Integrales Indefinidas

- **Función primitiva**

Dada una función y = f(x) definida en un intervalo [a,b], se llama **primitiva** de f(x) en [a,b] a cualquier función F(x) definida en [a,b] tal que F'(x) = f(x) para todo $x \in [a,b]$.

Una función continua tiene infinitas primitivas.

- **Integral indefinida**

Al conjunto de todas las primitivas en [a,b] de una función dada f(x) se le llama **integral indefinida** de f(x) en [a,b].

Notación: $\int \mathbf{f(x)\,dx} = \left\{ \textbf{Primitivas de f(x) en } [\mathbf{a,b}] \right\} = \mathbf{F(x)+C}$

No todas las funciones admiten integral indefinida, pero, si una función es continua, entonces, podemos asegurar que tiene integral indefinida. Lo que no garantizamos es que ésta pueda expresarse como composición de un número finito de funciones elementales.

Observación:

Si f(x) es una función derivable se denota con df, y se lee "**diferencial de f**'' a la siguiente expresión: $\mathbf{df = f'(x)dx}$.

Propiedad de las integrales indefinidas

$$\int \left(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\right)dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

- **Integrales inmediatas**

Las reglas de cálculo de primitivas, se derivan de las reglas de cálculo de derivadas. Utilizando las tablas de derivadas leídas de derecha a izquierda, obtendríamos la tabla de integrales inmediatas:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsen} x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \arg \mathrm{ch} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \arg \mathrm{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C = \begin{cases} \arg \mathrm{th} x + C & si \quad x \in (-1,1) \\ \arg \mathrm{cth} x + C & si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

MÉTODOS DE INTEGRACION

• Integración por cambio de variable o sustitución

Muchas veces un cambio de variable x=g(t) transforma la integral $\int \mathbf{f(x)\,dx}$ en otra más sencilla $\int \mathbf{f(g(t))g'(t)\,dt}$ siendo g y g' funciones continuas y existiendo g^{-1}, cuando esto ocurra se resuelve esta última integral y se sustituye t por $g^{-1}(x)$ en la función primitiva obtenida, resultando la función primitiva de f(x).

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = F(t) + C = F(g^{-1}(x)) + C$$

Se suele utilizar cuando la expresión a integral contiene raíces, funciones exponenciales, funciones logarítmicas o funciones trigonométricas.

También puede hacerse un cambio, de las mismas características que el anterior, tomando t=h(x), siendo f(x) una función compuesta de h(x) y otras funciones.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

Inmediatas y por sustitución:

1) $\int \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos^4 x} dx$; 2) $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$; 3) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$; 4) $\int \frac{(\mathrm{arc\,tg}\, x)^3}{1+x^2} dx$; 5) $\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$; 6) $\int 3x^2(7+4x^3)^5 dx$

Solución:

$$\int \mathbf{senxdx = -\cos x + C}$$

1) $\int \frac{\text{senx}}{\cos^4 x}dx = \int \cos^{-4} x\,\text{senx}dx = -\frac{1}{3}\int 3\cos^{-4} x(-\text{senx})dx = \frac{1}{3}\cos^{-3} x + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \left(1 + tg^2 x\right)dx = tgx + C$$

2) $\int tg^2 x dx = \int (tg^2 x + 1 - 1)dx = tgx - x + C$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

3) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(x)) + C$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctgx} + C = -\text{arcctgx} + C$$

4) $\int \frac{(\text{arc tg } x)^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\text{arctg}^4 x + C$

$$\int \mathbf{senxdx = -\cos x + C}$$

5) $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = -2\cos\sqrt{x+1} + C$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

6) $\int 3x^2(7+4x^3)^5\,dx = \frac{1}{24}(7+4x^3)^6 + C$

- ## Integración por partes

Se verifica que: $\int \mathbf{f(x)\,g'(x)dx} = \mathbf{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dt}$.

Normalmente la igualdad anterior se expresa así: $\int \mathbf{udv} = \mathbf{u \cdot v - \int v\,du}$.

Se debe escoger como **dv** una función cuya integral se inmediata y que resulte una integral $\int \mathbf{v\,du}$ más fácil, pudiendo repetir el proceso varias veces.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

Por partes:

1) $\int x\, e^x\, dx$ **; 2)** $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ **; 3)** $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ **; 4)** $\int e^{2t} \operatorname{sen} t dt$

Solución:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

1) $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$ **;** $\int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = = e^x(x\text{-}1) + C$

2) Realizamos la integración por partes dos veces manteniendo la estructura para llegar a una ecuación en I: $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$ **;** $\begin{cases} u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

I$= \int e^x\, \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)e^x - \int e^x\, \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x\, \operatorname{sen} x\, dx =$

$= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \mathbf{I} \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$

3) $\begin{cases} u = \ln^3 x \Rightarrow du = 3\ln^2 x \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$ **;** $\begin{cases} u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2\ln x \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$ **;** $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\, dx = \ln^3 x\left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x} 3\ln^2 x \frac{1}{x} dx = \ln^3 x\left(-\frac{1}{x}\right) + 3\int \ln^2 x \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^3 x + 3\left(-\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\int \ln x \frac{1}{x} dx\right) = -\frac{1}{x}\ln^3 x + 3\left(-\frac{1}{x}\ln^2 x\right) + 6\left(-\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2} dx\right) =$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{x} - 3\frac{\ln^2 x}{x} - 6\frac{\ln x}{x} - \frac{6}{x} + C$$

4) $\begin{cases} u = e^{2t} \Rightarrow du = 2e^{2t} dt \\ dv = \operatorname{sen} t dt \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} t dt = -\cos t \end{cases}$

$$I = \int \underbrace{e^{2t}}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} t dt}_{dv} = \int udv = uv - \int vdu = -e^{2t}\cos t - \int -\cos t 2e^{2t} dt = (1)$$

De nuevo por partes:

$$u = e^{2t} \Rightarrow du = 2e^{2t} dt$$

$$dv = \cos dt \Rightarrow v = \int \cos t dt = \operatorname{sen} t$$

$$(1) = -e^{2t}\cos t + 2\int \cos t e^{2t} dt = -e^{2t}\cos t + 2\int \underbrace{e^{2t}}_{u} \underbrace{\cos t dt}_{dv} = -e^{2t}\cos t + 2\int udv =$$

$$= -e^{2t}\cos t + 2\left(e^{2t}\text{sen}t - \int 2e^{2t}\text{sen}t\right) = -e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\text{sen}t - 4\int e^{2t}\text{sen}t dt =$$

$$= -e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\text{sen}t - 4\int e^{2t}\text{sen}t dt = -e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\text{sen}t - 4I = I$$

Resolviendo la ecuación:

$$I = \frac{-e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\text{sen}t}{5} = \frac{e^{2t}(2\text{sen}t - \cos t)}{5} + C$$

• Integración de funciones racionales

Queremos hallar la integral $\int \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}\mathbf{dx}$, siendo P(x) y Q(x) polinomios. Podemos suponer que el grado del polinomio P(x) es menor que el grado del polinomio Q(x); en caso contrario efectuamos el cociente $\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}} = \mathbf{C(x)} + \frac{\mathbf{R(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$ y, entonces $\int \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}\mathbf{dx} = \int \mathbf{C(x)dx} + \int \frac{\mathbf{R(x)}}{\mathbf{Q(x)}}\mathbf{dx}$, teniendo la seguridad de que el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x).

Descomposición en fracciones:

Según las raíces de Q(x)=0, distinguiremos varios casos:

1) Raíces reales simples: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$\mathbf{Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)}$ siendo las a_i distintas.

Entonces, $\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}} = \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{x - a_1}} + \frac{\mathbf{A_2}}{\mathbf{x - a_2}} + \ldots + \frac{\mathbf{A_n}}{\mathbf{x - a_n}}$, para ciertas constantes que tendremos que calcular, partiendo de la igualdad anterior. Una vez calculadas, resulta:

$$\int \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}\mathbf{dx} = \int \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{x - a_1}}\mathbf{dx} + \int \frac{\mathbf{A_2}}{\mathbf{x - a_2}}\mathbf{dx} + \ldots + \int \frac{\mathbf{A_n}}{\mathbf{x - a_n}}\mathbf{dx} = \mathbf{A_1 \ln|x - a_1| + A_2 \ln|x - a_2| + \ldots + A_n \ln|x - a_n| + C}$$

2) Raíces reales múltiples: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b, siendo b una raíz múltiple de orden m y el resto raíces simples; en cuyo caso el grado de Q(x) es n+m.

$$\mathbf{Q(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)(x - b)^m}$$

Entonces, $\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}} = \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{x - a_1}} + \frac{\mathbf{A_2}}{\mathbf{x - a_2}} + \ldots + \frac{\mathbf{A_n}}{\mathbf{x - a_n}} + \frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{x - b}} + \frac{\mathbf{B_2}}{\mathbf{(x - b)^2}} + \ldots + \frac{\mathbf{B_m}}{\mathbf{(x - b)^m}}$, para ciertas constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$. Así:

$$\int \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}\mathbf{dx} = \int \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{x - a_1}}\mathbf{dx} + \int \frac{\mathbf{A_2}}{\mathbf{x - a_2}}\mathbf{dx} + \ldots + \int \frac{\mathbf{A_n}}{\mathbf{x - a_n}}\mathbf{dx} + \int \frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{x - b}}\mathbf{dx} + \int \frac{\mathbf{B_2}}{\mathbf{(x - b)^2}}\mathbf{dx} + \ldots + \int \frac{\mathbf{B_m}}{\mathbf{(x - b)^m}}\mathbf{dx} =$$

$$= \mathbf{A_1 \ln|x - a_1| + A_2 \ln|x - a_2| + \ldots + A_n \ln|x - a_n| + B_1 \ln|x - b|} + \frac{\mathbf{B_2}}{\mathbf{-(x - b)}} + \ldots + \frac{\mathbf{B_m}}{\mathbf{(1 - m)(x - b)^{m-1}}} + \mathbf{C}$$

3) Raíces complejas simples: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ raíces simples, b raíz real de orden m y $\alpha \pm \beta i$ compleja simple y su conjugada; en cuyo caso el grado de Q(x) es n+m+2.

$\mathbf{Q(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)(x-b)^m\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}$. Se suele poner $\mathbf{(x-\alpha)^2+\beta^2 = x^2+rx+s}$ para el polinomio de segundo grado sin raíces reales.

Entonces, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m}+\frac{Mx+N}{x^2+rx+s}$, para ciertas constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$, M y N. Así:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+\ldots+\int\frac{A_n}{x-a_n}dx+\int\frac{B_1}{x-b}dx+\int\frac{B_2}{(x-b)^2}dx+\ldots+\int\frac{B_m}{(x-b)^m}+$$
$$+\int\frac{Mx+N}{x^2+rx+s}dx$$

La única integral nueva es: $\int\frac{Mx+N}{x^2+rx+s}dx = \int\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$

Realizamos el cambio $\mathbf{x-\alpha = t \Rightarrow dx = dt}$

$$\int\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int\frac{M(\alpha+t)+N}{t^2+\beta^2}dt = \int\frac{Mt}{t^2+\beta^2}dt+\int\frac{M\alpha+N}{t^2+\beta^2}dt =$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{2t}{t^2+\beta^2}dt+(M\alpha+N)\int\frac{dt/\beta^2}{(t/\beta)^2+1} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+\beta^2\right)+(M\alpha+N)\int\frac{dt/\beta^2}{(t/\beta)^2+1} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]+\frac{M\alpha+N}{\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C$$

4) Raíces complejas simples: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ raíces simples, b raíz real de orden m y $\alpha \pm \beta i$ compleja de orden de multiplicidad r; en cuyo caso el grado de Q(x) es n+m+r.
Entonces, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m}+$
$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+rx+s)^r}$, para ciertas constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B_1, $B_2, \ldots, B_m$, $M_1, M_2, \ldots, M_r$, $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Así:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+\ldots+\int\frac{A_n}{x-a_n}dx+\int\frac{B_1}{x-b}dx+\int\frac{B_2}{(x-b)^2}dx+\ldots+\int\frac{B_m}{(x-b)^m}+$$
$$+\int\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s}dx+\int\frac{M_2x+N_2}{(x^2+rx+s)^2}dx+\ldots+\int\frac{M_rx+N_r}{(x^2+rx+s)^r}dx$$

La única integral nueva es: $I_r = \int\frac{Mx+N}{(x^2+rx+s)^r}dx$ con r>1.

Un método de resolución puede ser descomponiendo la integral I_r en alguna inmediata más I_{r-1}, así sucesivamente hasta llegar a la integral resuelta en el caso anterior.

Realizamos el cambio $x-\alpha=t\Rightarrow dx=dt$

$$I_r=\int\frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^r}dx=\int\frac{M(\alpha+t)+N}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt=\frac{M}{2}\int\frac{2t}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt+(M\alpha+N)\int\frac{1}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt$$

La primera integral es:

$$\frac{M}{2}\int\frac{2t}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt=\frac{M}{2}\int 2t\left(t^2+\beta^2\right)^{-r}dt=\frac{M}{2}\frac{1}{1-r}\left(t^2+\beta^2\right)^{1-r}+C_1=\frac{M}{2}\frac{1}{1-r}\frac{1}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^{r-1}}+C_1$$

Veamos la segunda integral

$$\int\frac{1}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{t^2+\beta^2-t^2}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{t^2+\beta^2}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt+\frac{1}{\beta^2}\int\frac{-t^2}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}dt=$$

$$=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\beta^2\right)^{r-1}}-\frac{1}{\beta^2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}$$

Para resolver $\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}$ empleamos el método de integración por partes, haciendo

$u=t;dv=\frac{tdt}{\left(t^2+\beta^2\right)^r}$. Así conseguimos pasar de I_r a I_{r-1}. Por lo laborioso del procedimiento buscamos otro procedimiento el **Método de Hermite**.

- **Método de Hermite**

Este método se usa cuando Q(x) tiene raíces múltiples, especialmente si son complejas.

Sean $D(x)=m.c.d.\left(Q(x),Q'(x)\right)$ y $\frac{Q(x)}{D(x)}=C(x)$, entonces,

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{A(x)}{D(x)}+\int\frac{B(x)}{C(x)}dx$$

siendo A(x) un polinomio de coeficientes indeterminados de grado menor que D(x), y B(x) de grado menor que C(x).

Si derivamos los dos miembros de la igualdad anterior e identificamos coeficientes, determinaremos los polinomios A(x) y B(x), quedando una integral más sencilla.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

Racionales:

1) $\int \frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}dx$; **2)** $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx$; **3)** $\int \frac{3x^3-2x^2+x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$; **4)** $\int \frac{6}{\left(x^2+3\right)^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx + \int \frac{C}{(x-x_3)}dx$$

1) $\int \frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int \frac{1}{(x-1)}dx + \int \frac{2}{(x-2)}dx + \int \frac{3}{(x-3)}dx =$

$=3\ln|x-3|+2\ln|x-2|+\ln|x-1|+C$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2M(x-a)}{(x-a)^2+b^2}dx + \int \frac{Ma+N}{(x-a)^2+b^2}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|(x-a)^2+b^2\right| + \frac{Ma+N}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right)+C$$

2) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{2x-6+6-1}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx + \int \frac{5}{x^2-6x+13}dx ==$

$=\ln|x^2\text{-}6x+13| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_1)^2}dx + \int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

3) $\int \frac{3x^3-2x^2+x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx =$

$$= 2\int \frac{1}{(x-1)}dx - \int \frac{-1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{(x-1)}dx - \int \frac{-1}{(x-1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg}x + C$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A(x)}{D(x)} + \int \frac{B(x)}{C(x)}dx$$

4) $\int \frac{6}{\left(x^2+3\right)^2}dx$

Método de Hermite:

Sean $D(x)=\text{m.c.d.}\left(Q(x),Q'(x)\right)=\text{m.c.d.}\left[\left(x^2+3\right)^2,4x\left(x^2+3\right)\right]=\left(x^2+3\right)$ y

$\frac{Q(x)}{D(x)}=\frac{\left(x^2+3\right)^2}{\left(x^2+3\right)}=\left(x^2+3\right)=C(x)$, entonces, $\int\frac{6}{\left(x^2+3\right)^2}dx=\frac{ax+b}{\left(x^2+3\right)}+\int\frac{cx+d}{\left(x^2+3\right)}dx$

Derivando,

$$\frac{6}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{a\left(x^2+3\right)-\left(ax+b\right)2x}{\left(x^2+3\right)^2}+\frac{cx+d}{\left(x^2+3\right)}=\frac{a\left(x^2+3\right)-\left(ax+b\right)2x+\left(cx+d\right)\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$6=a\left(x^2+3\right)-\left(ax+b\right)2x+\left(cx+d\right)\left(x^2+3\right)=cx^3+\left(d-a\right)x^2+\left(-2b+3c\right)x+3a+3d\Rightarrow$$
$$a=d=1;b=c=0;$$

Nos queda,

$$\int\frac{6}{\left(x^2+3\right)^2}dx=\frac{x}{\left(x^2+3\right)}+\int\frac{1}{\left(x^2+3\right)}dx=\frac{x}{\left(x^2+3\right)}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

• Integración de funciones trigonométricas

En las integrales de la forma $\int\mathbf{R(senx,\cos x)dx}$ donde R(senx,cosx) es una función racional en senx y cosx, se puede pasar a una integral de función racional. Para ciertos casos sencillos tenemos diversas opciones:

1) Si observamos que es impar en coseno, utilizamos el cambio senx=t.

$$\int\mathbf{R(senx)\cos xdx=\int R(t)dt}$$

2) Si observamos que es impar en seno, utilizamos el cambio cosx=t.

$$\int\mathbf{R(\cos x)senxdx=\int R(t)dt}$$

3) Si observamos que es par en seno y en coseno, utilizamos el cambio tgx=t.

$$\int\mathbf{R(sen^{2n}x,\cos^{2m}x,tgx)dx=\int R(t)dt}$$

Con el cambio $\mathbf{tgx=t\Rightarrow(1+tg^2x)dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+tg^2x}=\frac{dt}{1+t^2}}$.

Para las expresiones de sen^2x y cos^2x en función de tgx tenemos:

$$\mathbf{sen^2x=\frac{sen^2x}{sen^2x+\cos^2x}=\frac{tg^2x}{tg^2x+1}=\frac{t^2}{t^2+1}}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}$$

4) En general, siempre se puede realizar el cambio tg(x/2)=t (universal).

Con el cambio $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{dx}{2} = dt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Para las expresiones de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en función de tg(x/2) tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

5) Para las expresiones:

$$\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx$$

$$\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx$$

$$\int \cos(mx)\cos(nx)dx$$

Se calculan utilizando las siguientes fórmulas, siendo m≠n:

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$$

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right)$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)$$

6) Para las expresiones:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx\ ;\ \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx\ ;\ \int \cos^2 x\, dx$$

Se calculan utilizando las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$$

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

Trigonométricas:

1) $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{1+\cos x+\text{sen } x}dx$ **; 2)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\text{sen}^2 x}dx$ **; 3)** $\displaystyle\int \frac{\text{tg } x}{1+\cos x}dx$ **; 4)** $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\text{sen}^2 x}dx$ **; 5)** $\displaystyle\int \text{tg}^3 x\, dx$ **;**

6) $\displaystyle\int \text{sen}(5x)\cos(6x)\, dx$

Solución: **Cambio de variable general tg(x/2)=t**

1) $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=t \Rightarrow dt=(1+t^2)\frac{dx}{2}$

$$\text{sen}x = 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int\frac{\text{sen } x}{1+\cos x+\text{sen } x}dx=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\;\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(1+t\right)}dt=$$

$$=2\left(\int\frac{-\frac{1}{2}}{(1+t)}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t+1}{\left(1+t^2\right)}dt\right)=-\ln|1+t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|+\text{arctg}t+C=$$

$$=-\ln\left|1+\text{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right|+\frac{x}{2}+C$$

Cambio de variable para impar en coseno: senx=t

2) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\text{sen}^2x}dx=\int\frac{1}{1+t^2}\;dt=\text{arctg}t+C==\text{arctg}(\text{sen}x)+C$

Cambio de variable para impar en seno: cosx=t

$$3)\ \int \frac{\text{tg } x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{t(1+t)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{(1+t)} = \ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| + C$$

Cambio de variable para par en seno y en coseno: tg(x)=t

$$\text{tg}x = t \Rightarrow dt = (1+t^2)dx$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$4)\ \int \frac{\cos^2 x}{1+\text{sen}^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t^2)} \overset{(*)}{=} \int \frac{-dt}{(1+t^2)} + \int \frac{2dt}{(1+2t^2)} =$$

$$= -\text{artgt} + \sqrt{2}\ \text{arctg}(\sqrt{2}\ t) + C = -x + \sqrt{2}\ \text{arctg}(\sqrt{2}\ \text{tg}x) + C\,.$$

(*) *Obsérvese la descomposición*

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+2t^2)} = \frac{At+B}{(1+t^2)} + \frac{Ct+d}{(1+2t^2)}D \Rightarrow 1 = (2A+C)t^3 + (2B+D)t^2(A+C)t + B + D$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A+C=0 \\ 2B+D=0 \\ A+C=0 \\ B+D=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=2 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)(1+2t^2)} = \frac{-1}{(1+t^2)} + \frac{2}{(1+2t^2)}$$

Cambio de variable para función racional de la tgx: tg(x)=t

$$\text{tg}x = t \Rightarrow dt = (1+t^2)dx \Rightarrow dx = dt/(1+t^2)$$

$$5)\ \int \text{tg}^3 x\,dx = \int t^3 \frac{dt}{1+t^2} = \int\left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\text{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+\text{tg}^2 x| + C = \frac{\text{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$$\text{sen}A\cos B = \frac{1}{2}\big(\text{sen}(A-B) + \text{sen}(A+B)\big)$$

$$6)\ \int \text{sen}\ (5x)\cos(6x)\,dx = \frac{1}{2}\int\big(\text{sen}(-x) + \text{sen}(11x)\big)dx == -\frac{1}{22}\cos(11x) + \frac{1}{2}\cos x + C$$

- **Integración de funciones irracionales**

Se transforma la integral irracional en otra racional inmediata.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{k\left(1-\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2\right)}} = \int \frac{dx/\sqrt{k}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{dx/\sqrt{k}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2+1}} = \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k}} = \int \frac{dx/\sqrt{k}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2-1}} = \operatorname{arg\,ch}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)+C$$

Si la expresión es $\sqrt{ax^2+bx+c}$, se puede escribir: $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

Irracionales:

1) $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ **; 2)** $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$ **; 3)** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$

Solución:

1) $$\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx = \int \sqrt{\underbrace{(x-1)^2}_{sht}+1}\,dx = \int \sqrt{sh^2t+1}\,sht\,dt = \int ch^2t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+ch(2t))\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{sh(2t)}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\left(t+\frac{2sht\,cht}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arg\,sh}(x-1)+(x-1)\sqrt{(x-1)^2+1}\right]+C$$

2) $$\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{\sqrt{1-\left(\underbrace{x-\frac{1}{2}}_{sent}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{sent+1/2+3}{\sqrt{1-sen^2t}}\,cost\,dt = \frac{1}{2}\int\left(sent+\frac{7}{2}\right)dt =$$

$$=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\frac{7}{2}t+C=-\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{7}{4}t+C=-\frac{\sqrt{-4x^2+4x+3}}{4}+\frac{7}{4}\operatorname{arcsen}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$$

3) $$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{\underbrace{(e^x)}_{cht}{}^2-1}}\,dx = \int \frac{ch^3t}{\sqrt{ch^2t-1}}\,\frac{sht}{cht}\,dt = \int ch^2t\,dt = \frac{1}{2}\int(1+ch(2t))\,dt = =$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{sh(2t)}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\left(t+\frac{2sht\,cht}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\operatorname{arg\,ch}(e^x)+\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^{2x}-1}+C$$