

Cálculo diferencial

3. Funciones y gráficas

En los ejercicios 1-5 evaluar la función (si está definida) en los valores de la variable independiente indicados. Simplificar los resultados.

1. $f(x) = 2x - 3$.

a) $f(0)$, $f(-3)$.

b) $f(b)$, $f(x - 1)$.

Apoyo teórico

Solución

2. $f(x) = \sqrt{x+3}$.

a) $f(6)$, $f(-6)$.

b) $f(c)$, $f(x + \Delta x)$.

Apoyo teórico

Solución

3. $f(x) = x^3$

a) $f(\sqrt{2})$.

b) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Apoyo teórico

Solución

4. $f(x) = 3x - 1$.

a) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Apoyo teórico

Solución

5. $f(x) = x^3 - x$.

a) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Una **función** es una relación entre dos variables de tal forma que a cada valor de la variable independiente, x , le corresponde un único valor de la variable, y .

1. a) $f(0) = -3$, $f(-3) = -9$.

b) $f(b) = 2b-3$, $f(x - 1) = 2(x - 1) - 3 = 2x - 5$.

2 a) $f(6) = \sqrt{9} = 3$, $f(-6) = \sqrt{-3}$ que no está definida en el conjunto \mathbf{R} de los números reales.

b) $f(c) = \sqrt{c+3}$, $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x + 3}$.

3. a) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

4 a) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = \frac{3x - 3}{x - 1} = \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$

$$5 \quad a) \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^3 - x - 0}{x-1} = \frac{x(x^2 - 1)}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} = x(x+1)$$

En los ejercicios 6-9 hallar el dominio y el recorrido de la función.

6. $f(x) = -\sqrt{x+3}$.

Apoyo teórico

Solución

7. $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Apoyo teórico

Solución

8. $f(t) = \sec \frac{\pi t}{4}$.

Apoyo teórico

Solución

9. $g(x) = x^2 - 5$.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Dominio de una función: es el conjunto de valores de x para los que la función $f(x)$ existe.

6. La función $f(x) = -\sqrt{x+3}$ está definida para aquellos valores de la variable x que hacen $x+3 \geq 0$, luego, ha de ser $x \geq -3$, es decir, $\text{Dom}f = [-3, \infty)$.

Cuando x recorre el intervalo $[-3, \infty)$ la expresión $x+3$ toma todos los valores posibles desde 0 a ∞ por lo que el recorrido de f es $(-\infty, 0]$.

7. La función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ está definida para los valores de la variable x tales que $x \neq 1$, luego, $\text{Dom}f = \mathbf{R} - \{1\}$.

Cuando x recorre el dominio $\mathbf{R} - \{1\}$, la expresión $\frac{1}{x-1}$ toma todos los valores posibles desde $-\infty$ a ∞ excepto el 0 por lo que el recorrido de f es $\mathbf{R} - \{0\}$.

8. La función $f(t) = \sec \frac{\pi t}{4} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)}$ es periódica de periodo $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi}{\pi} = 8$ (el período de

la función $\sec t$ es 2π , por lo que el periodo de $\sec\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ queda dividido por $\frac{\pi}{4}$ y es simétrica respecto del eje de ordenadas. En el periodo $[0, 2\pi)$ $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ se anula para

$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2, 6$ y para estos valores f no está definida. Luego, en cada periodo, $f(t)$ está definida para los valores de la variable t que no anulan a $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$, es decir, para los valores $t = 2 \cdot n^\circ \text{ impar} = 2 \cdot (2k-1)$ luego, $\text{Dom}f = \mathbf{R} - \{2 \cdot (2k-1), k \in \mathbf{Z}\}$.

Cuando x recorre el dominio, $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ toma todos los valores del intervalo $[-1, 1]$ luego la expresión $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)}$ toma todos los valores posibles de los intervalos $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ por lo

que el recorrido de f es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

9. La función $g(x) = x^2 - 5$ esta definida para cualquier valor que tome la variable x , luego, $\text{Dom } g = \mathbf{R}$.

La función g es una parábola con las ramas dirigidas hacia $+\infty$ y toma su valor mínimo cuando $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = -5$, por lo tanto, el recorrido de g es $[-5, \infty)$.

10. Hallar la función inversa de las funciones propuestas en los ejercicios 6 y 7.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Si $y=f(x)$ es una función inyectiva tiene inversa f^{-1} en la que su dominio es el recorrido de la función dada.

a) Hacemos $y=f(x)$ en la función $f(x) = -\sqrt{x+3}$ y despejamos x en función de y .

$$y = -\sqrt{x+3} \Rightarrow y^2 = x+3 \Rightarrow x = y^2 - 3.$$

Como la variable x es ahora la variable dependiente e y la variable independiente hemos de intercambiar x por y quedando como expresión analítica para la inversa de la función f :

$$y = x^2 - 3$$

b) Análogamente procedemos con la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 1 \Rightarrow x = \frac{1+y}{y}$$

Intercambiando x e y obtenemos la ecuación de la función inversa de la función f .

$$y = \frac{1+x}{x}$$

En los ejercicios 11-13, evaluar la función donde se indica. Determinar el dominio y el recorrido de la función.

$$11. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2 & x > 1 \end{cases} \quad \text{a) } f(-2), \text{ b) } f(0), \text{ c) } f(-1), f(s^2 + 2).$$

Apoyo teórico

Solución

$$12. f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 1 \\ -x + 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{a) } f(-3), \text{ b) } f(1), \text{ c) } f(3), f(s^2 + 1).$$

$$13. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x \leq 5 \\ (x-5)^2 & x > 5 \end{cases} \quad \text{a) } f(-3), \text{ b) } f(0), \text{ c) } f(5), f(10).$$

Solución:

Dominio de una función: es el conjunto de valores de x para los que la función $f(x)$ existe.

Recorrido o imagen de una función: es el conjunto de valores que toma la variable dependiente, y .

$$11. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2 & x > 1 \end{cases} \text{ es una función definida por intervalos ("a trozos")}$$

a) -2 se encuentra en el intervalo $x \leq 1$, por tanto, $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 6$.

b) 0 se encuentra en el intervalo $x \leq 1$, por tanto, $f(0) = (0)^2 + 2 = 2$.

c) -1 se encuentra en el intervalo $x \leq 1$, por tanto, $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$.

d) $s^2 + 2$ se encuentra en el intervalo $x > 1$, por tanto:

$$f(s^2 + 2) = 2(s^2 + 2)^2 + 2 = 2s^4 + 4s^2 + 10$$

Observemos que tanto en como en $x > 1$ la función f viene definida por polinomios, por tanto, $\text{Dom}f = \mathbf{R}$.

En cuanto al recorrido observamos que en $x \leq 1$ toma valores positivos ≥ 2 y en $x > 1$ también toma valores positivos ≥ 4 , luego el recorrido de f es $[2, \infty)$

$$12. f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 1 \\ -x + 1 & x \geq 1 \end{cases} \text{ es una función definida por intervalos ("a trozos")}$$

a) -3 se encuentra en el intervalo $x > 1$, por tanto, $f(-3) = |-3| + 1 = 4$.

b) 1 se encuentra en el intervalo $x \geq 1$, por tanto, $f(1) = -1 + 1 = 0$.

c) 3 se encuentra en el intervalo $x \geq 1$, por tanto, $f(3) = -3 + 1 = -2$.

d) $s^2 + 1$ se encuentra en el intervalo $x \geq 1$, por tanto:

$$f(s^2 + 1) = -(s^2 + 1) + 1 = -s^2.$$

Observemos que tanto en $x < 1$ como en $x > 1$ la función viene definida por polinomios (el valor absoluto en el primer tramo no impide hallar el valor para cualquier $x < 1$), por tanto, $\text{Dom}f = \mathbf{R}$.

En cuanto al recorrido observamos que en $x \leq 1$ f toma valores positivos ≥ 1 pero en $x \geq 1$ toma valores ≤ 0 , luego el recorrido de f es $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

$$13. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x \leq 5 \\ (x-5)^2 & x > 5 \end{cases} \text{ es una función definida por intervalos ("a trozos")}$$

a) -3 se encuentra en el intervalo $x \leq 5$, por tanto, $f(-3) = \sqrt{-3+4} = \sqrt{1} = 1$.

b) 0 se encuentra en el intervalo $x \leq 5$, por tanto, $f(0) = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$.

c) 5 se encuentra en el intervalo $x \leq 5$, por tanto, $f(5) = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$.

d) 10 se encuentra en el intervalo $x > 5$, por tanto, $f(10) = (10-5)^2 = 5^2 = 25$.

Observemos que en el intervalo $x \leq 5$ la función solo está definida si, además, $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$, es decir, si $-4 \leq x \leq 5$. En cambio, en el intervalo $x > 5$ la función es un polinomio.

Por lo tanto, $\text{Dom}f = [-4, 5] \cup (5, \infty) = [-4, \infty)$.

En cuanto al recorrido observamos que la función es siempre positiva y tanto en $x \leq 5$ como en $x > 5$ f toma valores ≥ 0 , luego el recorrido de f es $[0, \infty)$.

14. Expresar la función $f(x) = |x| + |x-1|$ sin usar símbolos de valor absoluto.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Las funciones $|x|$ y $|x-1|$ son siempre positivas y su valor mínimo es 0. Los puntos de intersección con el eje de abscisas son:

$$\begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ |x-1| = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}, \text{ en consecuencia, podemos escribir la función } f(x) = |x| + |x-1| \text{ como}$$

una función “a trozos” definida en los tres intervalos determinados por los valores 0 y 1:

$$f(x) = \begin{cases} -x + (-(x-1)), & x < 0 \\ x + (-(x-1)), & 0 \leq x \leq 1 \\ x + x - 1, & x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

En los ejercicios 15-22 determinar si la afirmación es falsa o no. Si es falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

15. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

16. Una recta vertical puede cortar a la gráfica de una función a lo sumo una vez.

17. Si $f(x) = f(-x)$ para todo x perteneciente al dominio de f , la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas (eje y).

18. Si $f(x)$ es una función, $f(ax) = af(x)$.

19. Si $p(x)$ es un polinomio la función $f(x) = \frac{p(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

20. Toda función racional tiene al menos una asíntota vertical.

21. Las funciones polinómicas no tienen asíntotas verticales.

22. Si f tiene una asíntota vertical en $x = 0$, entonces f no está definida en $x = 0$.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Si f es inyectiva se cumple que si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

La recta $x=k$ es una asíntota vertical de la función f si existe al menos uno de los límites

siguientes: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \pm\infty$.

15. Falso, pues por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ verifica que $f(-2) = f(2)$ y obviamente $-2 \neq 2$.

16. Verdadero, pues para $x = a$ solo pueden darse dos casos: o bien existe $f(a)$ y es un número real o bien no existe $f(a)$.

17. Verdadero, pues los puntos (x, y) , $(-x, y)$, son simétricos respecto del eje de ordenadas.

18. Falso, pues por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ verifica que $f(2x) = (2x)^2 = 4x^2 \neq 2x^2 = 2f(x)$.

19. Falso, pues por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x-1}$ no está definida pero:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x-1) = 0, \text{ luego la recta } x = 1 \text{ no es una asíntota vertical.}$$

20. Falso, el ejemplo de la cuestión anterior vale como contraejemplo.

21. Verdadero, pues su dominio es toda la recta real.

22. Falso, por ejemplo, la función “a trozos” $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 2x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ verifica que $f(0) = 1$

pero $x = 0$ es una asíntota vertical pues $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty$.

23. Ondas: **Se deja caer una piedra en un estanque en calma, produciendo ondas en forma de círculos concéntricos. El radio (en cm.) de la onda más grande viene dado por $r(t) = 1,9t$, donde t es el tiempo (en segundos) transcurrido desde que la piedra cae al agua. Sabiendo que el área del círculo es $A(r) = \pi r^2$, hallar e interpretar la función compuesta $(A \circ r)(t)$.**

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Sean f y g dos funciones. La función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama la función compuesta de g con f .

Por definición de función compuesta $(A \circ r)(t) = A(r(t)) = A(1,9t) = \pi(1,9t)^2 = \pi 3,61 t^2$. Esta función proporciona el área del círculo correspondiente a la onda producida a los t segundos de haber dejado caer la piedra en el estanque.

24. Objeto en caída libre: Dada la función de posición $s(t) = -16t^2 + 500$ que determina la altura (en metros) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 500 metros y sabiendo que la velocidad en el instante $t = a$ viene dada por $\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$, se pide:

- a) Si un topógrafo sufre un vahído y deja caer su libro de notas desde una altura de 500 metros (en un rascacielos) ¿con qué velocidad está cayendo 5 segundos después?
 b) ¿Cuándo impactará en el suelo? ¿a qué velocidad?

Apoyo teórico

Solución

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} p(x)$$

a) La velocidad de caída a los 5 segundos viene dada por $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} =$

$$\lim_{t \rightarrow 5} \frac{-16t^2 + 500 - (-16 \cdot 5^2 + 500)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{-16t^2 + 400}{t - 5} = -160 \text{ m/s}$$

b) El impacto en el suelo se producirá cuando $s(t) = 0 \Rightarrow -16t^2 + 500 = 0 \Rightarrow$

$$t = + \sqrt{\frac{-500}{-16}} = 5,590169043 \dots \approx 5,59 \text{ segundos.}$$

La velocidad será $\lim_{t \rightarrow 5,59} \frac{s(t) - s(5,59)}{t - 5,59} \approx -178,88 \text{ m/s}$

En los ejercicios 25-29 determinar los intervalos en los que la función es continua.

25. $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

Apoyo teórico

Solución

$$26. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

Apoyo teórico

Solución

27. $f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$

Apoyo teórico

Solución

$$28. f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Apoyo teórico

Solución

$$29. f(x) = \operatorname{tg}(2x)$$

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si:

1. f está definida en un intervalo que contiene a "a".
2. Existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. Se verifica: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

25. $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$ es una función racional (cociente de funciones polinómicas), por lo que será continua en todos los puntos donde el denominador no se anule. Como $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ concluimos que la función f es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$.

26. $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ es una modificación de la función anterior: vale lo mismo

en todos los puntos donde ya era continua y se le ha dado valor real (0) en el punto $x = 1$ donde no estaba definida. Como ya sabemos que es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$, solo falta comprobar si ahora es continua en $x = 1$. Para ello hemos de aplicar la definición de continuidad en un punto, es decir, hemos de comprobar si:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 5$$

Ahora bien, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 1}{1} = 5 = f(1)$. Luego, la función f

es continua en $x = 1$ y concluimos que f es continua en todo \mathbf{R} .

(Se dice que la discontinuidad de la función del ejercicio es de tipo **evitable**)

27. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ es una función racional, por lo que será continua en todos los puntos

donde el denominador no se anule. Como $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ concluimos que la función f es continua en $\mathbf{R} - \{3\}$.

28. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ es una función compuesta de la función racional $\frac{x+1}{x}$ seguida de raíz

cuadrada. Por ser una raíz cuadrada sólo solo puede ser continua para los valores de x que hagan positivo el radicando y por ser el radicando una función racional será continua donde

su denominador no se anule. Por tanto, será continua para todo número real que verifique las

$$\text{condiciones } \begin{cases} \frac{x+1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Para hallar los intervalos de continuidad hallamos los valores que anulan al numerador y denominador de la fracción que son $x = -1$ y $x = 0$ (pues solo en esos puntos la fracción puede cambiar de signo), y consideramos los intervalos en que dividen a la recta real excluyendo el 0: $(-\infty, -1]$, $[-1, 0)$, $(0, \infty)$ y estudiamos el signo de $\frac{x+1}{x}$ en ellos.

$$\text{En } (-\infty, -1] \text{ sg}\left(\frac{x+1}{x}\right) > 0; \text{ en } [-1, 0) \text{ sg}\left(\frac{x+1}{x}\right) < 0; \text{ en } (0, \infty) \text{ sg}\left(\frac{x+1}{x}\right) > 0.$$

En consecuencia, la función f es continua en $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.

29. $f(x) = \text{tg}(2x)$ es una función periódica de periodo $\frac{\pi}{2}$ (el periodo de $\text{tg}(x)$ es π pero al ser el ángulo de nuestra función $2x$, entonces el periodo de $\text{tg}(2x)$ queda dividido por 2). Como además $f(x) = \text{tg}(2x) = \frac{\text{sen}(2x)}{\text{cos}(2x)}$, es decir, es cociente de dos funciones continuas, la función f será continua en todos los puntos donde el denominador no se anule.

$$\text{En } [0, 2\pi) \text{ cos}(2x) \text{ se anula para } 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \text{ (es decir, cada } \frac{\pi}{2}\text{)}.$$

$$\text{Luego, la función } f \text{ en el periodo } [0, \frac{\pi}{2}) \text{ es continua en } [0, \frac{\pi}{2}) - \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}.$$

En consecuencia, y dada la periodicidad de $f(x) = \text{tg}(2x)$, la función es continua en:

$$\mathbf{R} - \left\{ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

30. Encontrar el valor de c para el que la función $f(x)$ es continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 2 \\ cx + 6 & x > 2 \end{cases}$$

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si:

1. f está definida en un intervalo que contiene a “ a ”.

2. Existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

3. Se verifica: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Se trata de una función definida por intervalos. En ellos el valor está determinado por sendos polinomios, luego la función es continua en dichos intervalos y sólo tenemos que estudiar el punto que separa ambos intervalos, $x = 2$.

$$\text{Por la izquierda observamos que: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 3 = 5 = f(2)$$

$$\text{Por la derecha observamos que: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} cx + 6 = 2c + 6$$

Luego para que f sea continua también en $x = 2$ ha de verificarse que $2c+6 = 5 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$.

En consecuencia, $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 2 \\ cx+6 & x > 2 \end{cases}$ en \mathbf{R} para $c = -\frac{1}{2}$.

En los ejercicios 31-33 usar el concepto de derivada para hallar la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto dado.

31. $f(x) = x^3 + 1$ en el punto (2,5).

Apoyo teórico

Solución

32. $f(x) = \sqrt{x-1}$ en el punto (5,2).

Apoyo teórico

Solución

33. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ en el punto (4,5).

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Cuando existe, la derivada de una función en un punto de una curva es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto

31. $f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 12$ y la ecuación de la recta tangente en (2,5) es:

$$y - 5 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x + 19$$

32. $f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{4}$ y la ecuación de la tangente en (5,2) es:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

33. $f(x) = x + \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{3}{4}$ y la ecuación de la tangente en (4,5) es:

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$$

En los ejercicios 34-35 hallar una ecuación de la recta que es tangente a la gráfica y paralela a la recta dada.

34. $f(x) = x^3 + 2$ recta $\equiv 3x - y + 1 = 0$.

Apoyo teórico

Solución

35. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ recta $\equiv x + 2y + 7 = 0$.

Apoyo teórico

Solución

Solución:

Ecuación de la recta tangente: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

En estos ejercicios la condición de que la recta tangente sea paralela a la recta dada nos va a permitir hallar un punto de la recta tangente. Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

34. La pendiente de la recta tangente a la curva viene dada por la derivada $f(x) = x^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$.

La pendiente de la recta $3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1$ es $m = 3$, luego $3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$, es decir, hay dos puntos de la curva con rectas tangentes paralelas a la recta $3x - y + 1 = 0$.

Dichos puntos son: $x = +1, y = 1^3 + 2 = 3$; $x = -1, y = (-1)^3 + 2 = 1$, es decir, $(1, 3)$ y $(-1, 1)$.

La ecuación de la tangente a la curva en $(1, 3)$ es:

$$y - 3 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x.$$

35. La pendiente de la recta tangente a la curva viene dada por la derivada.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$$

La pendiente de la recta $x + 2y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ es $m = -\frac{1}{2}$, luego

$$-\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)^3} = 2 \Rightarrow (x-1) = 1 \Rightarrow x = 2, \text{ es decir, hay un solo punto de}$$

la curva donde la tangente es paralela a la recta $x + 2y + 7 = 0$.

Dicho punto es: $x = 2, y = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$; es decir, $(2, 1)$.

La ecuación de la tangente a la curva en $(2, 1)$ es:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

36. Hallar la longitud y la anchura de un rectángulo de perímetro 100 metros y área máxima.

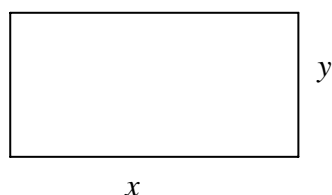
Apoyo teórico

Solución

Solución:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces la función alcanza un máximo relativo en $x = a$.

Designemos x e y a los lados distintos del rectángulo, tal y como se ve en la figura adjunta.



El perímetro $p = 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$.

El área $S = x \cdot y$, es una función de dos variables.

Despejamos la variable "y" en la expresión del perímetro $\Rightarrow y = 50 - x$, y sustituimos en la expresión del área:

$$S = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$$

Observamos que S se ha transformado en una función de una sola variable de la que tenemos que hallar su valor máximo, luego:

$$S' = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25.$$

Sustituimos en $y = 50 - x$, obteniendo para $x = 25, y = 25$.

Por lo tanto, el rectángulo de perímetro 100 metros y área máxima es el cuadrado de lado 25 metros. El área de este rectángulo es 625 m^2 .

37. Hallar la longitud y la anchura de un rectángulo de área 64 metros cuadrados y perímetro mínimo.

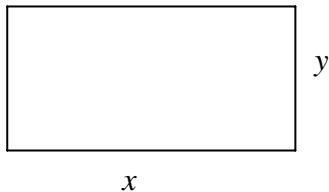
Apoyo teórico

Solución

Solución:

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$ entonces la función alcanza un mínimo relativo en $x=a$.

Designemos x e y a los lados distintos del rectángulo, tal y como se ve en la figura adjunta.



El área $S = x \cdot y = 64$.

El perímetro $p = 2x + 2y$ es una función de dos variables.

Despejamos la variable “y” en la expresión del área

$\Rightarrow y = \frac{64}{x}$, y sustituimos en la expresión del perímetro:

$$p = 2x + \frac{128}{x}$$

Observamos que p se ha transformado en una función de una sola variable de la que tenemos que hallar su valor mínimo, luego:

$$p' = 2 - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 128 \Rightarrow x = \pm\sqrt{128} = \pm 8\sqrt{2}$$

Ahora bien, de las dos posibles soluciones solo una es válida, la positiva, pues buscamos la longitud de un rectángulo.

Sustituimos en $y = y = \frac{64}{x}$, obteniendo para $x = 8\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$.

Por lo tanto, el rectángulo de área 64 m^2 y perímetro mínimo es el rectángulo de lados $8\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$ metros.