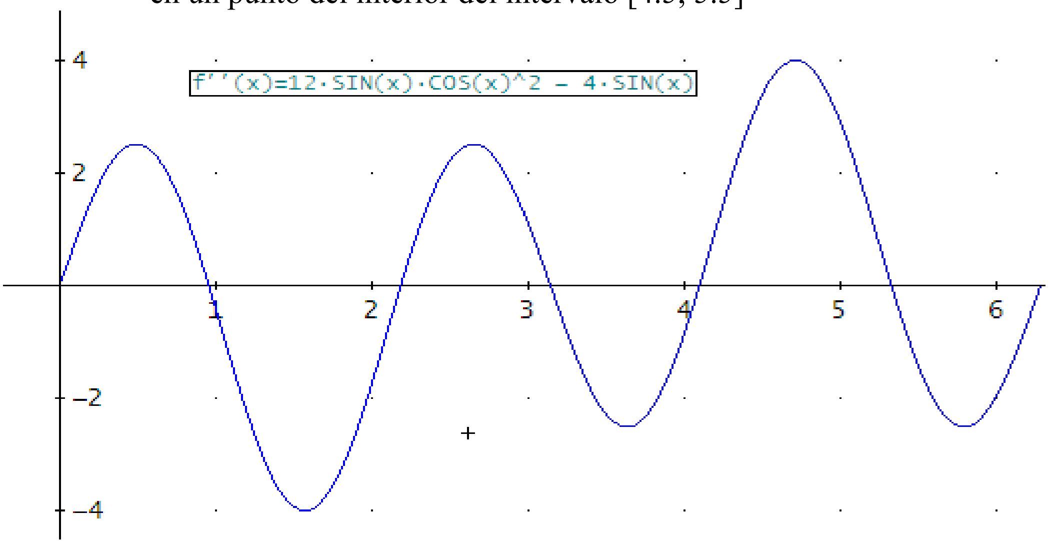


Figura 2: gráfica de f''(x) en [0,2π]

```
NSOLVE(12·SIN(x)·COS²(x)  - 4·SIN(x), x, 0.5, 1.5)= 0 ⇒ x = 0.9553166031
NSOLVE(12·SIN(x)·COS²(x)  - 4·SIN(x), x, 1.5, 2.5)= 0 ⇒ x = 2.186276018
NSOLVE(12·SIN(x)·COS²(x)  - 4·SIN(x), x, 3.5, 4.5) )= 0 ⇒ x = 4.096909254
NSOLVE(12·SIN(x)·COS²(x)  - 4·SIN(x), x, 4.5, 5.5)= 0 ⇒ x = 5.327868670
```

Luego, la función presenta:

- **un mínimo relativo en x=3π/2=4.71238898 →** $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{4}{3}\right)$

- **un máximo relativo en $x=\pi/2=1.570796326 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2},\frac{4}{3}\right)$**
- **punto de inflexión en $x=0 \rightarrow (0,0)$,**
- **punto de inflexión en $x= 0.9553166031 \rightarrow (0.9553166031, 0.7257747154)$,**
- **punto de inflexión en $x= 2.186276018 \rightarrow (2.186276018, 0.7257747154)$,**
- **punto de inflexión en $x= \pi \rightarrow (\pi,0)$**
- **punto de inflexión en $x= 4.096909254 \rightarrow (4.096909254, -0.7257747154)$,**
- **punto de inflexión en $x= 5.327868670 \rightarrow (5.327868670, -0.7257747154)$,**
- **punto de inflexión en $x= 2\pi \rightarrow (2\pi,0)$**

g) Por ser la función derivable en su dominio, de los resultados del apartado anterior y de la Fig. 1 se deduce que en el intervalo $[0, 2\pi]$:

- $f'(x) > 0$ en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ luego es estrictamente creciente en dichos intervalos.
- $f'(x) < 0$ en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ luego es estrictamente decreciente en dicho intervalo.
- $f''(x) > 0$ en $(0, 0.9553166031) \cup (2.186276018,\pi) \cup \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \cup (4.096909254, 5.327868670)$ luego es cóncava en dichos intervalos.
- $f''(x) < 0$ en $(0.9553166031, 2.186276018) \cup (\pi,4.096909254) \cup, (5.327868670, 2\pi)$ luego es convexa en dichos intervalos.

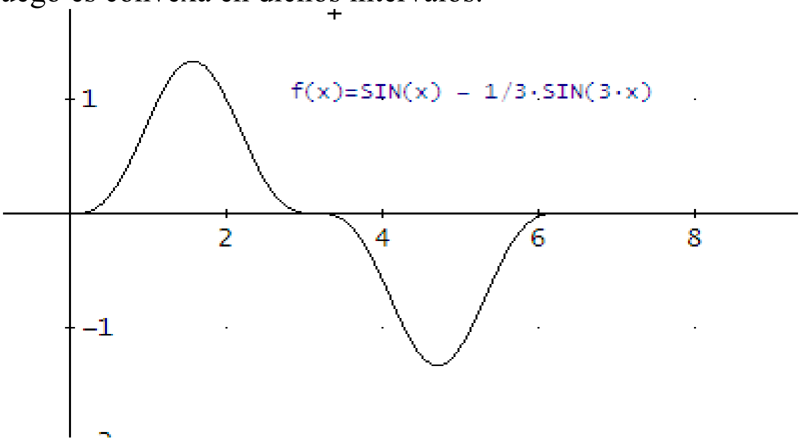
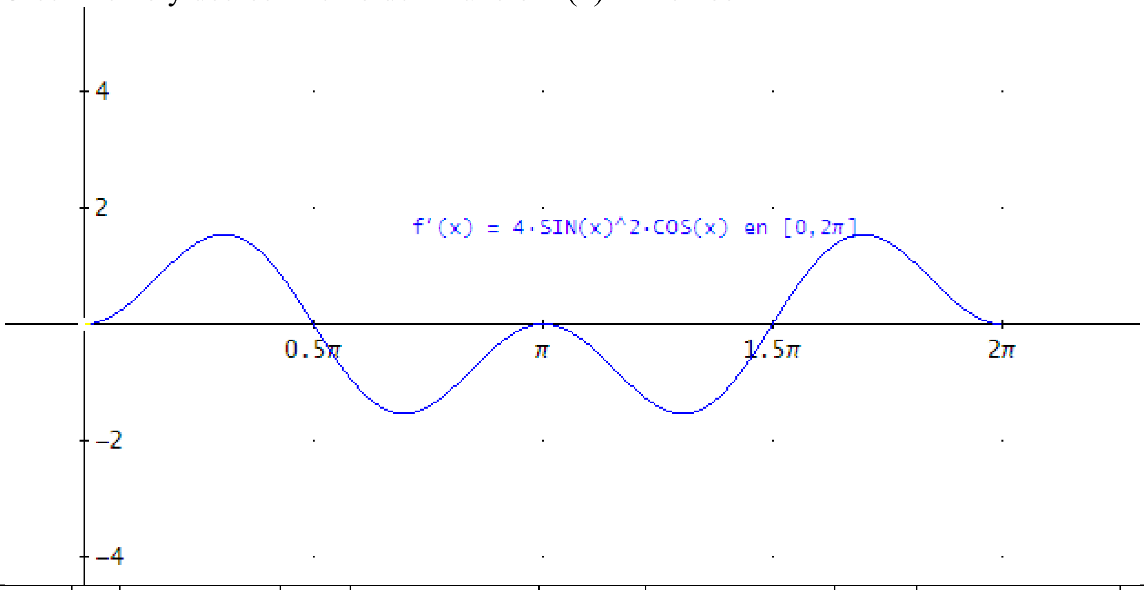


Figura 3: gráfica de f(x) en $[0,2\pi]$

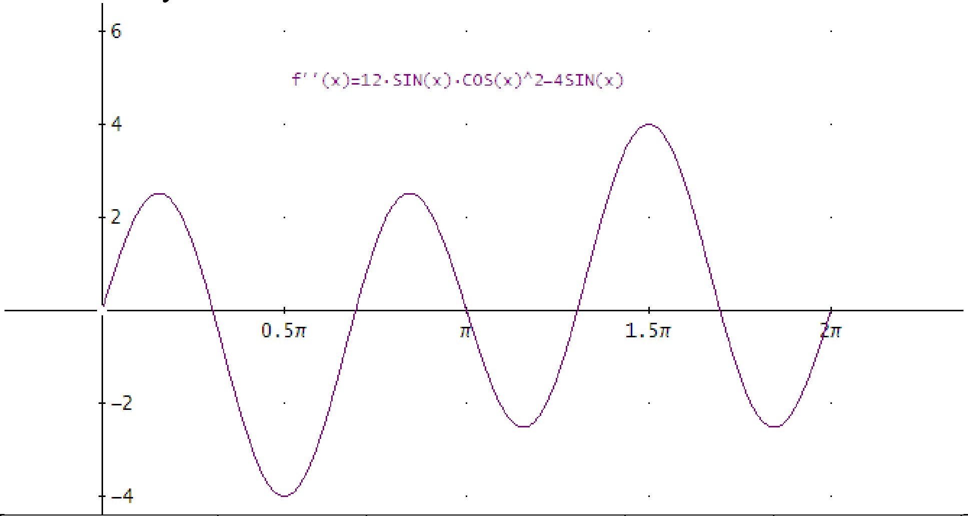
Crecimiento y decrecimiento de la función f(x) Extremos



x	0	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	π	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	2π
f '(x)	0	+	0	-	0	-	0	+	0
f(x)	**0**	**Creciente**	**4/3**	**Decreciente**	**0**	**Decreciente**	**-4/3**	**Creciente**	**0**

- un **mínimo relativo** en $x=3\pi/2 \rightarrow \boxed{\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{4}{3}\right)}$
- un **máximo relativo** en $x=\pi/2 \rightarrow \boxed{\left(\frac{\pi}{2},\frac{4}{3}\right)}$

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión



x	0	0<x<0,955	0.955316	0,955 < x < 2,186	2.186276	2,18 < x < π	π	π < x < 4,09	4.09690	4,09<x<5,327	5.327868	5,327<x<2π	2π
f ''(x)	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0
f(x)	0	cóncava	0.72577	convexa	0.72577	cóncava	0	convexa	-0.7257	cóncava	-0.7257	convexa	0

- punto de inflexión en x=0 → (0,0),
- punto de inflexión en x= 0.9553166031→ (0.9553166031, 0.7257747154),
- punto de inflexión en x= 2.186276018 → (2.186276018, 0.7257747154),
- punto de inflexión en x= π→ (π,0)
- punto de inflexión en x= 4.096909254→ (4.096909254, -0.7257747154),
- punto de inflexión en x= 5.327868670→ (5.327868670, -0.7257747154),
- punto de inflexión en x= 2π → (2π,0)

5.- Realizar un estudio completo de la función $y=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$.

Solución:

a) Dominio = $\boxed{\mathbb{R}}$; Observamos que:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}=\sqrt[3]{x(x+1)^2}=\begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \\ =0 & \text{si } x=0\ ;\ x=-1 \\ <0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

b) Simetrías. $f(-x)=\sqrt[3]{-x(-x+1)^2}\neq\begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$. No tiene

c) Asíntotas

Verticales: No hay (Dom = R)

Horizontales: No hay ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$)

Oblicuas: y=mx+n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+2/x+1/x^2}=1\neq 0\,;$$

Nota: para el siguiente límite usamos la descomposición en factores de la diferencia de cubos.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);a=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x};b=x$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}-x\right)\left(\left(x^3+2x^2+x\right)^{2/3}+x\left(x^3+2x^2+x\right)^{1/3}+x^2\right)}{\left(x^3+2x^2+x\right)^{2/3}+x\left(x^3+2x^2+x\right)^{1/3}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+x-x^3}{\left(x^3+2x^2+x\right)^{2/3}+x\left(x^3+2x^2+x\right)^{1/3}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{\left(x^3+2x^2+x\right)^{2/3}+x\left(x^3+2x^2+x\right)^{1/3}+x^2}=.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2\left(\frac{\left(x^3+2x^2+x\right)^{2/3}}{x^2}+\frac{\left(x^3+2x^2+x\right)^{1/3}}{x}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3}+1}=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{y=x+\frac{2}{3}}$$

Puntos de corte con la asíntota:

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x} \\ y=x+\dfrac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow\boxed{\left(-\frac{8}{9},\ -\frac{2}{9}\right)}$$

d) Crecimiento y **decrecimiento**. Máximos y mínimos:

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}}\left(3x^2+4x+1\right)=0\Rightarrow x=\begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$
f ’	+	No existe	-	0	+
f	↑ Creciente	0 Máx Rel	↓ Decreciente	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ Mín	↑ Creciente

e) Concavidad y **convexidad**. Puntos de Inflexión.

$$y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x+1)^4}} \quad \begin{cases} >0 & \text{si } x<0,\ x\neq -1 \\ <0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

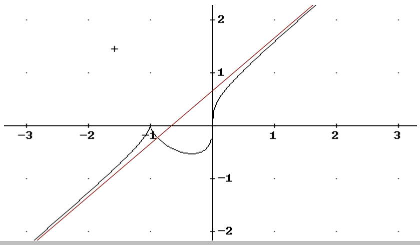
$y''(x)\neq 0\ \ \forall x$; $y''(x)$ no existe en $x=-1$ y en $x=0$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
f ’’	+	No existe	+	No existe	-
f	cóncava	0	cóncava	0 Inflexión	convexa.

f) Corte con los ejes:

Con OX: $y=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}(0,0) \\ (-1,\ 0)\end{cases}}$; Con OY: $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$

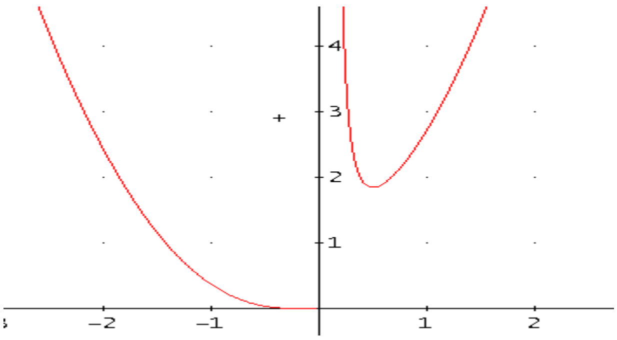
g) Gráfica aproximada:



6.- Realizar un estudio completo de la función $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$

Solución:

Representar la función $f(x)=x^2e^{1/x}$.



1. Dominio

$\boxed{R-\{0\}}$

2. Simetrías

$f(-x)=(-x)^2e^{1/(-x)}=x^2\dfrac{1}{e^{1/x}}\neq \pm f(x)$ **No tiene simetrías**.

3. Asíntotas

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2e^{1/x}=\infty$

Luego, **no tiene asíntotas horizontales**.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2e^{1/x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2e^{1/x}=\infty$

Asíntota horizontal: **x = 0**, por la izquierda.

Oblicuas: $y=mx+n$.

Para $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} xe^{1/x}=0$$

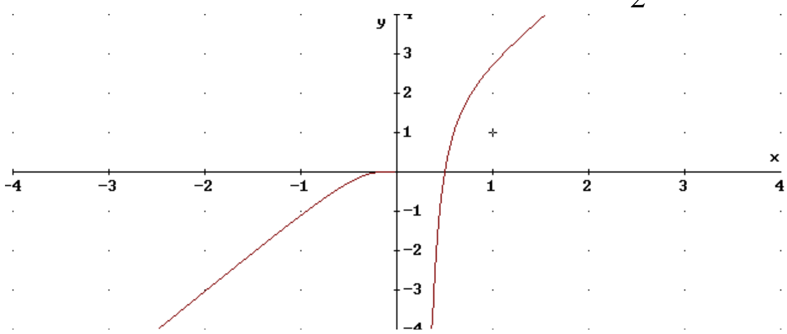
Para $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} xe^{1/x}=0$$

Luego, **no tiene asíntotas oblicuas**.

4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$f(x)=x^2e^{1/x}\Rightarrow f'(x)=(2x-1)e^{1/x}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ y en x=0 no existe f ’(x)



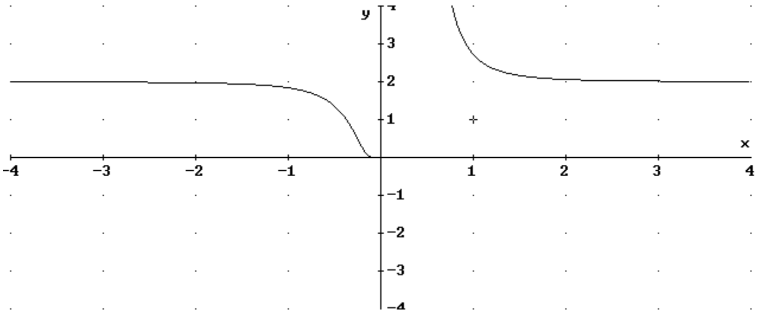
Crece en $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ **Decrece en** $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{1/\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{e^2}{4}$$

Mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right)$

5. Concavidad y convexidad

$$f'(x)=\frac{(2x^2-x+1)e^{1/x}}{x^2}>0$$



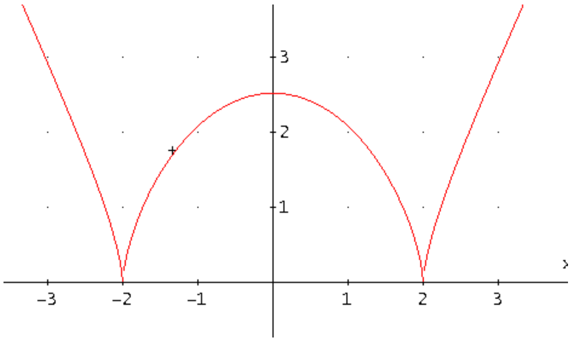
Es cóncava en todo su dominio.

No tiene puntos de inflexión.

7.- Realizar un estudio completo de la función $g(x)=\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}}$

1. **Dominio**

R



Nota: para representar con DERIVE usar: Branch:= Real

2. **Simetrías**

$g(-x)=\left((-x)^2-4\right)^{\frac{2}{3}}=\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}}=g(x)$ Es una función par.

Gráfica simétrica respecto del eje OY

3. **Asíntotas**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}}=\infty$

No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Oblicuas: $y=mx+n$.

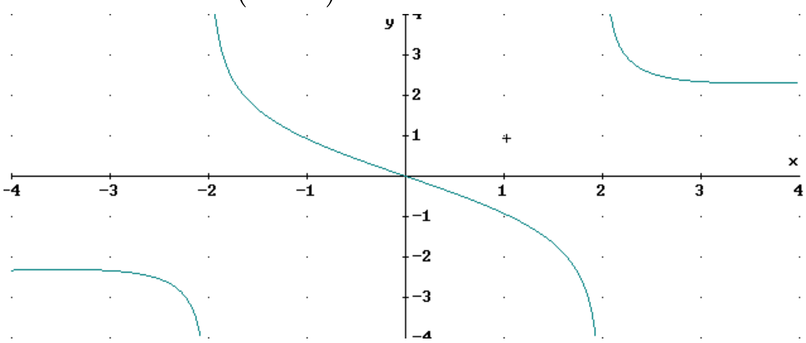
Para $\pm\infty$:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}}}{x}=\infty$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas.

4. **Crecimiento y decrecimiento:**

$$g(x)=\left(x^2-4\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow g'(x)=\frac{4x}{3\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{3}}}=0\Rightarrow x=0$$



Crece en (-2,0) U (2, ∞) y decrece en el resto.

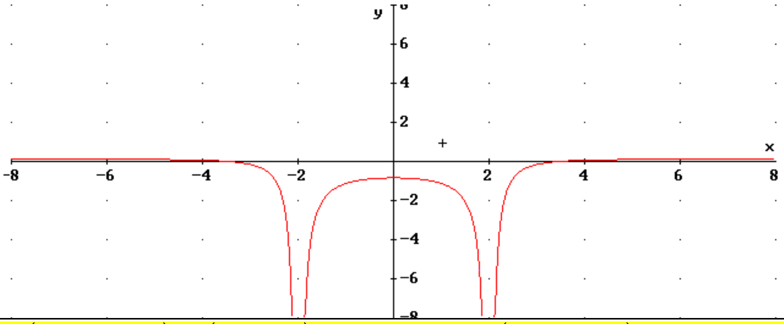
Máximos y mínimos relativos:

$g(0)=\left(0^2-4\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{16}\,;g(2)=\left(2^2-4\right)^{\frac{2}{3}}=0\,;g(-2)=\left((-2)^2-4\right)^{\frac{2}{3}}=0$

Máximo relativo en $\left(0,\sqrt[3]{16}\right)$ **Mínimos relativos en** $(-2,0),\ \ (2,0)$

5. **Concavidad y convexidad:**

$$g'(x)=\frac{4x}{3\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow g''(x)=\frac{4\left(x^2-12\right)}{9\left(x^2-4\right)^{\frac{4}{3}}}\Longrightarrow x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$$



Cóncava en $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$ **Convexa en** $\left(-2\sqrt{3},-2\right)\cup(-2,2)\cup\left(2,2\sqrt{3}\right)$

Puntos de inflexión:

$$g(\pm2\sqrt{3})=(12-4)^{\frac{2}{3}}=4$$

$$\left(2\sqrt{3},4\right);\left(-2\sqrt{3},4\right)$$

8.- Dada la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Se pide calcular:

a) Dominio.
b) Simetrías.
c) Puntos críticos.

Solución:

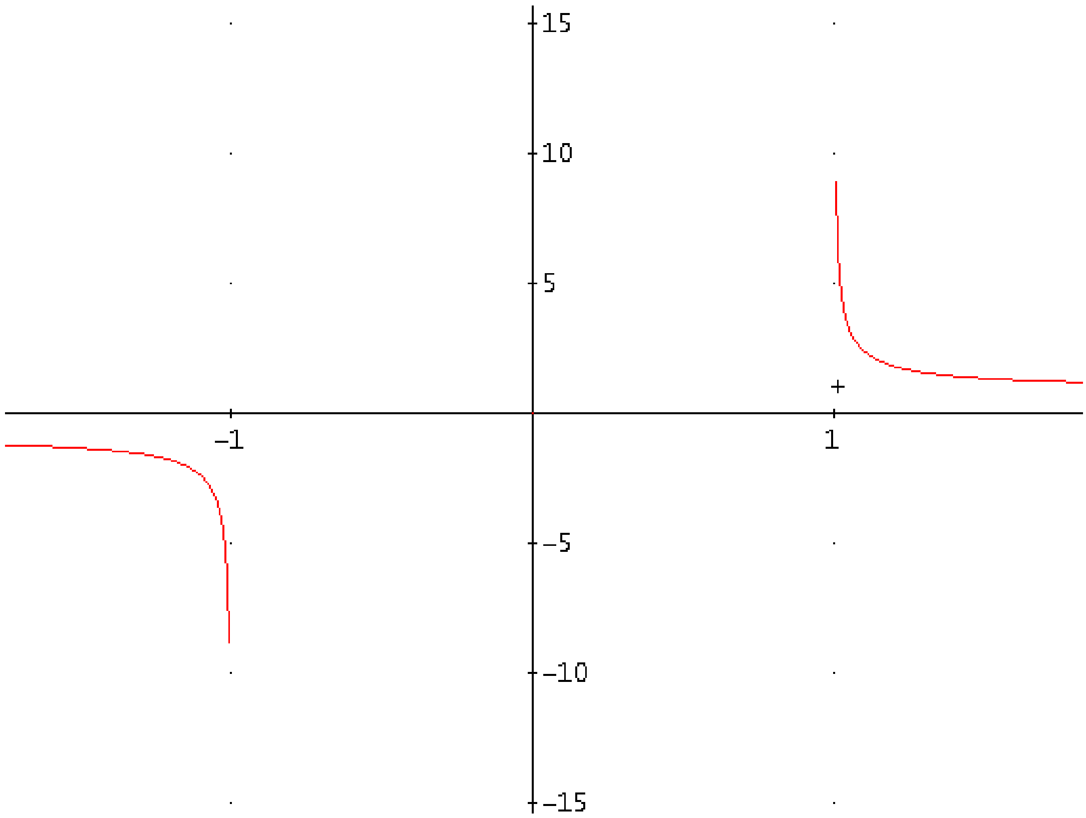
a) El Dominio de y son los intervalos donde $x^2-1>0 \Rightarrow$ Dom y =**(-∞,-1)∪(1,∞).**

b) Calculamos $f(-x)$ y lo comparamos con $f(x)$, así

$f(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-f(x)$, por lo tanto la función dada es **simétrica respecto del origen O**.

c) Los puntos críticos son los valores de x donde $f'(x)$ se anula o no existe, así

$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)\neq 0 \ \forall x\in \text{Dom} f \\ f'(x) \text{ no existe en } x=\pm 1 \end{cases}$ luego los puntos críticos de $f(x)$ son $\boldsymbol{x=\pm 1}$.



9.- Dada la función $y=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$. **Se pide calcular:**

a) Dominio.
b) Simetrías.
c) Puntos críticos.

Solución:

a) El Dominio de *y* son los intervalos donde $2x^2-8=0 \Rightarrow$ Dom $y=$ **R-** {-2,2}.

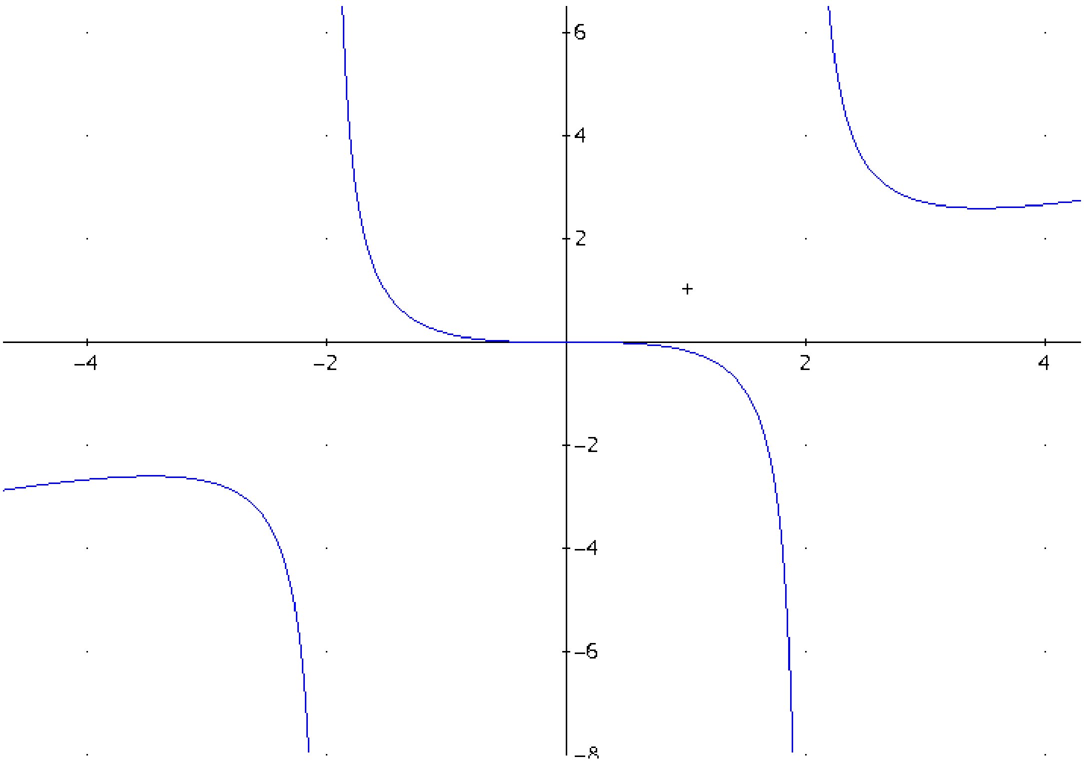
b) Calculamos *f*(-*x*) y lo comparamos con *f*(*x*), así

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2(-x)^2-8}=-\dfrac{x^3}{2x^2-8}=-f(x)$, por lo tanto la función dada es **simétrica respecto del origen O**.

c) Los puntos críticos son los valores de x donde *f* '(*x*) se anula o no existe, así

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{2(x^2-4)^2}\Rightarrow\begin{cases} f'(x)=0 \ \Rightarrow x=0,\pm\ 2\sqrt{3} \\ f'(x) \text{ no existe en } x=\pm 2\end{cases}$$

luego los puntos críticos de *f*(*x*) son $\boldsymbol{x=-2\sqrt{3},\ -2,\ 0,\ 2,\ 2\sqrt{3}}$.



10.- Dada la función $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$. Se pide calcular:

a) Dominio.
b) Simetrías.
c) Puntos críticos.

Solución:

a) El Dominio de y son los intervalos donde $x^2-4>0\Rightarrow$
Dom y = **(-∞,-2)** ∪ (2,∞) .

b) Calculamos $f(-x)$ y lo comparamos con $f(x)$, así

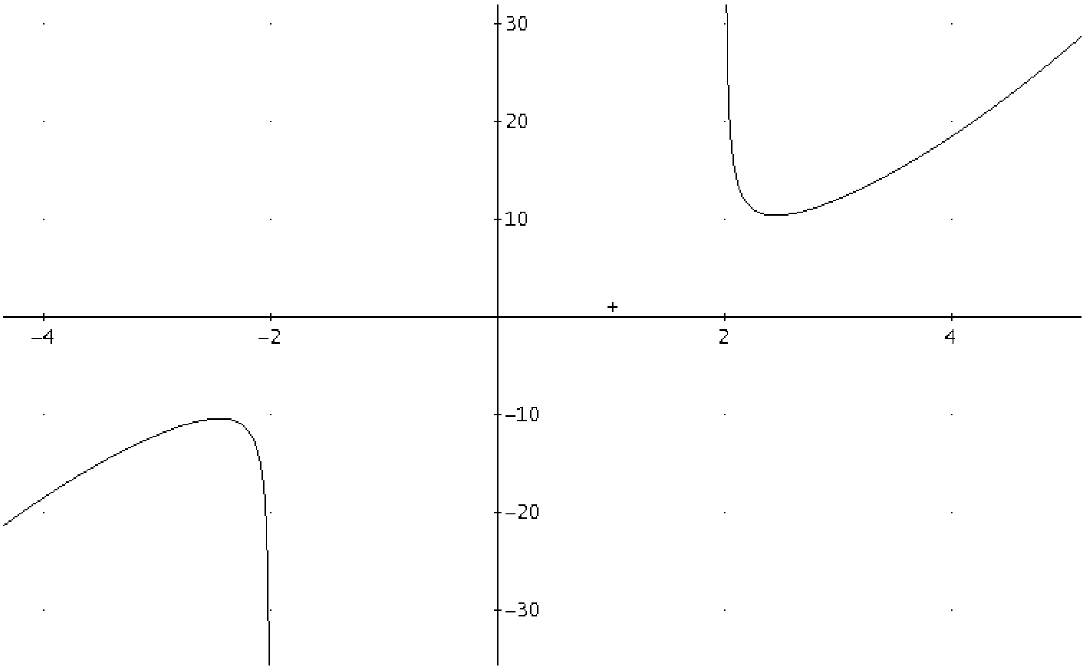
$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^2-4}}=-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}=-f(x)$, por lo tanto la función dada es **simétrica respecto del origen O**

.

c) Los puntos críticos son los valores de x donde $f'(x)$ se anula o no existe, así

$$f'(x)=\frac{2x^2\left(x^2-6\right)}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=0\Rightarrow x=0,\pm\sqrt{6}\\ f'(x)\text{no existe en } x=\pm 2\end{cases},$$

luego los puntos críticos de $f(x)$ son $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{6}\,,\,0,\pm 2}$,



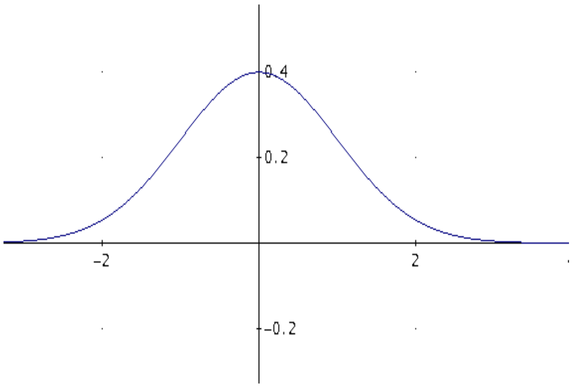
11.- Hacer un estudio y representar gráficamente la curva:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$$

Solución:

La N(0,1) es un caso particular de la N(μ,σ) para μ=1, σ=0, cuya función de densidad es la llamada **"campana de Gauss"**: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Veamos el estudio de la gráfica de $f(x)$:



1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

2. $f(x)>0$ **para todo x real**.

3. $f(x)$ es **continua en R**.

4. Es **simétrica respecto de $x=0$** (y respecto de $x=\mu$ en el caso general) pues $f(-x)=f(x)$

5. Estudio de máximos y mínimos:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}2x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}=-x\,f(x)$$ y en el caso general,

$$\left(f'(x)=-\frac{1}{2}2\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}=-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\cdot f(x)\right)$$

$f'(x)=\begin{cases}\geq 0 \text{ si } x\leq 0\\ \leq 0 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ y en el caso general $f'(x)=\begin{cases}\geq 0 \text{ si } x\leq \mu\\ \leq 0 \text{ si } x\geq \mu\end{cases}$ puesto que $f(x)>0$.

En $x=0$ pasa de creciente a decreciente luego existe un máximo en (0,f(0)) = (0,1) y en el caso general, en $x=\mu$ pasa de creciente a decreciente, luego existe un **máximo en (μ ,f(μ)) =** $(\mu,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$ donde coinciden la moda, (por ser máximo), la mediana, (por simetría) y la media.

6. Estudio de puntos de inflexión:

$f''(x)= -f(x) -x\,f'(x) =-f(x) +x^2 f(x) = \left(1-x^2\right)f(x)=$, luego al hacer $f''(x)=0$, resulta $x=\pm 1$, las abscisas de los puntos de inflexión. En el caso general:

$f''(x)=-\frac{1}{\sigma^2}\left[1-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].f(x)=0$ entonces $1-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2=0$, resultando $x=\mu\pm\sigma$ las abscisas de los puntos de inflexión.

12.- Representar gráficamente la función $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

Solución:

Dominio:

El Dominio de *f(x)* son los intervalos donde $x^2-1>0 \Rightarrow$ **D=(-∞, -1)U(1, ∞)**

Simetrías:

Calculamos *f*(-*x*) y lo comparamos con *f*(*x*), así

$f(-x)=-x+\sqrt{(-x)^2+1}=-x+\sqrt{x^2+1}\neq \pm f(x)$, por lo tanto,

No tiene simetrías.

Continuidad: **Es continua** en todo su dominio por ser compuesta de funciones continuas.

Periodicidad: No es periódica

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x+\sqrt{x^2-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$$

Por tanto, **y = 0** es asíntota horizontal para x ⟶ -∞

Asíntotas verticales: **No hay**, pues y ⟶ ∞ solo cuando x ⟶ ∞

Asíntotas oblicuas: y = mx + n

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}-2x\right)=0$$

Por tanto, asíntota oblicua: **y = 2x**

Crecimiento y decrecimiento:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\neq 0$$

$$f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\begin{cases}<0\Leftrightarrow x<-1\\ >0\Leftrightarrow 1<x\end{cases}$$

Luego, **f es creciente en (1, ∞) y decreciente en (-∞, -1)**.

Máximos y mínimos:

En **x = -1, y = -1**, f(x) tiene un mínimo relativo, por tomar en este punto un valor más pequeño que en cualquier otro punto del dominio próximo a él.

Lo mismo ocurre en **x = 1, y = 1**, donde f(x) tiene también un mínimo relativo.

$f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\neq 0$ para cualquier x, luego no existen más extremos relativos.

El **-1 es un mínimo absoluto** y la función no tiene máximo absoluto.

Concavidad y convexidad:

$f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}<0$ para todo valor de x; por tanto f **es convexa** en todo su dominio.

Intersección con los ejes coordenados:

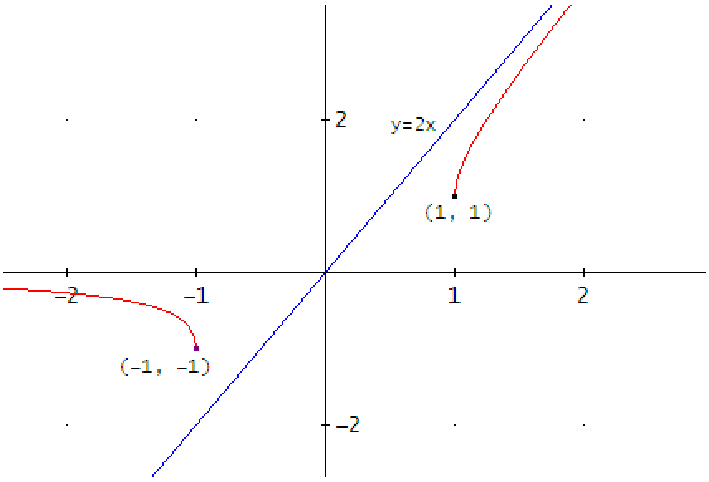
Con OX:

$y=0\Rightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ no tiene solución real.

Con OY:

$x=0\Rightarrow f(0)$ no existe, 0 no es del dominio de f.

Luego, **no existen puntos de intersección con los ejes coordenados**.



13.-Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Solución:

Dominio:

El Dominio de *f(x)* es el intervalo donde $x+1>0$

Dominio *f(x)* = *(-1, ∞)*

Simetrías:

Calculamos *f*(-*x*) y lo comparamos con *f*(*x*), así $f(-x)=\dfrac{\ln(-x+1)}{-x+1}\neq \pm f(x)$, por lo tanto, **No tiene simetrías**.

Continuidad: **Es continua** en todo su dominio por ser compuesta de funciones continuas.

Periodicidad: No es periódica

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$$

Por tanto, **y = 0** es asíntota horizontal para x → ∞

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$$

Luego, **x = -1** es asíntota vertical cuando x→ -1 por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas por tratarse de una función y tener asíntota horizontal para ∞ y no tomar la x valores menores o iguales a - 1.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x=e-1$$

Luego, **f es creciente en (- 1, e - 1) y decreciente en (e -1, ∞)**

Máximos y mínimos:

f(x) alcanza un **máximo relativo**, por tanto, en el punto **(e -1, f(e-1)) = (e – 1, 1/e)**.
1/e es el valor **máximo absoluto** y la función no tiene mínimos relativos ni absolutos.

Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\frac{2\ln(x+1)-3}{(x+1)^3}=0\Rightarrow x=e^{3/2}-1\Rightarrow f\left(e^{3/2}-1\right)=\frac{3e^{-3/2}}{2}$$

Por tanto, **f es cóncava en ($e^{3/2}$ – 1, ∞) y convexa en (-1, $e^{3/2}$ - 1)**

f(x) tiene un **punto de inflexión en x = $e^{3/2}$ - 1, y = 3·$e^{-3/2}$/2**

Intersección con los ejes coordenados:

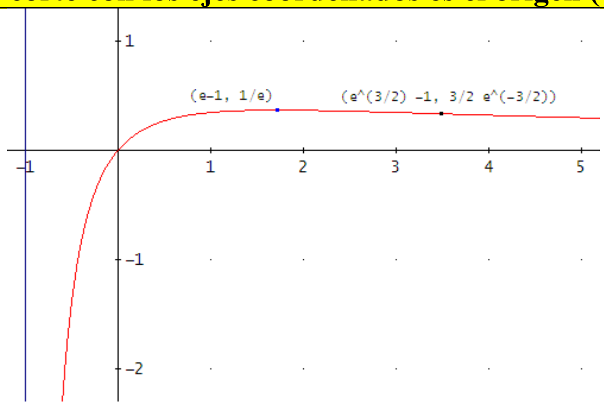
Con OX:

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Con OY:

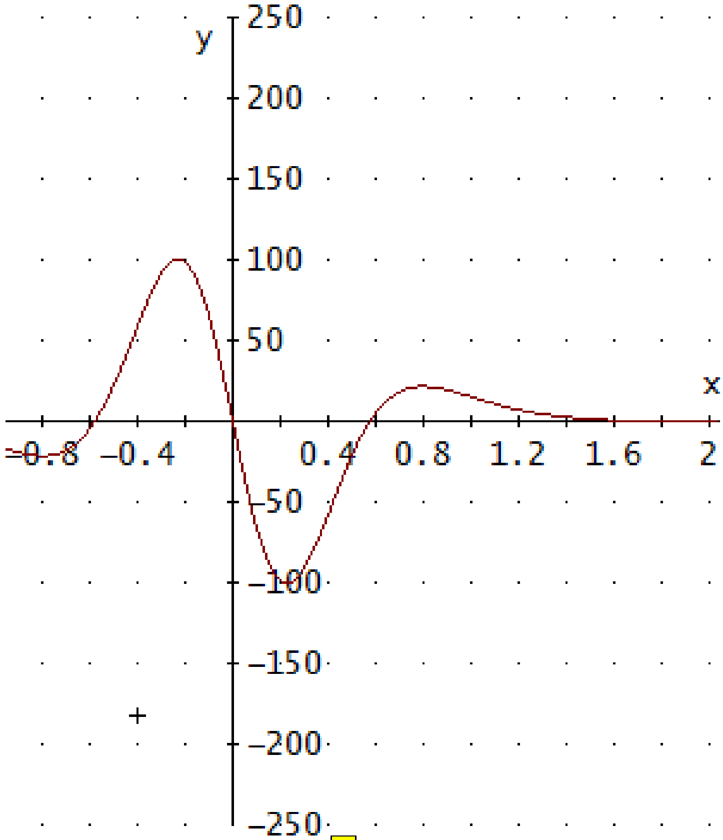
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

El único **punto de corte con los ejes coordenados es el origen (0, 0)**.



14.- Dada la curva $f(x) = -\dfrac{240\,x\,(3x^4 - 10x^2 + 3)}{(x^2+1)^6}$, se pide estudiar:

***Solución*:**



- Es continua en todo su dominio **R**.

- Simetrías:

f(-x)=-f(x)

$$f(-x) = \frac{240x(3x^4 - 10x^2 + 3)}{(x^2+1)^6} = \text{-f(x)}$$

La función es simétrica respecto al origen.

Bastará estudiar solamente en $[0,\infty)$

- Asíntotas la función es continua en todo R; queda por estudiar el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{240x(3x^4 - 10x^2 + 3)}{(x^2+1)^6} = 0$$

Luego **x=0** es una asíntota cuando $y \to \infty$ y, por la simetría, también cuando $x \to -\infty$

Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento

Calculando la derivada $f'(x) = \dfrac{720\cdot(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)}{(x^2+1)^7}$

Resolviendo $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ se obtiene

Seleccionando solamente las raíces positivas

x = 0.2282434743, x = 0.7974733888, x = 2.076521396 corresponden a los puntos singulares.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento:

Se calcula f(0)=0

Decrece

f(0.2282434743)= -100.4589829 (mínimo)

crece

f(0.7974733888)= 21.42758996 (máximo)

decrece

f(2.076521396)= -0.3473720448 (mínimo)

crece

Y, dada la simetría respecto del origen,

x		-2.076		-0.797		-0.228		0		0.228		0.797		2.076	
f(x)		0.347		-21.427		100.829		0		-100.829		21.427		-0.347	
f ’(x)	+	0	-	0	+	0	-		-	0	+	0	-	0	+
	↗	Máx	↘	Mín	↗	Máx	↘		↘	Mín	↗	Máx	↘	Mín	↗

15.- Hallar el dominio y hacer un estudio de las asíntotas, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad, convexidad, puntos de inflexión y representar gráficamente la función: $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$

Solución:

El dominio de esta función es todos los números reales menos los pertenecientes al intervalo (0,1) $Dom = \boldsymbol{R-\{(0,1)\}}$.

Para calcula las asíntotas:

Para calcular la asíntota horizontal se calcula el límite cuando x tiende a infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}=$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$, es decir. cuando x tiende a infinito existe una asíntota horizontal $y=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}=$$

$=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-y}{-y+\sqrt{y^2+y}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-1}{-1+\sqrt{1+\frac{1}{y}}}=-\infty$, es decir. que no existe una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

Para calcular la asíntota vertical se mira en el dominio, y para este caso no hay valores para los cuales el límite sea infinito; carece de asíntota vertical.

Para hallar la asíntota oblicua de ecuación: y=mx+n.

Para calcular m, lo que se hace es el límite cuando x tiende a infinito de f(x)/x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{x}=0$$

Como m=0, entonces parece que no existe una asíntota oblicua. Sin embargo, cuando realizamos el límite cuando x tiende a menos infinito de f(x)/x

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{x}=2; \qquad n=\lim_{x\to-\infty}x-\sqrt{x^2-x}-2x=-1/2$$

y=2x-1/2 es una asíntota oblicua

Para hallar el crecimiento y el decrecimiento se tiene que hallar la primera derivada de la función:

$$f'(x)=1-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Se sustituye los valores de x en la derivada; cuando la función derivada sea mayor que 0 la función es creciente y cuando sea menor que 0 es decreciente. Entonces la función es creciente en (-∞, 0) y decreciente en (1, ∞).

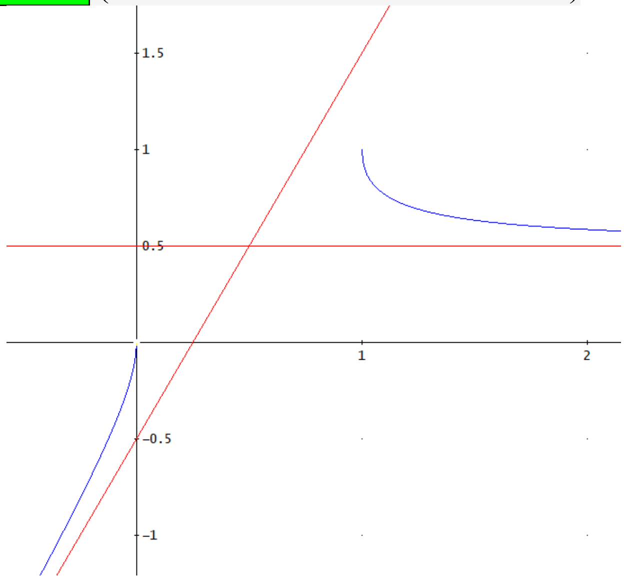
Para hallar el máximo y el mínimo se iguala la primera derivada de la función a 0, pero en este caso no existe ningún número de x para que la primera derivada que sea 0. Sin embargo, hay un máximo relativo en el x=0 y un máximo absoluto en el x=1; y no existe un mínimo absoluto.

Para el punto de inflexión se utiliza la segunda derivada de la función:

$f(x)=x-\sqrt{x^2-x}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{\left(x^2-x\right)^3}}>0$, entonces no hay punto de inflexión.

Para saber si la función tiene concavidad o convexidad se hace la segunda derivada, si la función es menor que 0 la función es cóncava y si es mayor que 0 la función es convexa.

Puesto que la segunda derivada es mayor que 0 en el dominio de la función, entonces es CÓNCAVA (OBSERVÁNDOLA POR ARRIBA)



Dominio de definición o campo de existencia.

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analítica de la función.

$$D = \left\{ x \in R \text{ tales que, existe } y = f\left(x\right) \right\}$$

Asíntotas de una función

Verticales: Si $x \to a \Rightarrow y \to \infty$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es una asíntota vertical}$$

(Sólo puede haber asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio)

Horizontales: Si $x \to \infty \Rightarrow y \to b$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b \text{ es una asíntota horizontal}$$

Oblicuas: $y = mx + n$ es una asíntota oblicua, siendo:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right); \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

Nota: las asíntotas nos informa de si la función está o no acotada.

Crecimiento

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él “x” y “x+h” se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) < f(x + h)$

Si f ’(a)>0, la función f es creciente en a

Decrecimiento

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él "x" y "x+h" se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) > f(x+h)$.

Si f '(a)<0, la función f es decreciente en a

Máximos locales.

- La función f tiene en el punto x=a un **máximo local o relativo** si existe un entorno (a-h, a+h) de a tal que para todo $x \neq a$ del entorno se verifica: $f(x) < f(a)$ resulta $f(x-h) < f(a) > f(x+h)$.

  Si f ’(a)=0 y f ’’(a)< 0, entonces (a, f(a)) es un máximo local

También pueden existir **extremos (**máximos y mínimos**)** donde no es derivable la función.

- Se dice que f tiene un **máximo relativo** en un punto $(x_0, y_0) \in A$ cuando $f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \ \ \forall (x,y)$ perteneciente a un entorno de (x_0, y_0).

- **Máximo Absoluto** es el mayor de los máximos locales o relativos.

Mínimos locales

- La función y=f(x) tiene en el punto x=a un **mínimo relativo** si existe un entorno (a-h, a+h) de a tal que para todo $x \neq a$ del entorno se verifica: $f(x) > f(a)$ resulta $f(x-h) > f(a) < f(x+h)$.

  Si f '(a)=0 y f ''(a)> 0, entonces (a, f(a)) es un mínimo local
- Se dice que z=f(x,y) tiene un **mínimo relativo** en un punto $(x_0, y_0) \in A$ cuando $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ $\forall(x,y)$ perteneciente a un entorno de (x_0, y_0).

  También pueden existir **extremos (**máximos y mínimos**)** donde no es derivable la función.
- **Mínimo Absoluto** es el menor de los mínimos locales o relativos.

Cóncava

Una función es **cóncava** si la gráfica de la función queda por encima de la recta tangente en cada uno de los puntos.

Si $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$ para todos los puntos x de un intervalo, f es **cóncava** (f es **convexa**) en dicho intervalo.

Convexa

Una función es **convexa** si la gráfica de la función queda por debajo de la recta tangente en cada uno de los puntos.
Si $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$ para todos los puntos x de un intervalo, f es **cóncava** (f es **convexa**) en dicho intervalo.

Puntos de inflexión.

Punto de una curva plana en el que la curvatura cambia de sentido de cóncava a convexa o viceversa. La tangente en un punto de inflexión atraviesa la curva.

Si $f''(a)=0$ y $f'''(a)\neq 0$, entonces $(a, f(a))$ es un **punto de inflexión**

Continua

- Una función y=f(x) es **continua** en x = a si se verifica: $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$
- Una función z=f(x,y) es continua en un punto (x_o,y_o) si se verifica: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$
-

Continuidad en un intervalo

Una función y = f(x) es **continua** en un subconjunto o en un intervalo si lo es en cada de sus puntos.

Intersección

Conjunto de los elementos que son comunes a dos conjuntos.

Intersección de la curva con las asíntotas

Los puntos de intersección de la curva con una de sus asíntotas se obtienen resolviendo el sistema formado por la ecuación de la curva y la ecuación de la asíntota.

Intersección de la curva con los ejes de coordenadas

Estos puntos se obtienen haciendo $x = 0$ e $y = 0$, para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas y de abscisas respectivamente.

Decrecimiento

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él "x" y "x+h" se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) > f(x+h)$.

Si f '(a)<0, la función f es decreciente en a

Periodicidad en una curva plana

Si x(t) e y(t) son funciones periódicas de períodos p_1 y p_2 respectivamente, la función vectorial $\vec{F}(t) = (x(t), y(t))$ es también periódica de período p = mínimo común múltiplo de p_1 y p_2, y sólo hará falta hacer variar t en un intervalo de amplitud p (es decir, $t \in [a,\ a+p]$).

La gráfica será en este caso cerrada, siempre que x(t) e y(t) y sean funciones continuas.
La elección de a dependerá de consideraciones de simetría aplicables a la curva.

Periodicidad de una función

Una función f(x) es **periódica**, de periodo T si existe $T \neq 0$, tal que,
$f(x+T) = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de definición.

(Sólo pueden ser periódicas las funciones cuya expresión analítica depende de las funciones senx, cosx, tgx, etc.)

Simetrías de una función

$$f(-x)=\begin{cases} f(x) \text{ simétrica respecto el eje OY (Función par)} \\ -f(x) \text{ simétrica respecto el origen O (Función impar)} \end{cases}$$

Simetrías en una curva plana

Estudio de algunos tipos de simetría:

a) Si $\left| \begin{array}{l} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{array} \right.$, entonces la curva es **simétrica respecto del origen**.

b) Si $\left| \begin{array}{l} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{array} \right.$, entonces la curva es **simétrica respecto del eje OX**.

c) Si $\left| \begin{array}{l} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{array} \right.$, entonces la curva es **simétrica respecto del eje OY**.

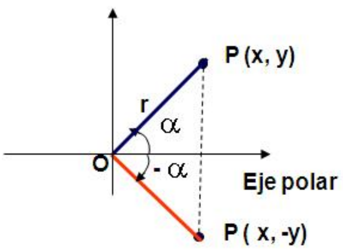
d) Si $\left| \begin{array}{l} x(-t)=y(t) \\ y(-t)=x(t) \end{array} \right.$, entonces la curva es **simétrica respecto de la bisectriz del primer cuadrante**.

Simetrías de una curva en forma polar

Para una función $r=r(\alpha)$ en forma polar:

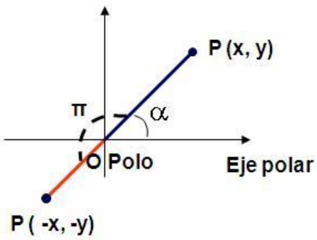
Simetría respecto el eje polar:

Al sustituir α por $-\alpha$ queda lo mismo: $r(\alpha)=r(-\alpha)$:



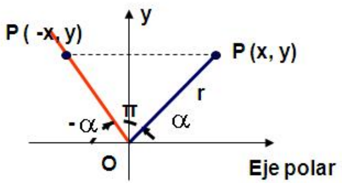
Simetría respecto al polo:

Al sustituir α por $\alpha+\pi$ queda lo mismo: $r(\alpha)=r(\alpha+\pi)$:



Simetría respecto el eje Y:

Al sustituir α por $\pi-\alpha$ queda lo mismo: $r(\alpha)=r(\pi-\alpha)$:



Punto crítico

En general son los valores que anulan la derivada o derivadas o simplemente no existen.

- Curva en forma paramétrica: valores del parámetro t que anulan al menos una de las derivadas $x'(t)$ o $y'(t)$, o bien alguna de ellas no está definida en t.
- En una función real de dos variables reales: puntos donde las derivadas parciales valen cero o no existen. Dichos puntos se llaman **puntos críticos o estacionarios de f.**