Función real de variable real

1.- Si $f(x)=e^{3x}$ **y** $g(x)=\cos(x^2)$**, hallar** $g\circ f$ **y** $f\circ g$**.**

Solución

2.- Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(\mathrm{sen}x)$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}+\sqrt{|x+2|-1}$ **c)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{2-x}{\sqrt{2+x}}}$

Solución

3.- Hallar la inversa de las siguientes funciones:

$y=e^{3x}$ $y=\ln(x^4)$ $y=\ln(\ln(x))$

$y=\log_2(x+3)$ $y=\ln(x^2)+\ln x$ $y=e^{-2x}-7e^{-x}$

Solución

4.- Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles son impares:

a) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{x}$ **b)** $g(x)=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ **c)** $h(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ **d)** $k(x)=\mathrm{sen}\left(x^3\right)$

e) $p(x)=e^x$

Solución

5.- Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}1+\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x<0\\ \cos\left(x^2\right) & \text{si } 0\le x\le\sqrt{\pi}\\ \ln x & \text{si } x>\sqrt{\pi}\end{cases}$

Solución

6.- ¿Es inyectiva la función y = sen x? ¿Cómo es que tiene función inversa, y = arcsen x?

Solución

7.- Hacer un esbozo de la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=e^x$ **b)** $y=-e^x$ **c)** $y=e^{-x}$ **d)** $y=\ln x$ **e)** $y=\ln x+2$ **f)** $y=\ln(x+2)$

g) $y=\ln|x|$ **h)** $y=|\ln x|$ **i)** $y=x^3$ **j)** $y=x^{-3}$ **k)** $y=\sqrt{x}$

Solución

8.- Hallar el período de las funciones dadas a continuación:

a) $y=\cos x$ **b)** $y=\cos(3x)$ **c)** $y=\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ **d)** $y=\mathrm{tg}\,x$ **e)** $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{5}$

Solución

9.- Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\mathrm{sen}x}{e^x+\cos x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\mathrm{sen}x}$

Solución

10.- Hallar las derivadas de las dos funciones siguientes:

a) $y = \text{sen}\left(\text{arc tg}\,\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$ **b)** $y = \cos\left(\text{arc tg}\,\dfrac{1}{e^x + x^2}\right)$

Solución

11.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^4 \cos^2 \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **. Se pide:**

a) Hallar f \`(1) y f \`\`(1).
b) ¿Existe un mínimo relativo en x = 1?

Solución

12.- Hallar las derivadas terceras de las funciones:

a) $y = \dfrac{\text{sen}x}{1+\cos x}$ **b)** $y = e^{\text{arc tg}\,x}$

Solución

13.- Demostrar que el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ **tiene una única raíz real positiva.**

Solución

14.- Demostrar que la ecuación $e^x = x + 1$ **no tiene más solución real que x = 0.**

Solución

15.- Demostrar que si x > 0, entonces, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$**.**

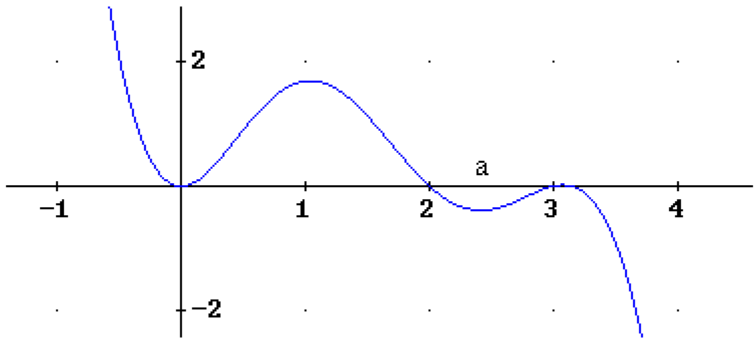
Solución

16.- Hacer un estudio completo y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$$

Solución

17.- La gráfica de la función derivada de una función y = f(x) viene dada en la figura:



Estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas de la función f. ¿Es f una función acotada?

Solución

18.- Dada la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}(2x)}{1+\text{sen}x}$**, se pide:**

a. Dominio.

b. **Periodicidad.**
c. **Signo de f(x) en función de x.**
d. **Asíntotas.**

Solución

19.- Hallar el conjunto A de números reales determinado por cada una de las siguientes desigualdades e indicar en cada caso si se trata de un conjunto acotado. Hallar, en los casos en que existan, el extremo superior, el extremo inferior, el máximo y el mínimo del conjunto A:

a) $|x+2| \leq 3$ **b)** $|1-4x| < \frac{1}{2}$ **c)** $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$ **d)** $|x+1| < |3x-1|$

Solución

20.- Se consideran las funciones $f(x) = x^2$ **y** $g(x) = e^x$ **, hallar** $(g \circ f)(x)$ **y** $(f \circ g)(x)$

Solución

21.- Calcular x en las siguientes ecuaciones:

a) $e^{3x} = 2$ **b)** $\ln(x^4) = -1$ **c)** $\ln(\ln x) = 2$ **d)** $e^x - 4e^{-x} = 3$

e) $e^{\ln x - 2} = 3e^4$ **f)** $\log_2(x+3) = 5$ **g)** $\ln x^2 + \ln x = 4$

Solución

22.- Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}$ **g)** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^5 - 7x^4 - 2x + 5\right)$ **j)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ **k)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ **l)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

Solución

23.- Demostrar que $f(x) = 4x^3 + x - 3 = 0$ **tiene exactamente una solución real.**

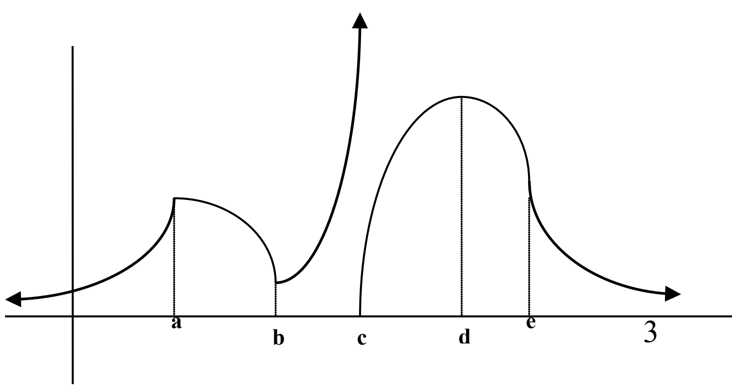
Solución

24.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ **en (2,4).**

Solución

25.- Sea y=f(x) una función cuya gráfica es la que aparece más abajo: Indicar si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

a) **f es continua en todo R.**
b) **f es derivable en todo R.**
c) **f tiene un mínimo relativo en x = b.**



d) f está acotada inferiormente.
e) f tiene máximos relativos en x = a y en x = d.
f) f está acotada superiormente.
g) f tiene puntos de inflexión en x = a, x = b y x = d
h) f tiene una asíntota vertical en x = c y una asíntota horizontal de ecuación y = 0.
i) f '(x) = 0 en x = a y en x = d.

Solución

26.- Dada la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<-1\\ -x & \text{si } -1\le x\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Estudiar la continuidad. b) Hallar su función derivada. c) Representar gráficamente f(x).

Solución

27.- Representar la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{si } x<2\\ \dfrac{x^2}{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$ **.**

¿Está f acotada en $(-\infty,0]$**? ¿Tiene máximo y mínimo en ese intervalo?**

Solución

28.- Construido un depósito cúbico para almacenamiento de cajas, se quiere estimar con la mayor precisión posible el volumen que puede contener. La medida del lado L del cubo resulta ser 11.35 m con una cota de error estimado de 0.2 m.

a) Aplicar el concepto de diferencial para aproximar el error propagado (porcentual) cometido al calcular el volumen V del depósito.
b) Estimar el máximo error en la medida de L, para que el error propagado al calcular el volumen no supere el 3%.

Solución

29.- a) Enunciar el teorema del VALOR MEDIO o de Lagrange.

b) Un vehículo circula a 90 km/h por el km 100 de una autopista, diez minutos después en el km 125 su velocidad es de 100 km/h, donde le para la policía y le multa. ¿por qué?

Solución

30.- a) Enunciar el teorema de Rolle:

b) Razonar si puede aplicarse el teorema de Rolle a la función f (x) = ln (x^2 **) en el intervalo [-1, 1]:**

Solución

31.- a) Hallar el conjunto A de números reales determinado por la siguiente desigualdad: $|1-3x|>2$

¿Es A un conjunto acotado?

b) Hallar el dominio de la función $f(x)=\ln(\cos x)$

c) Hallar la derivada de la función $y=\dfrac{2^x-1}{e^x+1}$

Solución

32.- Hallar las derivadas primeras de las funciones:

a) $f(x) = tg^2(x^2)$.

b) $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Solución

33.- Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Solución

34.- Se desea calcular el área A de un triángulo cuya altura mide el doble de la base.

a) Si se obtiene un valor de 10.4 m al medir la longitud de la base b con un error máximo de 5 cm, hallar el máximo error porcentual cometido en el cálculo del área del triángulo.

b) ¿Cuál ha de ser el máximo error porcentual permitido en la medida de la longitud de la base para que el error cometido en el cálculo del área no supere los 0.3 m^2?

Solución

35.- Sean las funciones $f(x) = \text{arc tg}(x)$, $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos 3x^2}{1+\cos 3x^2}}$. Se pide:

a) $(f\circ g)(x)$.

b) $f'(x)$

c) $g'(x)$.

d) $(f\circ g)'(x)$

Solución

36.- a) Enunciar el teorema de Rolle.

b) La función $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - 1$ se anula en los extremos del intervalo [-1,1]. Al mismo tiempo es $f'(x) \neq 0$. Explicar por qué no se verifica la tesis del teorema en este ejemplo.

Solución

37.- Sean las funciones $f(x) = \text{arc tg}(x^2)$, $g(x) = \ln(\sqrt{x})$

a) Hallar $(g\circ f)(x)$ **y** $(f\circ g)(x)$.

b) Hallar las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$.

c) Aplicando la regla de la cadena hallar la derivada $(g\circ f)'(x)$

Solución

38.- a) Enunciar el teorema de Lagrange o de los incrementos finitos.

b) Aplicando el teorema anterior a la función f(x) = ln x en un intervalo adecuado, demostrar que $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.

Solución

39.- Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$.

Solución

40.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -3\operatorname{sen}x & \text{si } x \le -\frac{\pi}{2} \\ A\operatorname{sen}x + B & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x \end{cases}$ **elegir A y B para que f(x) sea continua en todos los puntos.**

Solución

41.- ¿Cuál es mayor e^{π} o π^{e}?

Solución

42.- Si $f(x) = 2^x$**, demostrar, a mano, que:**

a) $f(x+3) - f(x-1) = \dfrac{15}{2} f(x)$ **b)** $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$

Solución

43.- Hallar, a mano, los intervalos determinados por las siguientes desigualdades.

a) $\dfrac{2x+1}{x+3} > 3$ **; b)** $\left|\dfrac{2}{x} - 3\right| < 5$

Solución

44.- Despejar, a mano, x en las siguientes ecuaciones:

a) $e^{x} + 12e^{-x} = 7$ **b)** $e^{-2x} - 7e^{-x} = 8$ **c)** $e^{7\ln x} = 128$

Solución

45.- Hallar a mano, indicando todos los pasos intermedios, las derivadas de las funciones:

a) y=2tgx; b) y=tg2x; c) y=tg²x; d) y=tg(x²);

e) y=tg2ˣ; f) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{-1+\operatorname{tg}x}}$ **; g)** $y = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución

46.- Demostrar que si $0 \le a \le b$ **entonces** $\dfrac{a}{a+1} \le \dfrac{b}{b+1}$.

Solución

47.- Calcular a, b y c para que la siguiente función sea continua:

Función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}+a & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}+b & \text{si} \quad 1<x<2 \\ c & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

Solución

1.- Si $f(x)=e^{3x}$ **y** $g(x)=\cos(x^2)$**, hallar** $g\circ f$ **y** $f\circ g$**.**

Solución:

$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(e^{3x}\right)=\cos\left(e^{3x}\right)^2=\cos\left(e^{6x}\right);\left(g\circ f\right)(x)=\cos\left(e^{6x}\right)$

$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\cos x^2\right)=e^{3\cos x^2};\qquad \left(f\circ g\right)(x)=e^{3\cos\left(x^2\right)}$

2.- Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}x)$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}} + \sqrt{|x+2| - 1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{2-x}{\sqrt{2+x}}}$

Solución:

a) f(x)=ln(senx)

$\operatorname{sen}x > 0 \Leftrightarrow 0 + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in Z$

$(2k\pi,\ (2k+1)\pi))$

b) Por una parte $|x| - x > 0 \Leftrightarrow |x| > x \Leftrightarrow x < 0$ y además

$|x+2| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x+2| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 1 \\ -x-2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -3 \geq x \end{cases}$. Por tanto, la intersección resulta $x \leq -3 \cup -1 \leq x < 0$ ó bien en los intervalos $(-\infty, -3] \cup [-1, 0)$.

c) Analizando cada sumando:

$\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$ salvo x=-1 que anula el denominador.

$\dfrac{2-x}{\sqrt{2+x}} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$ y necesariamente $2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

La intersección de las regiones anteriores da: $(-2, -1) \cup [1, 2]$

3.- Hallar la inversa de las siguientes funciones:

$y = e^{3x}$ $\quad y = \ln(x^4)$ $\quad y = \ln(\ln(x))$

$y = \log_2(x+3)$ $\quad y = \ln(x^2) + \ln x$ $\quad y = e^{-2x} - 7e^{-x}$

Solución:

$$y = e^{3x} \Rightarrow \ln y = 3x \Rightarrow x = \frac{\ln y}{3} \Rightarrow y = \frac{\ln x}{3}$$

$$y = \ln(x^4) = 4\ln x \Rightarrow y/4 = \ln x \Rightarrow x = e^{\frac{y}{4}} \Rightarrow y = e^{x/4}; y = \sqrt[4]{e^x}$$

$$y = \ln(\ln x) \Rightarrow e^y = \ln x \Rightarrow x = e^{e^y} \Rightarrow y = e^{\left(e^x\right)}$$

$$y = \log_2(x+3) \Rightarrow 2^y = x+3 \Rightarrow x = 2^y - 3 \Rightarrow y = 2^x - 3$$

$$y = \ln(x^2) + \ln x = 3\ln x \Rightarrow y/3 = \ln x \Rightarrow x = e^{\frac{y}{3}} \Rightarrow y = e^{x/3}; y = \sqrt[3]{e^x}$$

$$y = e^{-2x} - 7e^{-x} \Leftrightarrow ye^{2x} = 1 - 7e^x \Leftrightarrow ye^{2x} + 7e^x - 1 = 0;$$

llamando $e^x = z$

$$\Leftrightarrow yz^2 + 7z - 1 = 0 \Rightarrow z = \left(\frac{-7 \pm \sqrt{49+4y}}{2y}\right) = e^x \Rightarrow x = \ln\frac{-7 \pm \sqrt{49+4y}}{2y}$$

$$y = \ln\frac{-7 \pm \sqrt{49+4x}}{2x}$$

4.- Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles son impares:

a) $f(x)=\dfrac{2^{x}+2^{-x}}{x}$ **b)** $g(x)=x\dfrac{2^{x}-1}{2^{x}+1}$ **c)** $h(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ **d)** $k(x)=\operatorname{sen}\left(x^{3}\right)$

e) $p(x)=e^{x}$

Solución:

a) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^{-(-x)}}{-x}=-\dfrac{2^{-x}+2^{x}}{x}=-f(x)$ luego f(x) es IMPAR

b) $g(-x)=(-x)\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=(-x)\dfrac{1-2^{x}}{1+2^{x}}=x\dfrac{2^{x}-1}{1+2^{x}}=g(x)$ luego g(x) es PAR

c) $h(-x)=\ln\dfrac{3-(-x)}{3-x}=\ln\dfrac{3+x}{3-x}=-\left(-\ln\dfrac{3+x}{3-x}\right)=-\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{3-x}{3+x}=-h(x)$ luego h(x) es IMPAR

d) $k(-x)=\operatorname{sen}\left((-x)^{3}\right)=\operatorname{sen}\left(-\left(x^{3}\right)\right)=-\operatorname{sen}\left(x^{3}\right)=-k(x)$**,** luego k(x) es IMPAR.

e) $p(-x)=e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}\neq\begin{cases}e^{x}=p(x)\\-e^{x}=-p(x)\end{cases}$, luego p(x) no es par ni IMPAR.

5.- Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} 1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x<0 \\ \cos\left(x^2\right) & \text{si } 0\le x\le\sqrt{\pi} \\ \ln x & \text{si } x>\sqrt{\pi} \end{cases}$

Solución:

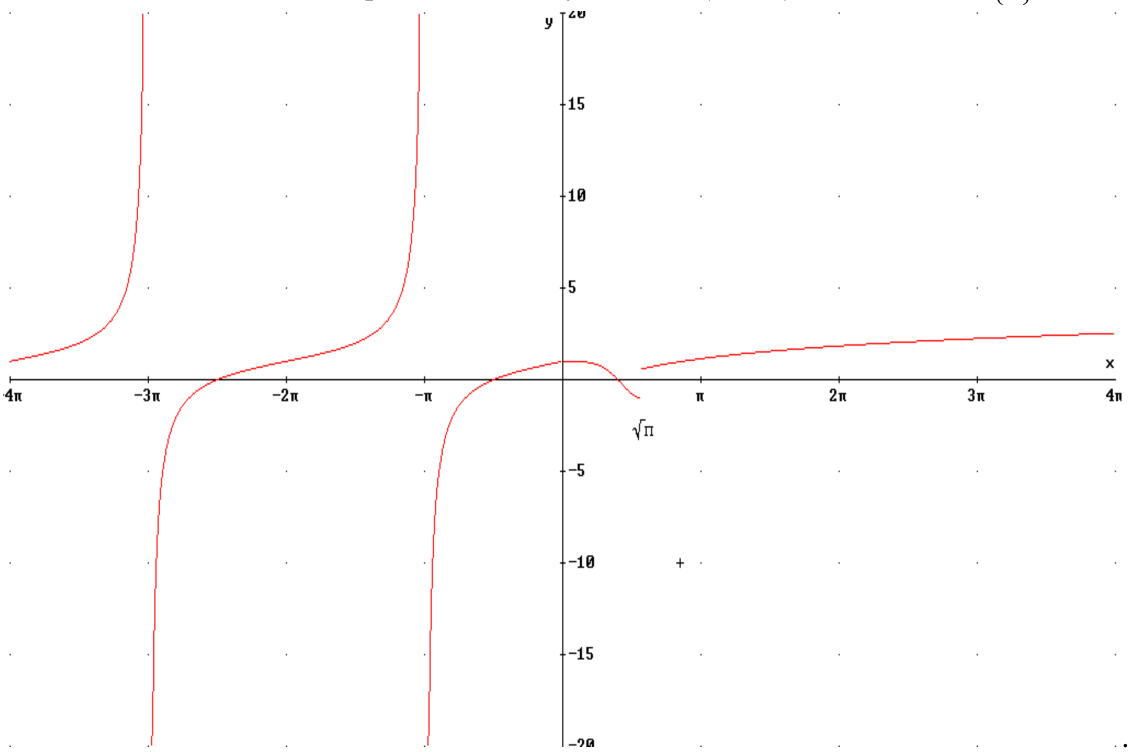
La tangente no existe para valores de $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in Z$ y como x<0 resulta que: $x=-\pi-2k\pi$ con $k\in N\cup\{0\}$.

Para los puntos frontera, tenemos que:

En x=0: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=1=\cos(0^2)=f(0)$ continua en x=0.

En $x=\sqrt{\pi}$: $\lim\limits_{x\to\sqrt{\pi}^+}\ln x=\ln\sqrt{\pi}\approx 0,57\neq -1=\cos\pi=f(\sqrt{\pi})$ discontinua en $x=\sqrt{\pi}$

f es continua en todo R excepto en $x=\sqrt{\pi}$ y en $x=-(1+2k)\pi$ con $k\in N\cup\{0\}$.



6.- ¿Es inyectiva la función y = sen x? ¿Cómo es que tiene función inversa, y = arcsen x?

Solución:

La función y = sen x **no es inyectiva** como función de R en [-1, 1], pero sí lo es como función de $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ en [-1, 1], siendo $k \in Z$.

Su función inversa y = arc sen x, es una función de [-1, 1] en $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, para un valor entero concreto de k, generalmente, k = 0.

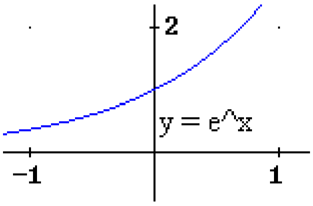
7.- Hacer un esbozo de la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = e^x$ **b)** $y = -e^x$ **c)** $y = e^{-x}$ **d)** $y = \ln x$ **e)** $y = \ln x + 2$ **f)** $y = \ln(x+2)$

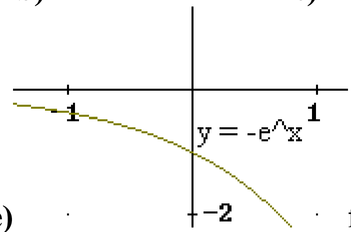
g) $y = \ln|x|$ **h)** $y = |\ln x|$ **i)** $y = x^3$ **j)** $y = x^{-3}$ **k)** $y = \sqrt{x}$

Solución

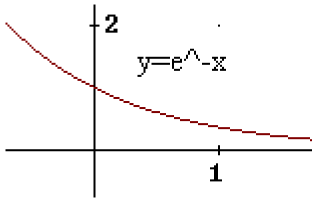
a)



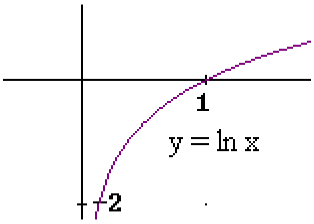
b)



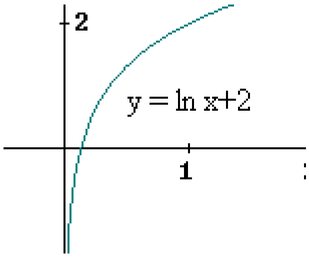
c)



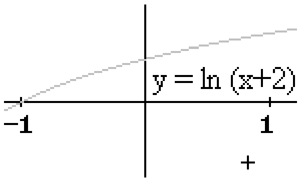
d)



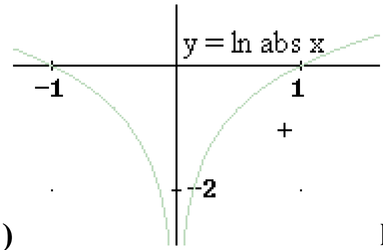
e)



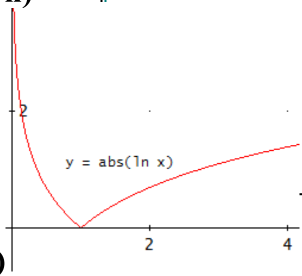
f)



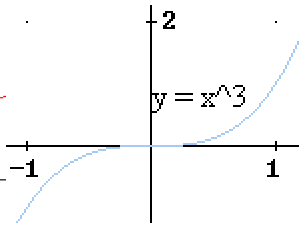
g)



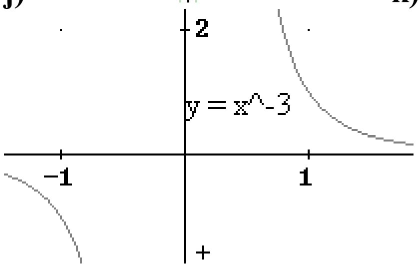
h)



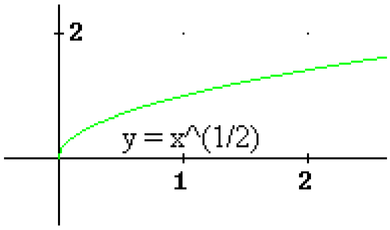
i)



j)



k)



8.- Hallar el período de las funciones dadas a continuación:

a) $y = \cos x$ **b)** $y = \cos(3x)$ **c)** $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ **d)** $y = \operatorname{tg} x$ **e)** $y = \operatorname{tg}\frac{x}{5}$ **f)** $y = \cos^2 x$

Solución:

a) $y = \cos x$, $T = 2\pi$

b) $f(x) = \cos(3x) = \begin{cases} f(x+T) = \cos(3(x+T)) = \cos(3x+3T) \\ \cos(3x+2\pi) \end{cases} \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

c) $y = \cos\frac{x}{3}$, $T = 6\pi$

d) $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$

e) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{5}$, $T = 5\pi$.

f) $y = \cos^2 x$, $T = \pi$

9.- Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\mathrm{sen}x}{e^x+\cos x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{sen}x}$

Solución:

a) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}}{\mathrm{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}+2x2xe^{x^2}}{\cos x}=2$ (L\`Hôpital)

b) $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\mathrm{sen}x}{e^x}}{1+\frac{\cos x}{e^x}}=1$ (Por L\`Hôpital no se llega a ningún resultado; sale fácilmente dividiendo numerador y denominador por e^x)

c) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{sen}x}=0$ (pues $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{sen}x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$; nótese que no puede aplicarse L\`Hôpital ya que no existe el límite del cociente de las derivadas).

10.- Hallar las derivadas de las dos funciones siguientes:

a) $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$ **b)** $y = \cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{e^x + x^2}\right)$

Solución:

a) Primeramente, simplificamos la expresión trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} z) \Rightarrow \operatorname{tg}x = z \Rightarrow \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} z) = \operatorname{sen}x = z\cos x = z\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{e^x/\sqrt{x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+e^{2x}}}$$

$$y' = \frac{e^x\sqrt{x+e^{2x}} - e^x\dfrac{1}{\sqrt{x+e^{2x}}}\left(1+2e^{2x}\right)}{x+e^{2x}} = \boxed{\frac{e^x(2x-1)}{2\left(x+e^{2x}\right)^{3/2}}}$$

b) Simplificamos la expresión trigonométrica:

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} z) \Rightarrow \operatorname{tg}x = z \Rightarrow \cos(\operatorname{arc\,tg} z) = \cos x = \frac{\operatorname{sen}x}{z} = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$y = \cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{e^x+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{e^x+x^2}\right)^2}} = \frac{e^x+x^2}{\sqrt{\left(e^x+x^2\right)^2+1}}$$

$$y' = \frac{e^x+x^2}{\sqrt{\left(e^x+x^2\right)^2+1}} = \frac{\left(e^x+2x\right)\sqrt{\left(e^x+x^2\right)^2+1} - \left(e^x+x^2\right)\dfrac{2\left(e^x+x^2\right)\left(e^x+2x\right)}{2\sqrt{\left(e^x+x^2\right)^2+1}}}{\left(e^x+x^2\right)^2+1} =$$

$$= \boxed{\frac{e^x+2x}{\left(e^{2x}+2x^2e^x+x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

11.- Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^4\cos^2\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Hallar f '(1) y f ' (1).
b) ¿Existe un mínimo relativo en x = 1?

Solución:

a) $f'(1)=0$; en efecto, aplicando la definición de derivada se tiene que:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)^4\cos^2\left(\dfrac{1}{1+h-1}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^4\cos^2\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}h^3\cos^2\left(\frac{1}{h}\right)=0$$

La última igualdad se obtiene aplicando que h^3 es un infinitésimo (tiende a 0) y $\cos^2\left(\dfrac{1}{h}\right)$ es una función acotada.

Para calcular f ``(1), aplicando también la definición, se necesita calcular previamente f `(x) para $x\neq 1$: f `(x)

$$=4(x-1)^3\cos^2\frac{1}{x-1}+(x-1)^4\,2\cos\frac{1}{x-1}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=4(x-1)^3\cos^2\frac{1}{x-1}+2(x-1)^2\cos\frac{1}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$$

Finalmente, $f''(1)=0$. En efecto:

$$f''(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(1+h-1)^3\cos^2\dfrac{1}{1+h-1}+2(1+h-1)^2\cos\dfrac{1}{1+h-1}\operatorname{sen}\dfrac{1}{1+h-1}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h^3\cos^2\dfrac{1}{h}+2h^2\cos\dfrac{1}{h}\operatorname{sen}\dfrac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4h^2\cos^2\frac{1}{h}+2h\cos\frac{1}{h}\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right)=0+0=0$$

Sin más que aplicar nuevamente que el producto de un infinitésimo por una función acotada es también un infinitésimo.

b) Sí; de hecho, f presenta su mínimo absoluto en x = 1, ya que $f(1)=0$ y $f(x)>0,\ \forall x\neq 1$.

12.- Hallar las derivadas terceras de las funciones:

a) $y = \dfrac{\text{senx}}{1+\cos x}$ **b)** $y = e^{\text{arc tg } x}$

Solución:

a)

$$y' = \frac{\cos x(1+\cos x) - \text{senx}(-\text{senx})}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \boxed{\frac{1}{1+\cos x}};$$

$$y'' = -\frac{-\text{senx}}{(1+\cos x)^2} = \boxed{\frac{\text{senx}}{(1+\cos x)^2}};$$

$$y''' = \frac{\text{senx}}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x(1+\cos x)^2 - \text{senx}\cdot 2\cdot(1+\cos x)(-\text{senx})}{(1+\cos x)^4} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) + 2\text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^3} = \frac{\cos x + \cos^2 x + 2\text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^3} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{1+\cos x + \text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^3}}$$

b) $y' = \dfrac{e^{\text{arc tg } x}}{x^2+1}$;

$$y'' = \frac{\frac{e^{\text{arc tg } x}}{1+x^2}(1+x^2) - e^{\text{arc tg } x}\, 2x}{(1+x^2)^2} = \boxed{\frac{e^{\text{arc tg } x}(1-2x)}{(1+x^2)^2}};$$

$$y''' = \frac{e^{\text{arc tg } x}(1-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{\left(\frac{e^{\text{arc tg } x}}{1+x^2}(1-2x) + e^{\text{arc tg } x}(-2)\right)(1+x^2)^2 - e^{\text{arc tg } x}(1-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{e^{\text{arc tg } x}\left((1-2x) + (-2)(1+x^2) - 4x(1-2x)\right)}{(1+x^2)^3} = \boxed{\frac{e^{\text{arc tg } x}(6x^2-6x-1)}{(x^2+1)^3}}$$

13.- Demostrar que el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ tiene una única raíz real positiva.

Solución:

$p(0) = -1 < 0$, $p(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Existe una raíz en (0, 1) (teorema de Bolzano).

$p'(x) = 3x^2 + 2x + 1$; luego, si $x > 0$, se verifica que $p'(x) > 0$ y p es estrictamente creciente en (0, ∞); luego no se anula más veces en dicho intervalo.

14.- Demostrar que la ecuación $e^x = x+1$ no tiene más solución real que x = 0.

Solución:

Sea $f(x) = e^x - x - 1$; $f(0) = 0$; $f'(x) = e^x - 1\begin{cases} >0 \text{ si } x>0 \\ <0 \text{ si } x<0 \end{cases} \Rightarrow$

f es $\begin{cases} \text{creciente} & \text{si } x>0 \\ \text{decreciente} & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)\begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \\ =0 & \text{si } x=0 \\ >0 & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = e^x - x + 1$=0 sólo para x = 0.

2º método:

Razonando por el absurdo y aplicando el teorema de Rolle.

$$f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Teorema de Rolle:

Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b) con f(a)=f(b). Entonces, existe al menos un punto $c \in$ (a, b) tal que f '(c) = 0.

En nuestro caso:

$f(x) = e^x - x - 1$ es una función continua en $[0,x_0]$ y derivable en $(0,x_0)$ siendo $f(0)=f(x_0)=0$. Entonces existe al menos un punto $c \in (0, x_0)$, tal que: f '(c)=0 con $0<c<x_0$. ¡IMPOSIBLE!

Obviamente, tampoco puede ser x_0 negativa.

15.- Demostrar que si x > 0, entonces, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

Solución:

La tesis a demostrar se obtiene aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[x, x+1]$, con $x > 0$.

Teorema del valor medio o de Lagrange:

Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un punto c ∈ (a, b) tal que f '(c) = (f(b)-f(a))/(b-a).

En nuestro caso:

f(x)=lnx es una función continua en [x, x+1] y derivable en (x, x+1). Entonces existe al menos un punto $c \in (x, x+1)$, es decir x<c<x+1 tal que

$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} \in (x, x+1)$$

Luego

$$x < \frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

16.- Hacer un estudio completo y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$$

Solución:

a) Dominio = **R**; Observamos que:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} = \sqrt[3]{x(x+1)^2} = \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ; } x = -1 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Simetrías. $f(-x) = \sqrt[3]{-x(-x+1)^2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$. No tiene.

c) Asíntotas

Verticales: No hay (Dom = R)

Horizontales: No hay ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$)

Oblicuas: y=mx+n

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 + 2/x + 1/x^2} = 1 \neq 0 \text{ ;}$$

Nota: para el siguiente límite usamos la descomposición en factores de la diferencia de cubos.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); a = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}; b = x$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} - x\right)\left(\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{2/3} + x\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{1/3} + x^2\right)}{\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{2/3} + x\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{1/3} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - x^3}{\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{2/3} + x\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{1/3} + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x}{\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{2/3} + x\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{1/3} + x^2} = .$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2\left(\frac{\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{2/3}}{x^2} + \frac{\left(x^3 + 2x^2 + x\right)^{1/3}}{x} + 1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{y = x + \frac{2}{3}}$$

Puntos de corte con la asíntota:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} \\ y = x + \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(-\frac{8}{9}, \quad -\frac{2}{9}\right)}$$

d) Crecimiento y **decrecimiento**. Máximos y mínimos:

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}}\left(3x^2+4x+1\right)=0\Rightarrow x=\begin{cases}-1\\-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$
f ’	+	No existe	-	0	+
f	↑ Creciente	0 Máx Rel	↓ Decreciente	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ Mín	↑ Creciente

e) Concavidad y **convexidad**. Puntos de Inflexión.

$$y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x+1)^4}}\begin{cases}>0 & \text{si } x<0,\ x\neq -1\\<0 & \text{si } x>0\end{cases}$$

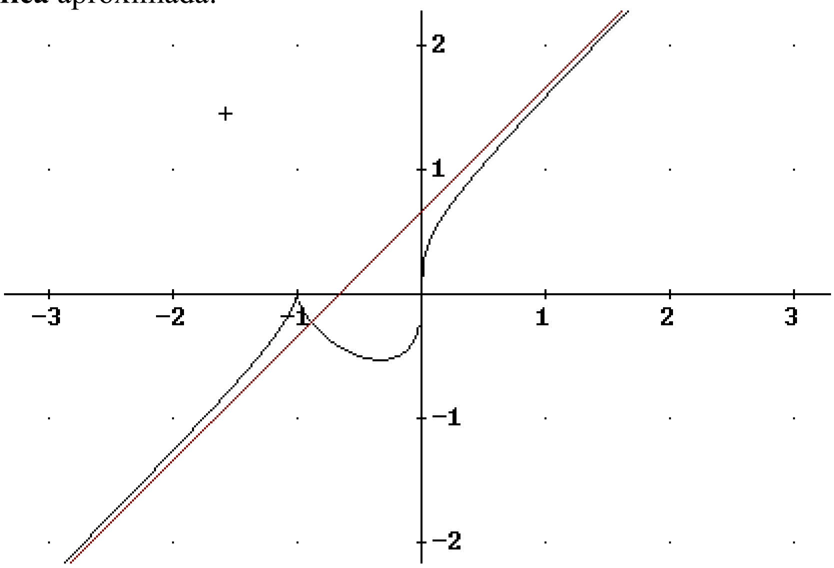
$y''(x)\neq 0\ \forall x$; $y''(x)$ no existe en $x=-1$ y en $x=0$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
f ’’	+	No existe	+	No existe	-
f	cóncava	0	cóncava	0 Inflexión	convexa.

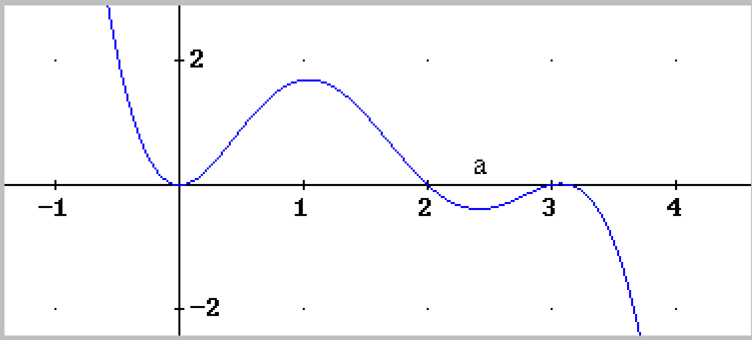
f) Corte con los ejes:

Con OX: $y=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}(0,0)\\(-1,\ 0)\end{cases}}$; Con OY: $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$

g) Gráfica aproximada:

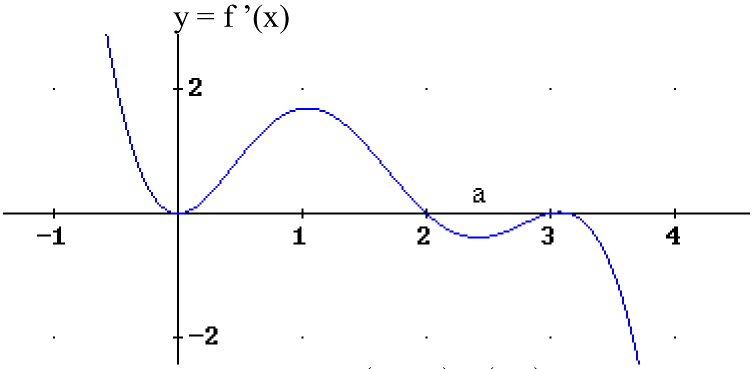


17.- La gráfica de la función derivada de una función y = f(x) viene dada en la figura:



Estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas de la función f. ¿Es f una función acotada?

Solución:



f es creciente $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(0,2)$

f es decreciente $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2,3)\cup(3,\infty)$

Máximo relativo de f en x = 2

f es cóncava $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x)$ es creciente $\Leftrightarrow x \in (0,1)\cup(a,3)$

f es convexa $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x)$ es decreciente $\Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(1,a)\cup(3,\infty)$

Puntos de inflexión de f en x = 0, x = 1, x = a, x = 3.

Asíntotas de f:

f no tiene asíntotas verticales (Dom f = R)

f no tiene asíntotas horizontales (f ' no tiene a y = 0 como asíntota horizontal)

f no tiene asíntotas oblicuas (f ' no tiene asíntotas horizontales)

f no está acotada.

18.- Dada la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}x}$**, se pide:**

a) Dominio.
b) Periodicidad.
c) Signo de f(x) en función de x.
d) Asíntotas.

Solución:

$$y=\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}x}$$

a) Dominio $= R-\left\{x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \;\;/\;\; k\in Z\right\}=R-\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2},\ldots\right\}$

b) Periodicidad: T = $2\pi\Rightarrow$ Basta estudiar $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

c) Signo de f(x):

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow 2x\in(-\pi,3\pi);\;\; f(x)=0\Rightarrow \operatorname{sen}(2x)=0\Rightarrow 2x=\begin{cases}0\\ \pi\\ 2\pi\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}0\\ \dfrac{\pi}{2}\\ \pi\end{cases}$$

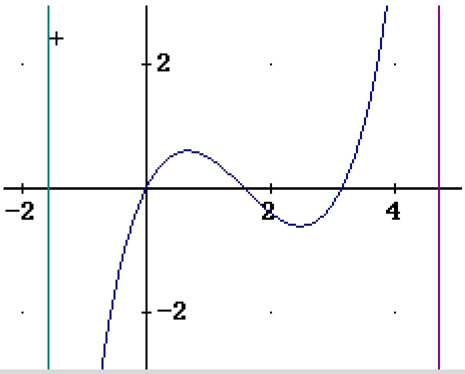
x	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	π	$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$
2x	$(-\pi,0)$	0	$(0,\pi)$	π	$(\pi,2\pi)$	2π	$(2\pi,3\pi)$
f	-	0	+	0	-	0	+

d) Asíntotas:

No hay horizontales ni oblicuas ya que el dominio de f es acotado.

Verticales: $x=-\dfrac{\pi}{2},\;\; x=\dfrac{3\pi}{2}$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{+}}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^{-}}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}x}=+\infty$$



19.- Hallar el conjunto A de números reales determinado por cada una de las siguientes desigualdades e indicar en cada caso si se trata de un conjunto acotado. Hallar, en los casos en que existan, el extremo superior, el extremo inferior, el máximo y el mínimo del conjunto A:

a) $|x+2| \le 3$ **b)** $|1-4x| < \frac{1}{2}$ **c)** $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$ **d)** $|x+1| < |3x-1|$

Solución:

a) $|x+2| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x+2 \le 3 \Leftrightarrow -5 \le x \le 1 \Leftrightarrow x \in [-5,1] = A$

A es un conjunto acotado. Máx A = 1, mín A= -5.

b)

$|1-4x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1-4x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -4x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} > 4x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < \frac{3}{8} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$
$=A$

A es un conjunto acotado. Sup A = 3/8, inf A= 1/8. No tiene máximo ni mínimo.

c) $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$

$(x+3)(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -3, 2, 4$

x	(-∞, -3)	(-3, 2)	(2, 4)	(4, ∞)
x + 3	-	+	+	+
x - 2	-	-	+	+
x - 4	-	-	-	+
(x + 3) (x – 2) (x – 4)	-	+	-	+

Luego, $(x+3)(x-2)(x-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2,4) = A$

A es un conjunto acotado superiormente, pero no es acotado inferiormente. Sup A = 4.
No tiene máximo.

d) $|x+1| < |3x-1|$

Se pueden presentar cuatro casos en función del signo de x + 1 y del signo de 3x -1:

Caso 1: $x+1 \ge 0$ y $3x-1 \ge 0$. Las tres condiciones que han de verificarse entonces son:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x-1 \ge 0 \\ x+1<3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ge \frac{1}{3} \\ 2<2x \Leftrightarrow x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$$

Caso 2: $x+1 \ge 0$ y $3x-1<0$. Las tres condiciones que han de verificarse entonces son:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x-1<0 \\ x+1<1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x<\frac{1}{3} \\ 4x<0 \Leftrightarrow x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x \in [-1, 0)$$

Caso 3: $x+1 < 0$ y $3x-1 \ge 0$. Las tres condiciones que han de verificarse entonces son:

$$\begin{cases} x+1<0 \\ 3x-1 \geq 0 \\ -x-1<3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x \geq \dfrac{1}{3} \\ 0<4x \Leftrightarrow 0<x \end{cases}$$

, no hay ningún valor de x que cumpla las tres condiciones simultáneamente.

Caso 4: $x+1<0$ y $3x-1<0$. Las tres condiciones que han de verificarse entonces son:

$$\begin{cases} x+1<0 \\ 3x-1<0 \\ -x-1<1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x<\dfrac{1}{3} \\ 2x<2 \Leftrightarrow x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)$$

Uniendo los cuatro casos, la desigualdad se verifica para
$x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty) = R-[0,1] = A.$

A es un conjunto que no está acotado ni inferior ni superiormente.

20.- Se consideran las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=e^x$, hallar $(g\circ f)(x)$ y $(f\circ g)(x)$

Solución:

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=e^{(x^2)}$; $\qquad (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(e^x)=(e^x)^2=e^{2x}$

21.- Calcular x en las siguientes ecuaciones:

a) $e^{3x}=2$ **b)** $\ln(x^4)=-1$ **c)** $\ln(\ln x)=2$ **d)** $e^x-4e^{-x}=3$ **e)** $e^{\ln x-2}=3e^4$ **f)** $\log_2(x+3)=5$

g) $\ln x^2+\ln x=4$

Solución:

a) $2=e^{3x}\Rightarrow \ln 2=3x\Rightarrow x=\dfrac{\ln 2}{3}=\ln\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\ln\sqrt[3]{2}$

b) $-1=\ln(x^4)=4\ln x\Rightarrow -1/4=\ln x\Rightarrow x=e^{\frac{-1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

c) $2=\ln(\ln x)\Rightarrow e^2=\ln x\Rightarrow x=e^{e^2}=e^{\left(e^2\right)}$

d) $e^x-4e^{-x}=3\Leftrightarrow e^x-\dfrac{4}{e^x}=3\Leftrightarrow e^{2x}-4=3e^x\Leftrightarrow e^{2x}-3e^x-4=0$

Llamando $t=e^x$, se ha de verificar: $t^2-3t-4=0\Rightarrow t=4,-1$

Para $t=4$, ha de ser $e^x=4\Leftrightarrow x=\ln 4$

Para $t=-1$, ha de ser $e^x=-1$, lo cual es imposible pues $e^x>0,\ \forall x\in R$.

e) $e^{\ln x-2}=3e^4\Leftrightarrow \dfrac{e^{\ln x}}{e^2}=3e^4\Leftrightarrow e^{\ln x}=3e^6\Leftrightarrow x=3e^6$

f) $5=\log_2(x+3)\Rightarrow 2^5=x+3\Rightarrow x=2^5-3$

g) $4=\ln(x^2)+\ln x=\ln\left(x^3\right)=3\ln x\Rightarrow \ln x=4/3\Rightarrow x=e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^4}$

22.- Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}$ **g)** $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2+x-2}{4x^3-1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **i)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^5-7x^4-2x+5\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ **k)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ **l)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+4}=\frac{0}{8}=0$$

b) $$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{0}{0}?=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=\lim_{x\to -5}(x-5)=-10$$

c) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{0}{0}?=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{9}{2}$$

d) $$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\frac{0}{0}?=\lim_{x\to 2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-\left(x^2+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=6$$

e) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}?=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}\text{ no existe ya que }\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x+2}{x-1}=\pm\infty$$

f) $$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}=\frac{\infty}{\infty}?=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{6}{5}$$

g) $$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}=\pm\frac{\infty}{\infty}?=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{4x-\frac{1}{x^2}}=0$$

h) $$\lim_{x\to \infty}\frac{2x^3}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to \infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\infty$$

i) $$\lim_{x\to -\infty}\left(x^5-7x^4-2x+5\right)=\lim_{x\to -\infty}\left[x^5\left(1-7\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right)\right]=-\infty\cdot 1=-\infty$$

j) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{0}{0}?=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+3\right)-4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}=\frac{0}{0}?=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}=\frac{4}{2}=2$$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\infty-\infty ?=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\dfrac{0}{0}?=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+3-3}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

23.- Demostrar que $f(x) = 4x^3 + x - 3 = 0$ tiene exactamente una solución real.

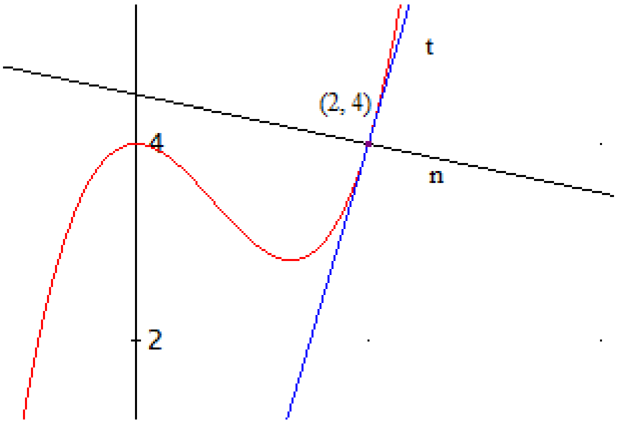
Solución:

$f(x) = 4x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 1 > 0, \forall x \in R$, luego f es estrictamente creciente en R.

$f(0) = -3 < 0$, $f(1) = 2 > 0$, luego f es una función continua (por ser un polinomio) que toma valores de signos opuestos en 0 y en 1, por tanto, existe al menos un valor de $x \in (0,1)$ en el cual f(x) = 0, sin más que aplicar el teorema de Bolzano.

24.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $f(x)=x^3-2x^2+4$ en (2,4).

Solución:



$f'(x)=3x^2-4x \Rightarrow f'(2)=4$

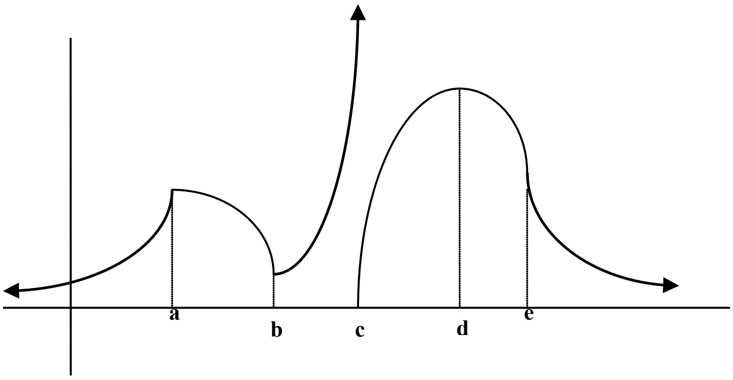
La recta tangente pasa por el punto (2, 4) y tiene de pendiente 4:

$t \equiv y-4=4(x-2)$

La recta normal pasa por el punto (2, 4) y tiene de pendiente -1/4:

$n \equiv y-4=-1/4(x-2)$

25.- Sea y=f(x) una función cuya gráfica es la que aparece más abajo:
Indicar si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:
a) f es continua en todo R.
b) f es derivable en todo R.
c) f tiene un mínimo relativo en x = b.
d) f está acotada inferiormente.
e) f tiene máximos relativos en x = a y en x = d.
f) f está acotada superiormente.
g) f tiene puntos de inflexión en x = a, x = b y x = d
h) f tiene una asíntota vertical en x = c y una asíntota horizontal de ecuación y = 0.
i) f ’(x) = 0 en x = a y en x = d.



Solución:

- **a)** f es continua en todo R: FALSO, pues en x = c presenta una discontinuidad.
- **b)** f es derivable en todo R: FALSO, pues no es continua; además en x = a tampoco es derivable aunque sea continua en ese punto.
- **c)** f tiene un mínimo relativo en x = b: VERDADERO, pues $f(b) \le f(x), \forall x \in E(b)$
- **d)** f está acotada inferiormente: VERDADERO, pues $f(x) \ge 0, \forall x \in R$
- **e)** f tiene máximos relativos en x = a y en x = d: VERDADERO, pues $f(a) \ge f(x), \forall x \in E(a)$, y lo mismo ocurre en d.
- **f)** f está acotada superiormente: FALSO, pues $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$.
- **g)** f tiene puntos de inflexión en x = a, x = b y x = d: FALSO, en x = d no cambia su concavidad. Si lo hace en x =a y en x = b.
- **h)** f tiene una asíntota vertical en x = c y una asíntota horizontal de ecuación y = 0: VERDADERO, ya que, como se aprecia en la gráfica, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+$
- **i)** f ’(x) = 0 en x = a y en x = d: FALSO, en x = a se aprecia un cambio brusco en la gráfica de la función que indica que no existe recta tangente en ese punto y la función no es derivable en él.

26.- Dada la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<-1\\ -x & \text{si } -1\le x\end{cases}$ **. Se pide:**

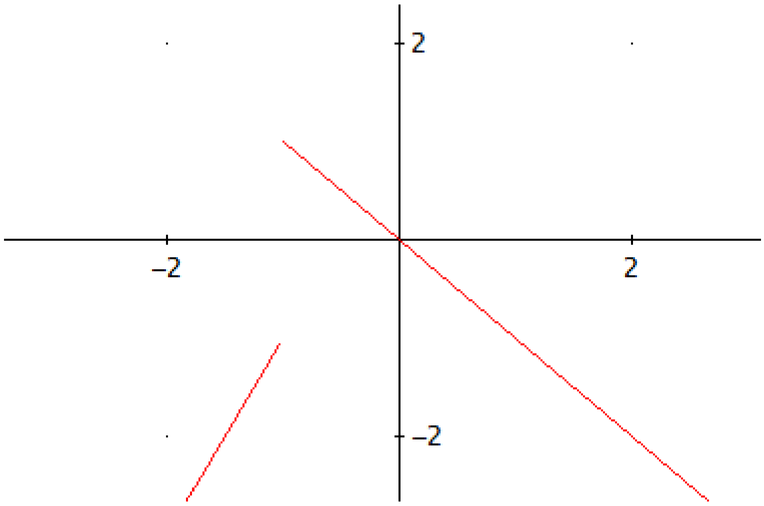
a) Estudiar la continuidad. b) Hallar su función derivada. c) Representar gráficamente f(x).

Solución:

a) f es continua en todo $x\neq -1$, por ser un polinomio. Y si x = -1:
$\lim\limits_{x\to -1^-}(2x+1)=-1\neq 1=\lim\limits_{x\to -1^+}(-x)$, luego f es discontinua en x = -1.

b) $f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<-1\\ -1 & \text{si } -1<x\end{cases}$, y no existe f '(-1).

c)



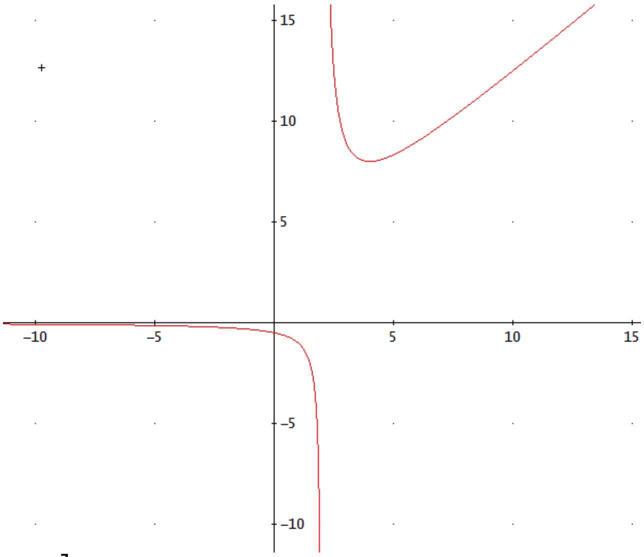
27.- Representar la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{si } x<2\\ \dfrac{x^2}{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$.

¿Está f acotada en $(-\infty,0]$? ¿Tiene máximo y mínimo en ese intervalo?

Solución:

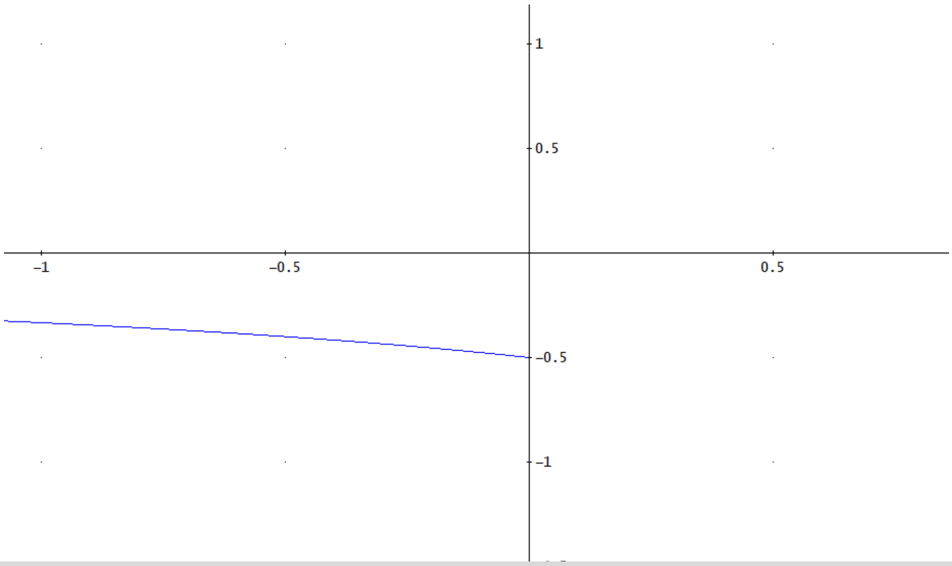
f es una función continua en $R-\{2\}$. En x = 2 tiene una discontinuidad de salto infinito.

Gráfica de la función:



f está acotada en $(-\infty,0]$; $\sup\limits_{(-\infty,0]} f=0$ y no existe $\max\limits_{(-\infty,0]} f$; en cambio, sí existe

$\min\limits_{(-\infty,0]} f=f(0)=-\dfrac{1}{2}$.



28.- Construido un depósito cúbico para almacenamiento de cajas, se quiere estimar con la mayor precisión posible el volumen que puede contener. La medida del lado L del cubo resulta ser 11.35 m con una cota de error estimado de 0.2 m.
a) Aplicar el concepto de diferencial para aproximar el error propagado (porcentual) cometido al calcular el volumen V del depósito.
b) Estimar el máximo error en la medida de L, para que el error propagado al calcular el volumen no supere el 3%.

Solución:

a) L=11,35± 0.20, es decir, se toma como valor aproximado L = 11.35 m y la cota de error, $|dL|$ < 0.20 m, nos indica que el verdadero valor de L está entre 11.15 y 11.55 m.

Este error de L se propaga al calcular el volumen del depósito:

$$V = L^3 = 11.35^3 \approx 1462.14 \text{ m}^3$$

Para obtener una cota del error ΔV se usa la diferencial $\Delta V \approx dV$

$$dV = V'(L)\, dL = 3L^2 dL$$

El error propagado es aproximadamente:

$\dfrac{dV}{V} = \dfrac{3\,L^2 dL}{L^3} = \dfrac{3dL}{L} = \dfrac{3 \cdot 0.2}{11.35} \approx 0.05286$, luego el error propagado en porcentaje es ≤ 5.3%

b) Se pide estimar dL para que $\dfrac{dV}{V} \leq 0.03$, luego:

$$\frac{dV}{V} = \frac{3\,L^2 dL}{L^3} = \frac{3dL}{L} \leq 0.03 \Rightarrow dL \leq \frac{0.03L}{3} = \frac{0.03 \cdot 11.35}{3} = 0.1135 < 0.12$$

Por lo tanto, la cota de error al medir L no debe superar los 11 cm, es decir $|dL|$ < 0.11 m.

29.- a) Enunciar el teorema del VALOR MEDIO o de Lagrange.

b) Un vehículo circula a 90 km/h por el km 100 de una autopista, diez minutos después en el km 125 su velocidad es de 100 km/h, donde le para la policía y le multa. ¿por qué?

Solución:

a) Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que f '(c) = (f(b)-f(a))/(b-a).

b) Sea f(t) la función que expresa el recorrido en el instante t, siendo una función continua y derivable por ejemplo en (0,1/6), ya que 10 minutos es 1/6 horas.

$$f'(c) = \frac{f(1/6)-f(0)}{1/6} = \frac{125-100}{1/6} = 150 \text{ km/h}$$

El teorema del valor medio estable que en algún momento $c \in \left(0,1/6\right)$ la velocidad media es 150 km/h superando el límite de 120 km/h.

30.- a) Enunciar el teorema de Rolle:

Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b) tal que f (a) = f (b). Entonces, existe al menos un punto c $\in$ (a, b) tal que f '(c) = 0.

b) Razonar si puede aplicarse el teorema de Rolle a la función f (x) = ln (x^2) en el intervalo [-1, 1]:

Solución:

a) Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b) con f(a)=f(b). Entonces, existe al menos un punto c $\in$ (a, b) tal que f '(c) = 0.

b) $f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}\neq 0 \quad \forall x \in R$, luego no se verifica la tesis del teorema de Rolle, por tanto, falla alguna de las hipótesis.

f (-1) = f (1) = 0, luego, se cumple f (a) = f (b).

Pero, $f'(x)=\frac{2}{x}$ no existe para x = 0 $\in$ (-1, 1), luego falla la hipótesis de derivabilidad en el intervalo. De hecho, también falla la hipótesis de continuidad, pues f no es tampoco continua en x = 0 $\in$ [-1, 1].

31.- a) Hallar el conjunto A de números reales determinado por la siguiente desigualdad:

$$|1-3x| > 2$$

¿Es A un conjunto acotado?

b) Hallar el dominio de la función $f(x) = \ln(\cos x)$

c) Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{2^x - 1}{e^x + 1}$

Solución:

a) $|1-3x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x < -2 \Leftrightarrow -3x < -3 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1,\infty) \\ 1-3x > 2 \Leftrightarrow -3x > 1 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$

Por tanto, $A = \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (1,\infty)$. No es un conjunto acotado.

b) $\cos x > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$, ya que solo existe el ln de un número positivo.

c) $y' = \dfrac{(e^x+1)2^x \ln 2 - (2^x - 1)e^x}{(e^x+1)^2}$

32.- Hallar las derivadas primeras de las funciones:

a) $f(x) = tg^2(x^2)$.

b) $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Solución:

a) $f(x) = tg^2\left(x^2\right) \Rightarrow f'(x) = 2tg\left(x^2\right)\left(1+tg^2\left(x^2\right)\right)2x$

b) $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{\left(1-x^2\right)}$

33.- Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

Solución:

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\Rightarrow$$

$$\ln y=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}\underset{\text{L'Hópital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{-\frac{1}{x^{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1\Rightarrow y=e$$

34.- Se desea calcular el área A de un triángulo cuya altura mide el doble de la base.

a) Si se obtiene un valor de 10.4 m al medir la longitud de la base b con un error máximo de 5 cm, hallar el máximo error porcentual cometido en el cálculo del área del triángulo.

b) ¿Cuál ha de ser el máximo error porcentual permitido en la medida de la longitud de la base para que el error cometido en el cálculo del área no supere los 0.3 m²?

Solución:

a) A= $\frac{b\cdot h}{2}=\frac{b\cdot 2b}{2}=b^2$, b = 10.4 m, db $\leq$ 0.05 m

$\Delta A \approx dA$ = A' (b) db = 2 b db $\leq$ 2 ·10.4 ·0.05 $\approx$ 1.04 m^2

$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} \leq \frac{1.04}{(10.4)^2} \approx 0.0096$

Por tanto, el error porcentual al calcular el área será $\leq$ 0.96%

b) $\Delta A \leq 0.3$

$\Delta A \approx dA$ = A' (b) db = 2 b db $\leq 0.3 \Rightarrow$ db$\leq \frac{0.3}{2b} \Rightarrow \frac{db}{b} \leq \frac{0.3}{2(10.4)^2} \approx 0.00138 \Rightarrow$

El error porcentual en la medida de la base ha de ser $\leq$ 0.13%

35.- Sean las funciones f (x) = arc tg (x), g (x) = $\sqrt{\dfrac{1-\cos 3x^2}{1+\cos 3x^2}}$ **. Se pide:**

a) $(f\circ g)(x)$**.**

b) f '(x)

c) g '(x).

d) $(f\circ g)'\,(x)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos 3x^2}{1+\cos 3x^2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{3x^2}{2}\right)\right)=\dfrac{3x^2}{2}.$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

c) $g'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos 3x^2}{1-\cos 3x^2}}\dfrac{6x\,\mathrm{sen}3x^2\left(1-\cos 3x^2\right)-\left(1+\cos 3x^2\right)6x\left(-\mathrm{sen}3x^2\right)}{\left(1+\cos 3x^2\right)^2}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 3x^2}{1-\cos 3x^2}}\frac{12x\,\mathrm{sen}3x^2}{\left(1+\cos 3x^2\right)^2}=\frac{6x\,\mathrm{sen}3x^2}{\sqrt{\left(1-\cos 3x^2\right)\left(1+\cos 3x^2\right)^3}}=$$

$$=\frac{6x\,\mathrm{sen}3x^2}{\left(1+\cos 3x^2\right)\sqrt{\left(1-\cos 3x^2\right)\left(1+\cos 3x^2\right)}}=\frac{6x}{1+\cos 3x^2}$$

d) $(f\circ g)'\,(x)=f'(g(x))g'(x)=\dfrac{1+\cos 3x^2}{2}\dfrac{6x}{1+\cos 3x^2}=3x$

36.- a) Enunciar el teorema de Rolle.

b) La función $f(x)=\sqrt[5]{x^2}-1$ se anula en los extremos del intervalo [-1,1]. Al mismo tiempo es $f'(x)\neq 0$. Explicar por qué no se verifica la tesis del teorema en este ejemplo.

Solución:

a) Teorema de Rolle.

Si f es continua en [a,b] y derivable en (a,b), cumpliéndose f(a)=f(b), entonces existe, al menos, un punto $c\in$(a,b) tal que $f'(c)=0$.

b)

$f(x)=\sqrt[5]{x^2}-1$ se trata de una función continua en todo R, además

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt[5]{1^2}-1=0 \\ f(-1)=\sqrt[5]{(-1)^2}-1=0 \end{array}\right\} f(-1)=f(1)\Rightarrow f'(c)=\frac{2}{5}c^{-3/5}\neq 0 \text{ ¡contradicción!}$$

Pero $f'(x)=\frac{2}{5}x^{-3/5}=\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\Rightarrow \nexists f'(0)$, luego no es derivable en x=0, y por tanto no es derivable en el intervalo (-1,1).

37.- Sean las funciones f (x) = arc tg (x^2), g (x) = ln ($\sqrt{x}$)

a) Hallar $(g \circ f)(x)$ **y** $(f \circ g)(x)$**.**

b) Hallar las derivadas f '(x) y g '(x).

c) Aplicando la regla de la cadena hallar la derivada $(g \circ f)'\ (x)$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right) = \ln\sqrt{\operatorname{arctg}\left(x^2\right)}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\ln\sqrt{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\left(\ln\sqrt{x}\right)^2\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}$, $\quad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$

c)

$$(g \circ f)'\ (x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2f(x)}\frac{2x}{1+x^4} = \frac{1}{2\operatorname{arctg}\left(x^2\right)}\frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x}{2\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\left(1+x^4\right)}$$

38.- a) Enunciar el teorema de Lagrange o de los incrementos finitos.

b) Aplicando el teorema anterior a la función f(x) = ln x en un intervalo adecuado, demostrar que $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.

Solución:

a) Sea f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

b) Aplicando el teorema de Lagrange a la función ln x en el intervalo [1, 2], se obtiene: $\ln 2 - \ln 1 = \frac{1}{c}(2 - 1)$, con $1 < c < 2$. Es decir, $\ln 2 = \frac{1}{c}$, con $1 < c < 2$.

Si $1 < c < 2$, entonces $\frac{1}{2} < \frac{1}{c} < 1$. Es decir, $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.

39.- Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ **.**

Solución:

Obviamente no existe $f(0)=\dfrac{e^{1/0}}{1+e^{1/0}}$, luego no es continua en x=0; pero que ocurre con el límite:

$$¿\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}?$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{e^{1/x}}+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}=\frac{0}{1+0}=0$$

En consecuencia, no existe el límite y la discontinuidad es inevitable.

40.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -3\text{senx} & \text{si } x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{Asenx+B} & \text{si } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } \dfrac{\pi}{2}\le x \end{cases}$ **elegir A y B para que f(x) sea continua en todos los puntos.**

Solución:

Tiene que ser: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ para ello escogemos los puntos $-\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \text{Asenx}+B=\text{Asen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+B=-3\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \text{Asenx}+B=\text{Asen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+B=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

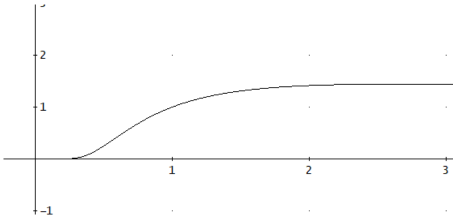
Lo que nos lleva a un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Asen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+B=-3\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{Asen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+B=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -A+B=-3(-1) \\ A+B=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{3}{2} \\ B=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

41.- ¿Cuál es mayor e^{π} o π^{e}?

Solución:

Sea la función: $f(x)=x^{1/x}\Rightarrow f'(x)=x^{\frac{1-2x}{x}}(1-\ln x)<0$ si e<x



$$\text{Así para } e<\pi\Rightarrow\pi^{\frac{1}{\pi}}<e^{\frac{1}{e}}\Rightarrow\left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)^{\pi e}<\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{\pi e}\Rightarrow\pi^{e}<e^{\pi}$$

42.- Si $f(x) = 2^x$, demostrar, a mano, que:

a) $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$ **b)** $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$

Solución:

a) $f(x+3) - f(x-1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x 2^3 - 2^x 2^{-1} = 2^x \left(2^3 - 2^{-1}\right) = \frac{15}{2} 2^x = \frac{15}{2} f(x)$

b) $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \frac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = \frac{2^x 2^3}{2^x 2^{-1}} = 16 = 2^4 = f(4)$

43.- Hallar, a mano, los intervalos determinados por las siguientes desigualdades.

a) $\frac{2x+1}{x+3} > 3$ **; b)** $\left|\frac{2}{x} - 3\right| < 5$

Solución:

a) $\frac{2x+1}{x+3} > 3$

Se pueden presentar dos casos en función del signo de x+3:

Caso 1: $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$.

$\frac{2x+1}{x+3} > 3 \Rightarrow 2x+1 > 3(x+3) \Rightarrow x < -8$, pero como x>-3 es ¡IMPOSIBLE!

Caso 2: $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$.

$\frac{2x+1}{x+3} > 3 \Rightarrow 2x+1 < 3(x+3) \Rightarrow x > -8$

Resultado: $x \in (-8,-3)$

b) $\left|\frac{2}{x} - 3\right| < 5 \Leftrightarrow -5 < \frac{2}{x} - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < \frac{2}{x} < 8 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$

Resultado: $x \in (-\infty,-1) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

44.- Despejar, a mano, x en las siguientes ecuaciones:

a) $e^{x}+12e^{-x}=7$ **b)** $e^{-2x}-7e^{-x}=8$ **c)** $e^{7\ln x}=128$

Solución:

a) $e^{x}+12e^{-x}=7$ llamando $e^{x}=z$

$$z+\frac{12}{z}=7 \Leftrightarrow z^{2}-7z+12=0 \Rightarrow z=\left(\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}\right)=\begin{cases}3=e^{x}\\ 4=e^{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\ln 2\\ x=\ln 3\end{cases}$$

b) $e^{-2x}-7e^{-x}=8$ llamando $e^{-x}=z$

$$\Leftrightarrow z^{2}-7z-8=0 \Rightarrow z=\left(\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{2}\right)=\begin{cases}-1=e^{x}>0\\ 8=e^{x}\end{cases} \Rightarrow x=3\ln 2$$

c) $e^{7\ln x}=128=e^{\ln x^{7}}=x^{7} \Rightarrow x=2$

45.- Hallar a mano, indicando todos los pasos intermedios, las derivadas de las funciones:

a) y=2tgx; b) y=tg2x; c) y=tg^{2}x; d) y=tg(x^2);

e) y=tg2^x; f) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{tgx}}{-1+\mathrm{tgx}}}$ **; g)** $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

a) $y=2\mathrm{tgx}\Rightarrow y'=2\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)$

b) $y=\mathrm{tg}2x\Rightarrow y'=2\left(1+\mathrm{tg}^2\left(2x\right)\right)$

c) $y=\mathrm{tg}^2x\Rightarrow y'=2\mathrm{tgx}\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)$

d) $y=\mathrm{tg}(x^2)\Rightarrow y'=2x\left(1+\mathrm{tg}(x^2)\right)$

e) $y=\mathrm{tg}2^x\Rightarrow y'=2^x\ln 2\left(1+\mathrm{tg}^2 2^x\right)$

f)

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+\mathrm{tgx}}{-1+\mathrm{tgx}}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\mathrm{tgx}\right)-\ln\left(1+\mathrm{tgx}\right)\right)\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1/\cos^2x}{1+\mathrm{tgx}}-\frac{1/\cos^2x}{-1+\mathrm{tgx}}\right)=$$

$$0\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2x}\frac{-2}{\mathrm{tg}^2x-1}=-\frac{1}{\cos^2x}\frac{\cos^2x}{\mathrm{sen}^2x-\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x-\mathrm{sen}^2x}=\frac{1}{\cos(2x)}$$

$$\text{g) } y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}-1}\left(\frac{x-(x+1)}{x^2}\right)$$

46.- Demostrar que si $0 \le a \le b$ **entonces** $\frac{a}{a+1} \le \frac{b}{b+1}$

Solución:

$$0 \le a \le b \Rightarrow 0 \le a + ab \le b + ab \Rightarrow 0 \le a(1+b) \le b(1+a) \Rightarrow \frac{a}{a+1} \le \frac{b}{b+1}$$

47.- Calcular a, b y c para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}+a & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}+b & \text{si} \quad 1<x<2 \\ c & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

Solución:

Tiene que ser: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ para ello escogemos los puntos 0, 1 y 2

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}+a=0=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2}+a=f(0)\Rightarrow a=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(2x-\frac{x^2}{2}+b\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{2}=f(1)\Rightarrow b=-1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2^+} c=\lim_{x\to 2^-}\left(2x-\frac{x^2}{2}-1\right)=f(2)\Rightarrow c=1$$

Asíntotas de una función

Verticales: Si $x \to a \Rightarrow y \to \infty$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es una asíntota vertical}$$

(Sólo puede haber asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio)

Horizontales: Si $x \to \infty \Rightarrow y \to b$.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b \text{ es una asíntota horizontal}$$

Oblicuas: $y = mx + n$ es una asíntota oblicua, siendo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right); \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - mx\right)$$

Nota: las asíntotas nos informa de si la función está o no acotada.

Dominio de definición o campo de existencia.

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analítica de la función.

$$D = \{\ x \in R \text{ tales que, existe } y = f(x)\ \}$$

Simetrías de una función

$$f(-x)=\begin{cases} f(x) \text{ simétrica respecto el eje OY (Función par)} \\ -f(x) \text{ simétrica respecto el origen O (Función impar)} \end{cases}$$

Continua

- Una función y=f(x) es **continua** en x = a si se verifica: $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$
- Una función z=f(x,y) es continua en un punto (x_o,y_o) si se verifica: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$
-

Continuidad en un intervalo

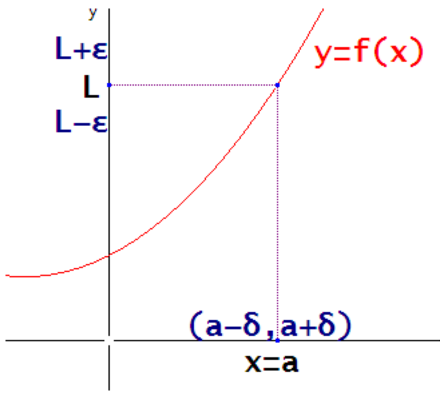
Una función y = f(x) es **continua** en un subconjunto o en un intervalo si lo es en cada de sus puntos.

Límite

El **límite** de la función f es L cuando x tiende a "a" si cuando x se acerca a "a" f se acerca a L tanto como se quiera, es decir,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ /\ \text{si } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

En cuyo caso, escribiremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



Derivada

Dada la función f definida en el intervalo I y $a \in I$, se llama **derivada** de f en a, y se denota con f '(a), al siguiente límite: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Representa la pendiente de la recta tangente a f en x=a.

Función	Función Derivada
$y = k$	**La derivada de una constante es igual a cero. Es decir: $y' = 0$**
$y = x$	**La derivada de la función identidad es igual a 1. Es decir: $y' = 1$**
$y = f(x) + g(x)$	**La derivada de una suma de funciones es igual a la derivada de cada uno de los sumandos. Es decir: $y' = f'(x) + g'(x)$**
$y = f(x) \cdot g(x)$	**La derivada de un producto de funciones es igual a la derivada del 1er factor por el 2º factor sin derivar más la derivada del 2º factor por el 1º sin derivar. Es decir:** $y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	**La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar partido por el denominador al cuadrado. Es decir:** $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
$y = f(g(x))$	**La derivada de la composición de dos funciones es igual a la derivada de la primera función respecto la segunda por la derivada de la segunda respecto x. Es decir:** $y' = f'_g \cdot g'_x$

$y = \log_a f(x)$	La derivada del logaritmo en base a de una función es igual a la derivada de la función partida por la función y multiplicado este cociente por el logaritmo en base a del nº e. Es decir: $$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$$
$y = \ln f(x)$	La derivada del logaritmo neperiano de una función es igual a la derivada de la función partida por la función sin derivar. Es decir: $$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
$y = f(x)^k$	La derivada de una función elevada a una cte es igual al exponente multiplicado por la función exponencial elevada a un grado menos y por la derivada de la base. Es decir: $$y' = k \cdot f(x)^{k-1} \cdot f'(x)$$
$y = k^{f(x)}$	La derivada de una constante elevada a una función es igual a la derivada del exponente multiplicado por la misma función exponencial y por el logaritmo neperiano de la base. Es decir: $$y' = f'(x) \cdot k^{f(x)} \ln k$$
$y = f(x)^{g(x)}$	La derivada de una función elevada a otra función es igual al exponente multiplicado por la función exponencial elevada a un grado menos y por la derivada de la base más la derivada del exponente multiplicado por la misma función exponencial y por el logaritmo neperiano de la base. Es decir: $$y' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + g'(x) \cdot f(x)^{g(x)} \cdot \ln(f(x))$$

y = sen f(x)	**La derivada del seno de una función es igual a la derivada de la función por el coseno de la función. Es decir:** $y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$

y = cos f(x)	**La derivada del coseno de una función es igual a menos la derivada de la función por el seno de la función. Es decir:** $y' = - f'(x) \cdot \text{sen } f(x)$

y = tg f(x)	**La derivada de la tangente de una función es igual:** **<u>1ª</u> a la derivada de la función multiplicada por 1 más el cuadrado de la tangente de la función. Es decir:** $y' = f'(x) \cdot (1 + \text{tg}^2 f(x))$ **<u>2ª</u> a la derivada de la función dividida por el coseno al cuadrado de la función. Es decir:** $y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$ **<u>3ª</u> a la derivada de la función por la secante al cuadrado de la función. Es decir:** $y' = f'(x) \cdot \sec^2 f(x)$

y = cotg f(x)	**La derivada de la cotangente de una función es igual:** **<u>1ª</u> a menos la derivada de la función multiplicada por 1 más el cuadrado de la cotangente de la función. Es decir:** $y' = - f'(x) \cdot (1 + \text{cotg}^2 f(x))$ **<u>2ª</u> a menos la derivada de la función dividida por el seno al cuadrado de la función. Es decir:** $y' = - \dfrac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)}$

y = sec f(x)	**La derivada de la secante de una función es igual a la derivada de la función multiplicada por la secante de la función y por la tangente de la función es decir:** $y' = f'(x) \cdot \sec f(x) \cdot \text{tg } f(x)$

y = cosec f(x)	La derivada de la cosecante de una función es igual a menos la derivada de la función multiplicada por la cosecante de la función y por la cotangente de la función es decir: $y' = -f'(x) \cdot \operatorname{cosec} f(x) \cdot \operatorname{cotg} f(x)$
y = arc sen f(x)	La derivada del arco seno de una función es igual a la derivada de la función dividida por la raíz cuadrada de 1 menos la función al cuadrado. Es decir: $y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
y = arc cos f(x)	La derivada del arco coseno de una función es igual a menos la derivada de la función dividida por la raíz cuadrada de 1 menos la función al cuadrado. Es decir: $y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
y = arc tg f(x)	La derivada del arco tangente de una función es igual a la derivada de la función dividida por 1 más la función al cuadrado. Es decir: $y' = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$
y = sh x	La derivada del seno hiperbólico de x es igual al coseno hiperbólico de la función. Es decir: $y' = \operatorname{ch} x$
y = ch x	La derivada del coseno hiperbólico de x es igual al seno hiperbólico de la función. Es decir: $y' = \operatorname{sh} x$

y = th x	**La derivada de la tangente hiperbólica de x es igual:** **<u>1ª</u> a uno menos el cuadrado de la tangente hiperbólica de x. Es decir:** $y' = 1 - th^2 x$ **<u>2ª</u> a uno dividido por el coseno al cuadrado de x. Es decir:** $y' = \dfrac{1}{ch^2 x}$ **<u>3ª</u> a la secante al cuadrado de x. Es decir:** $y' = sech^2 x$

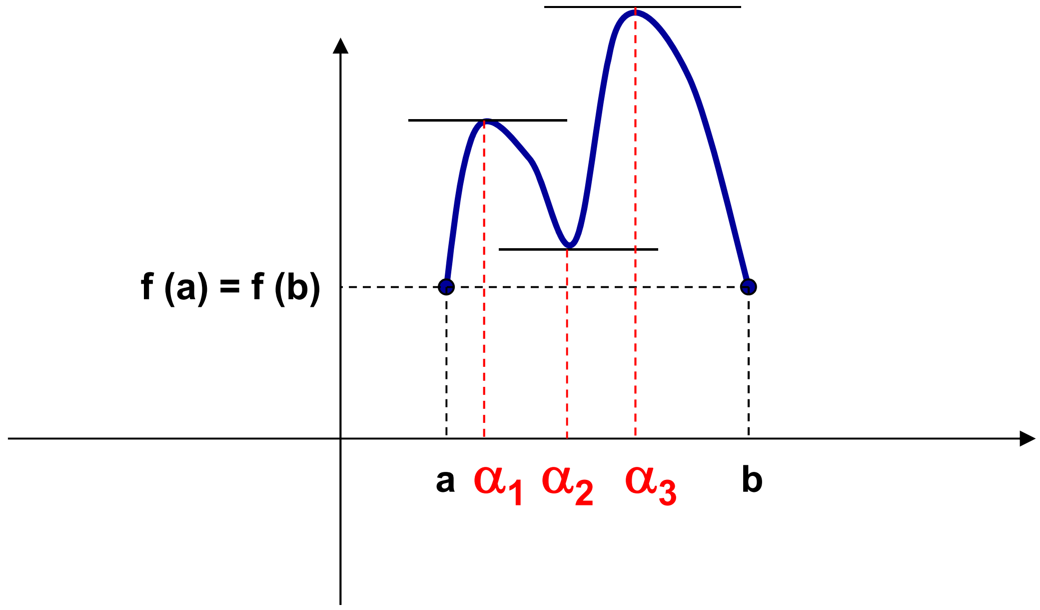
$y = \arg sh\, x =$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	**La derivada del argumento seno hiperbólico de x es igual a 1 partido por la raíz cuadrada de x al cuadrado más 1. Es decir:** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$y = \arg ch\, x =$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$	**La derivada del argumento coseno hiperbólico de x es igual a 1 partido por la raíz cuadrada de x al cuadrado más 1. Es decir:** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$y = \arg th\, x =$ $= \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	**La derivada del argumento tangente hiperbólica de x es igual a 1 partido por 1 menos x elevado al cuadrado. Es decir:** $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$

Teorema de Rolle

Sea f(x) una función <u>continua</u> en el intervalo cerrado [a,b] y <u>derivable</u> en el intervalo abierto (a,b). Si <u>f(a) = f(b)</u>, entonces existe, al menos, un punto $\alpha \in$(a,b) donde la derivada de la función se anula, $f'(\alpha) = 0$.

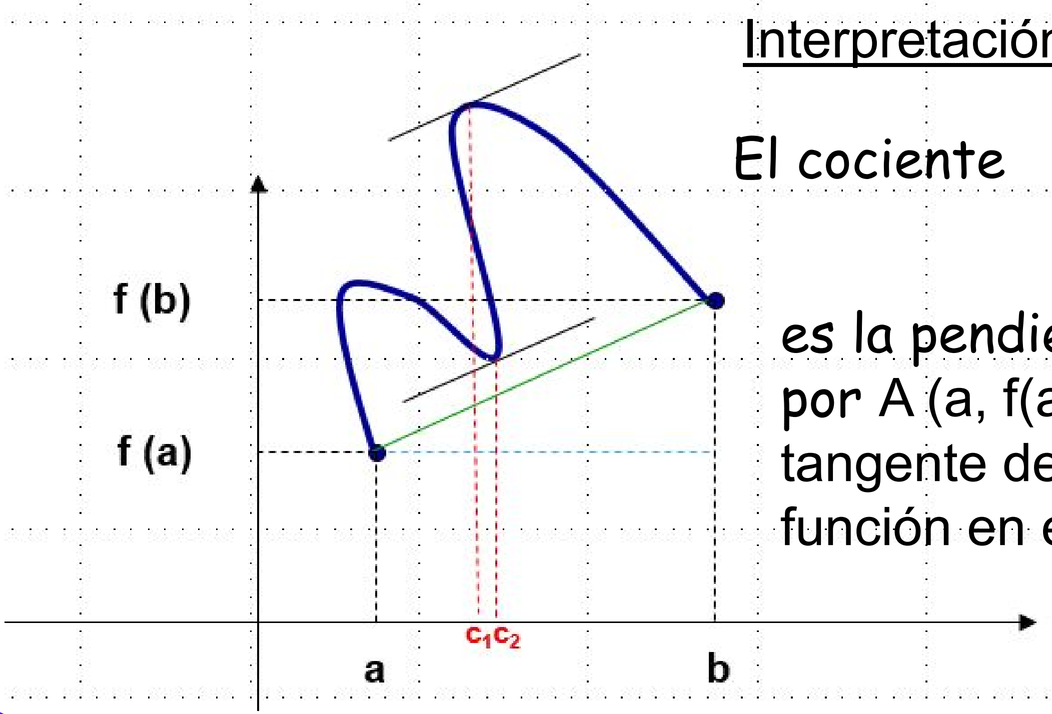


Teorema de los incrementos finitos, de Lagrange o del valor medio

Si f(x) es una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y

derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces existe, al menos,

un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación geométrica

El cociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg(\alpha)$

es la pendiente de la recta que pasa por A (a, f(a)) y B (b, f(b)) y $f'(c)$ es la tangente de la recta tangente a la función en el punto (c, f(c)).

Sigue

Extremo inferior o ínfimo

Cota inferior que sigue a todas las cotas inferiores de un subconjunto de un conjunto dado.

Extremo superior o supremo

Cota superior que precede a todas las cotas superiores de un subconjunto de un conjunto dado.

Extremos

Valor máximo o mínimo de una función.

Sea S un subconjunto del dominio de una función y=f(x).

La función f tiene un **máximo (mínimo)** relativo en el punto a, cuando f(a) es el mayor **(**menor**)** valor que la función toma cuando la variable recorre S. Es decir, $f(x) \le f(a), \;\; \forall x \in S \left(f(x) \ge f(a), \;\; \forall x \in S \right)$. S un entorno de a.

La función f tiene un **máximo (mínimo)** absoluto en a, cuando $f(x) \le f(a)$ $\left(f(x) \ge f(a) \right)$ para todos los x del dominio de f.

Diferencial

- **Diferencial de una función f en un punto a** es la aplicación lineal:

$$\begin{array}{l} df(a): R \to R \\ \quad x \to f'(a)\cdot x \end{array}$$ siendo f derivable en a.

Suele denotarse dx a la variable de la aplicación lineal diferencial. Será, por tanto, una función de dos variables a y dx.

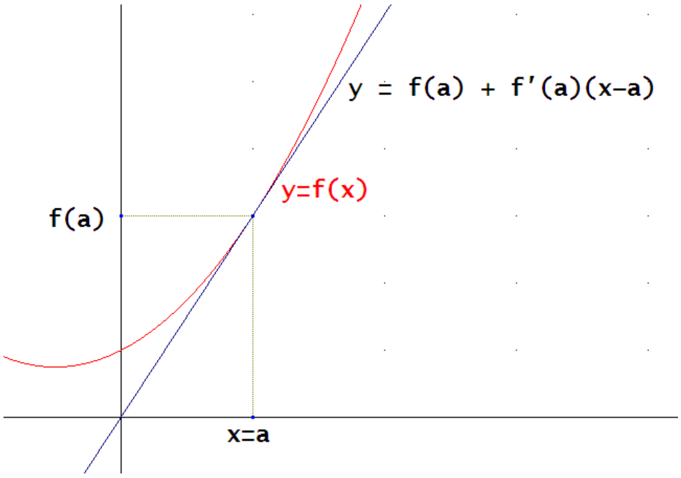
$$df(a)(dx)=df(a,dx)=f'(a)dx$$

Recta tangente

La **recta tangente** a la curva

y = f(x) en el punto (a,f(a)) en el cual f es derivable es la siguiente:

y - f(a)=f '(a)(x - a)



Recta normal

- La **recta normal** a la curva y = f(x) en el punto (a,f(a)) en el cual f es derivable es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto: y-f(a)= - (x-a)/ f '(a)

Función inversa

Sea $f: A \rightarrow B$ con $A, B \subset R$ una función biyectiva. Llamaremos **función inversa de f**, y la denotaremos por f^{-1}, a la función:

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\rightarrow A \\ y &\rightarrow f^{-1}(y) = x \end{aligned} \quad \text{siendo } f(x)=y$$

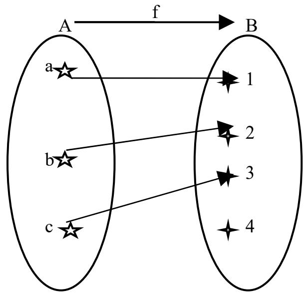
Se verifica que: $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$

La gráfica de f^{-1} es simétrica respecto de la recta y=x, respecto de la gráfica de f.

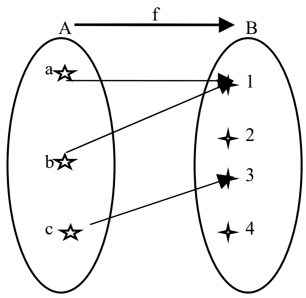
Aplicación inyectiva:

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **inyectiva** si cada elemento de B, que es imagen de uno de A, lo es de uno sólo, es decir, $\forall a,b \in A, \text{si } f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$.

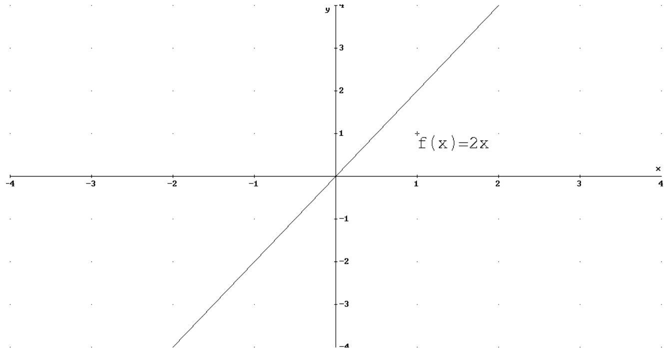
Ejemplo: Sean $A=\{a,b,c\}$ *y B={1,2,3,4} de tal forma que f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3, entonces f es una aplicación inyectiva.*



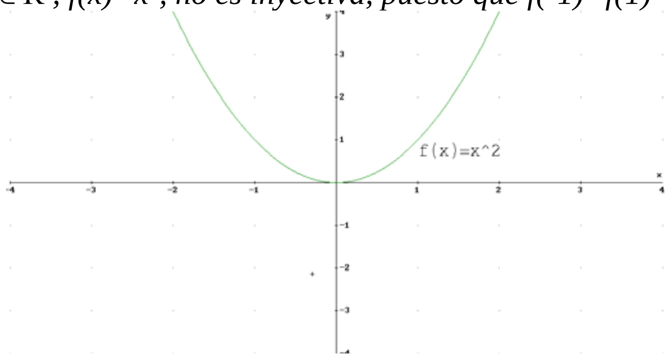
Ejemplo: Sean $A=\{a,b,c\}$ *y B={1,2,3,4} de tal forma que f(a)=1, f(b)=1, f(c)=3, entonces f es una aplicación, pero no es inyectiva.*



Ejemplo: Sea $\forall x \in \mathrm{R}$ *, f(x)=2x, es inyectiva, puesto que si f(a)=f(b), en nuestro caso 2a=2b entonces a = b.*



Ejemplo: Sea $\forall x \in \mathrm{R}$ *, f(x)=*x^2*, no es inyectiva, puesto que f(-1)=f(1)=1.*



Función periódica

Función para la que existe una constante p tal que $f(x+p)=f(x)$, para todo valor x de su dominio. La constante p se llama **período** cuando es el valor mínimo que lo cumple.

Crecimiento

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él "x" y "x+h" se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) < f(x+h)$

Si f '(a)>0, la función f es creciente en a

Decrecimiento

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él "x" y "x+h" se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) > f(x+h)$.

Si f '(a)<0, la función f es decreciente en a

Cóncava y convexa

Una función es **cóncava** si la gráfica de la función queda por encima de la recta tangente en cada uno de los puntos.

Si $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ para todos los puntos x de un intervalo, f es **cóncava** (f es **convexa**) en dicho intervalo.

Puntos de inflexión.

Punto de una curva plana en el que la curvatura cambia de sentido de cóncava a convexa o viceversa. La tangente en un punto de inflexión atraviesa la curva.

Si $f''(a)=0$ y $f'''(a)\neq 0$, entonces (a, f(a)) es un **punto de inflexión**

Un conjunto A está acotado inferiormente si existe $k \in R$ tal que $k \leq a, \forall a \in A$

Se dice entonces que k es una cota inferior de A

Un conjunto A está acotado superiormente si existe $k \in R$ tal que $a \leq k, \forall a \in A$.

Se dice entonces que k es una cota superior de A.

Un conjunto A es acotado si está acotado inferior y superiormente.