



## Aplicaciones de la Integral Definida

### ÁREA ENCERRADA POR LA CURVA

**Área de una región plana:** Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones integrables y se cortan en los puntos de abscisas  $a$  y  $b$ , entonces el área de la región plana limitada por las curvas

$$y=f(x), y=g(x) \text{ es: } A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**Area encerrada por una curva definida en paramétricas y el eje OX:** Sea la curva

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ donde } x \text{ es una función derivable. Si entre los puntos de abscisas } a=x(t_0) \text{ y}$$

$b=x(t_1)$  define una función  $y=f(x)$  integrable. Entonces, el área encerrada por la curva y el

$$\text{eje OX es: } A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{t_0}^{t_1} |y(t) \cdot x'(t)| dt$$

**Área encerrada por una curva en forma polar:** Sea la curva expresada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$ . El área encerrada por la curva entre los argumentos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  con  $\theta_0 < \theta_1$

$$\text{es: } A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} f^2(\theta) d\theta$$



## Aplicaciones de la Integral Definida

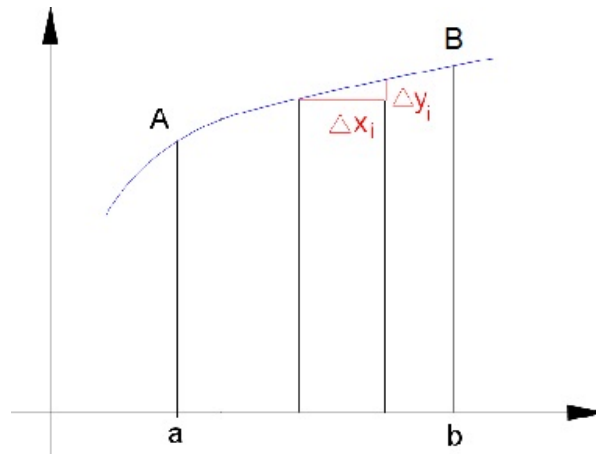
### LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

**Forma explícita:** Sea la curva  $y=f(x)$  siendo  $f$  derivable y con derivada continua en  $[a, b]$ ,

la longitud del arco  $((a, f(a)), (b, f(b)))$  de dicha curva es: 
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Forma paramétrica:** Sea la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  donde las funciones  $x$  e  $y$  tienen derivada continua en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . La longitud de dicha curva entre los valores del parámetro

$t_0$  y  $t_1$  es: 
$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$



**Forma polar:** Sea la curva expresada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$  derivable en  $[\theta_0, \theta_1]$ , la longitud del arco de la curva entre los argumentos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  con  $\theta_0 < \theta_1$  es:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

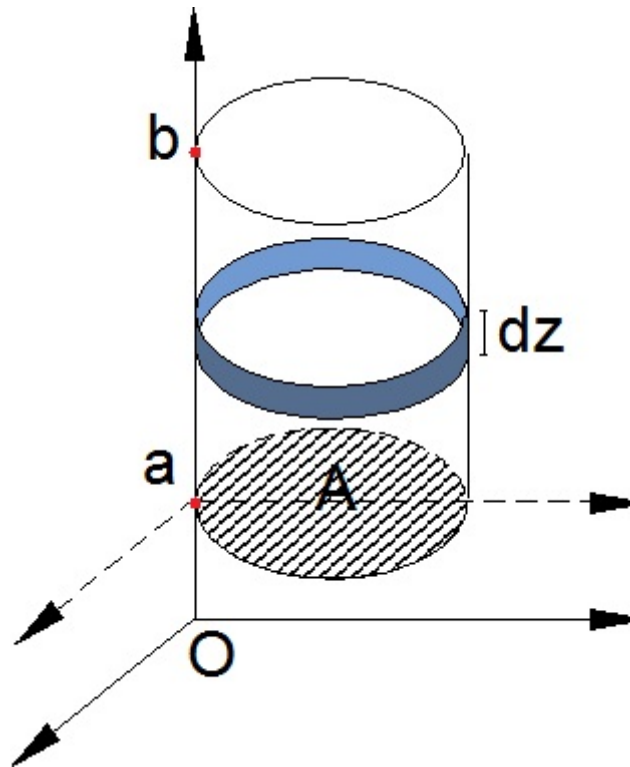


## Aplicaciones de la Integral Definida

### VOLUMEN DE UN SÓLIDO

Si al cortar un cuerpo con un plano perpendicular al eje OZ da lugar, en cada punto  $z$ , a una sección de área  $A(z)$ , el volumen de dicho cuerpo entre los planos perpendiculares al

eje OZ en los puntos  $a$  y  $b$  es:  $V = \int_a^b A(z) dz$

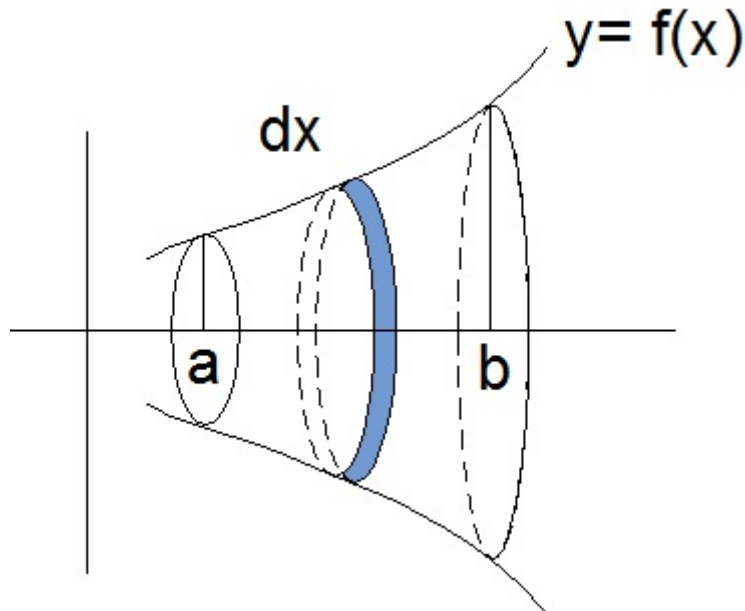


## Aplicaciones de la Integral Definida

### VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

Con las consideraciones que se han hecho en los apartados anteriores:

**Forma explícita:**  $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$



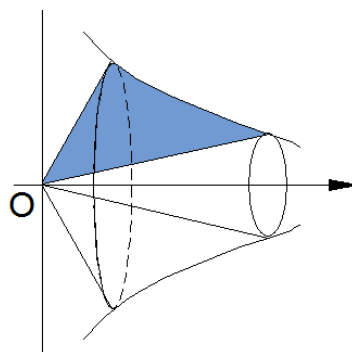
**Forma paramétrica:** Sea la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  donde las funciones  $x$  e  $y$  tienen derivada

continua en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . El volumen de revolución engendrado al girar, alrededor del eje  $OX$ , el arco de dicha curva entre los valores del parámetro  $t_0$  y  $t_1$  es:

$$V = \pi \int_{t_0}^{t_1} (y(t))^2 x'(t) dt$$

**Forma polar:** Si la curva esta expresada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$ , y gira alrededor de su eje polar el volumen de revolución del arco de curva entre los argumentos  $\theta_0$  y  $\theta_1$ ,

con  $\theta_0 < \theta_1$  es:  $V = \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} (f(\theta))^3 \text{sen}(\theta) d\theta.$





## Aplicaciones de la Integral Definida

### ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

**Forma explícita:** Sea la curva  $y=f(x)$  siendo  $f(x)>0$  para todo  $x\in[a, b]$  y  $f'$  continua en  $[a, b]$ , el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva  $y=f(x)$  alrededor del

eje OX entre los valores de abscisa  $a$  y  $b$  es: 
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Forma paramétrica:** Sea la curva  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  donde las funciones  $x$  e  $y$  tienen derivada

continua en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . El área de la superficie de revolución engendrada al girar, alrededor del eje OX, el arco de dicha curva entre los valores del parámetro  $t_0$  y  $t_1$  es:

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Forma polar:** Si la curva esta expresada en coordenadas polares  $r = f(\theta)$ , y gira alrededor de su eje polar la superficie de revolución del arco de la curva entre los

argumentos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  con  $\theta_0 < \theta_1$  es: 
$$S = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

