Introducción

Las ecuaciones rectangulares de la elipse y la hipérbola se simplifican mucho cuando el origen de coordenadas es su centro.
En la práctica, hay muchas aplicaciones importantes de las cónicas en las que es más conveniente usar uno de los focos como origen del sistema de referencia. Por ejemplo, el sol está situado en uno de los focos de la órbita de la tierra. De forma similar, la fuente de luz de un reflector parabólico está en su foco.
Vamos a ver que las ecuaciones polares de las cónicas toman formas simples si uno de los focos está en el polo.

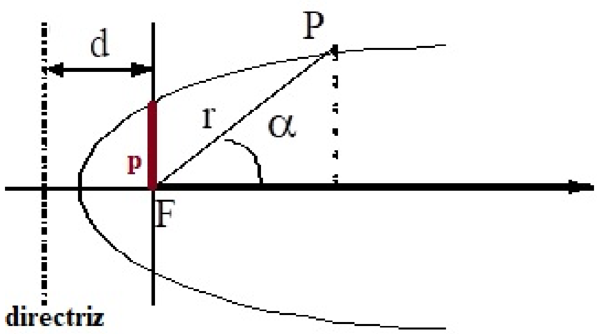
Definición

Cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a un punto fijo F (llamado **foco**) y a una recta fija (llamada **directriz**) es una cantidad constante e (llamada ***excentricidad***). Además, la cónica es una ***elipse*** si $0 \le e < 1$, una ***parábola*** si $e = 1$ y una ***hipérbola*** si $e > 1$.

Ecuación polar de una cónica (elipse, una rama de hipérbola o parábola)

1) Si el polo se sitúa en el foco, el eje polar es perpendicular y va en dirección opuesta a la directriz (cuya distancia al foco es d), y la cónica está en el mismo semiplano que el foco respecto de la directriz, entonces la ecuación de la cónica en coordenadas polares es $\boxed{r = \dfrac{p}{1 - e\cos\alpha}}$, donde p es el parámetro focal, p = d e (longitud de la semicuerda focal) se obtiene para $\alpha=\pi/2$.

Demostración



$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,dir)} = \frac{r}{d + r\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$r = e \cdot d + e \cdot r \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

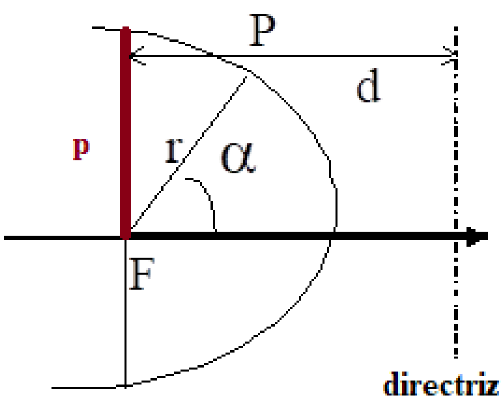
$$r(1 - e\cos\alpha) = e \cdot d \Rightarrow$$

$$r = \frac{e \cdot d}{1 - e\cos\alpha} = \frac{p}{1 - e\cos\alpha},$$

siendo d la distancia del foco a la directriz.

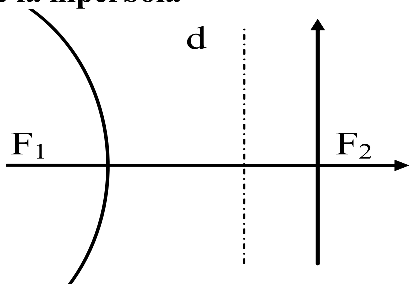
2) Si el polo sigue en el foco, pero, el eje polar va hacia la directriz, y la cónica y el foco están en el mismo semiplano respecto de la directriz, la ecuación es:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}$$

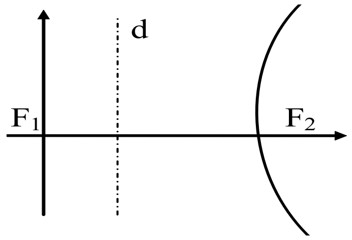


Un caso particular lo constituye una rama de la hipérbola

3) Si, con el mismo sistema polar de coordenadas que en el caso 1), la cónica y el foco están en distinto semiplano respecto de la directriz, la ecuación es: $r = \dfrac{-p}{1 + e \cos\alpha}$.
(corresponde a una rama de la **hipérbola**)



4) Si, con el mismo sistema polar de coordenadas que en el caso 2, la cónica y el foco están en distinto semiplano respecto de la directriz, la ecuación es $r = \dfrac{-p}{1 - e \cos\alpha}$. (corresponde a una rama de la **hipérbola**)

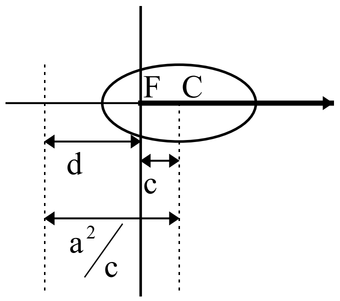


Paso de cartesianas a polares

Dadas las ecuaciones canónicas $y^2 = 2\,p`\,x$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, de una parábola, una elipse y una hipérbola, respectivamente, en coordenadas cartesianas, ¿quiénes son p y d en cada una de ellas?

En la parábola: $p = p`$.
En efecto, p = d e = d = p`, ya que e = 1 y d es la distancia del foco a la directriz lo mismo que p`.

En la elipse: $p = \dfrac{b^2}{a}$ y $d = \dfrac{b^2}{c}$.



En efecto, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, nos quedamos con la solución positiva y buscamos la ordenada para x=c:

Así, $p = b\sqrt{1 - \dfrac{c^2}{a^2}} = b\dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \dfrac{b^2}{a}$.

Por otra parte, $d = d(F, \text{directriz}) = \dfrac{p}{e} = \dfrac{b^2/a}{c/a} = \dfrac{b^2}{c}$.

Entonces $d(C, \text{directriz}) = d + c = \dfrac{b^2}{c} + c = \dfrac{a^2}{c}$

En la hipérbola: $p = \dfrac{b^2}{a}$ y $d = \dfrac{b^2}{c}$.

En efecto, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, nos quedamos con la solución positiva y buscamos la ordenada para x=c:

Así, $p=\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\boxed{\frac{b^2}{a}}$.

Por otra parte, $d=\frac{p}{e}=\frac{b^2/a}{c/a}=\boxed{\frac{b^2}{c}}$.

Paso de polares a cartesianas

Nos planteamos ahora el problema recíproco: conocido p ¿quiénes son p`, a, b?

En la parábola: p`= p.

En la elipse: $a=\frac{p}{1-e^2}$, $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

En efecto, $p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=a\frac{a^2-c^2}{a^2}=a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=a\ (1\text{-}e^2)\ \Rightarrow\ \boxed{a=\frac{p}{1-e^2}}$.

Del mismo modo $p=\frac{b^2}{a}\Rightarrow p^2=\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2\ b^2}{a^2}=\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2}=b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=b^2\ (1\text{-}e^2)$,

luego, $b^2=\frac{p^2}{1\text{-}e^2}$, y, por tanto, $\boxed{b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}$.

En la hipérbola: $a=\frac{p}{e^2-1}$, $b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$.

En efecto, $p=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}=a\frac{c^2-a^2}{a^2}=a\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=a\ (e^2-1)\ \Rightarrow\ \boxed{a=\frac{p}{e^2-1}}$.

Del mismo modo $p=\frac{b^2}{a}\Rightarrow p^2=\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2\ b^2}{a^2}=\frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2}=b^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=b^2\ (e^2-1)$,

luego, $b^2=\frac{p^2}{e^2-1}$, y, por tanto, $\boxed{b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}}$.

Nota:

El punto más lejano y más cercano con respecto al foco se obtienen para los valores de $\alpha=0$ y $\alpha=\pi$, respectivamente, para el caso de $r=\frac{p}{1-e\cos\alpha}$.

Así:

$$r(0)=\frac{p}{1-e\cos 0}=\frac{p}{1-e}=a+c$$

$$r(\pi)=\frac{p}{1-e\cos\pi}=\frac{p}{1+e}=a-c$$