REPRESENTACIÓN DE CURVAS PLANAS DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

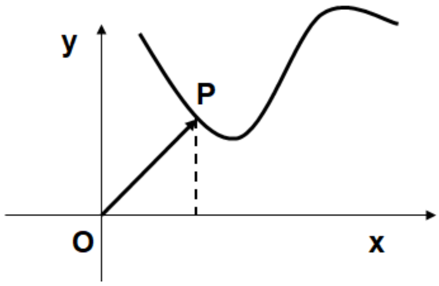
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean **x** e **y** dos funciones reales de variable real t, de dominios respectivos D_x y D_y.

Consideremos la **curva dada en forma paramétrica** por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

A "t" se le denomina **parámetro** de dicha curva.



cuya gráfica es el conjunto de puntos de la forma $(x(t), y(t))$ con t variando en $D_t = D_x \cap D_y$.

Intuitivamente, una curva en el plano puede considerarse como la trayectoria de un móvil reducido a un punto, circulando por una carretera totalmente plana. Si "t" representara el tiempo, entonces (x,y) = $(x(t), y(t))$ serían las coordenadas cartesianas del punto donde se encuentra el móvil en el instante "t".

Campo de existencia de t:

Son los valores de t para los cuales existen x(t) e y(t). Se obtienen por intersección de los respectivos dominios de x(t) e y(t).

El estudio de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas puede hacerse directamente sin reducirla al caso de una función explícita.

Para ello habría que definir la función vectorial de una variable real en la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} : D \subset \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longrightarrow \vec{F(t)} = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

y su derivada n-ésima:

$$\vec{F}^{n)}(t) = (x^{n)}(t), y^{n)}(t))$$

Este tipo de funciones se llaman ***funciones vectoriales o campos vectoriales de R en R²***.

Simetrías:

Estudio de algunos tipos de simetría en particular, cuando cambiamos t por -t:

a) Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto del origen**.

b) Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto del eje OX**.

c) Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto del eje OY**.

d) Si $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto de la bisectriz del primer cuadrante**.

Periodicidad:

Si x e y son funciones periódicas de períodos p_1 y p_2 respectivamente, la función vectorial $\vec{F}(t) = (x(t), y(t))$ es también periódica de período p = mínimo común múltiplo de p_1 y p_2, y sólo hará falta hacer variar t en un intervalo de amplitud p (es decir, $t \in [a,\ a+p]$).

La gráfica será en este caso cerrada, siempre que x e y sean funciones continuas.

La elección de a dependerá de consideraciones de simetría aplicables a la curva.

Asíntotas:

En este párrafo, t_0 puede ser un número real o $\pm\infty$.

a) Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, entonces:

la recta **x = a** es **asíntota vertical**.

b) Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b$, entonces:

la recta **y = b** es **asíntota horizontal**.

c) Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$

c₁) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$, la curva carece de asíntota y se dice que tiene una **rama parabólica**.

c₂) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m$

c₂₁) $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - mx(t)) = \pm\infty$, entonces no hay asíntota; tiene una **rama parabólica**.

c22) $\lim_{t\to t_0}(y(t)-mx(t))=b$, entonces la recta **y = mx + b** es **asíntota oblicua**.

Intersección de la curva con las asíntotas:

Los puntos de intersección de la curva con una de sus asíntotas se obtienen resolviendo el sistema formado por la ecuación de la curva y la ecuación de la asíntota.

Intersección de la curva con los ejes de coordenadas:

Estos puntos se obtienen haciendo x = 0 e y = 0, para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas y de abscisas respectivamente.

CONDICIONES PREVIAS

Si la función $x=x(t)$ posee inversa, $t=x^{-1}(x)$, entonces es $y=(y\circ x^{-1})(x)$, es decir, tendríamos la curva dada en forma explícita y ya conocemos cómo representarla. Conviene por tanto estudiar la curva "por trozos", en cada uno de los intervalos de variación de t donde la x pueda ser despejada.

Puntos críticos:

Valores del parámetro t que anulan al menos una de las derivadas $x'(t)$, $y'(t)$, o bien alguna de ellas no está definida en t.

Nota: los puntos excluidos del dominio se consideran puntos críticos.

Ramas de la curva:

Supongamos que D = [a, b] y que $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ son los puntos críticos.

Estudiaremos la curva en cada intervalo (t_{i-1},t_i), ya que si en el intervalo (t_{i-1},t_i) la función $x'(t)$ es continua, entonces, al ser además $x'(t)\neq 0$ para todo t de este intervalo, $x'(t)$ mantiene el signo y por tanto, x es estrictamente monótona en dicho intervalo y admite inversa derivable, así, las ecuaciones paramétricas $x=x(t)$ e $y=y(t)$ definen la función derivable $y=(y\circ x^{-1})(x)$ tal y como deseábamos.

Denotamos esta función por $\boxed{y=f_i(x)}$, y a su gráfica γ_i la denominaremos **rama i-ésima de la curva.**

Además, si x' e y' son continuas, el signo de $x'(t)$ e $y'(t)$ es constante en el intervalo (t_{i-1},t_i) y nos indicará el crecimiento de x e y en función de t.

Por otra parte, se verifica que $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, ya que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}\ (\text{Si } x'(t)\neq 0)$$

y, si $x'(t)$ e $y'(t)$ son derivables de nuevo, se tiene que $y''(x)=\dfrac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$

(no hay más que aplicar la regla de la cadena para la derivación de la función compuesta y la regla de derivación de la función inversa).
Conociendo de esta forma $y'(x)$ e $y''(x)$, podemos efectuar el estudio de la curva con los métodos empleados para curvas dadas en forma explícita.

Supongamos a partir de aquí que x' y y' cumplen las condiciones requeridas anteriores.

Observación: Las funciones $y = f_i(x)$ e $y = f_j(x)$ obtenidas al variar t en los intervalos (t_{i-1}, t_i) y (t_{j-1}, t_j) respectivamente, pueden tener un dominio común respecto de x, es decir, una vez dibujada la curva completa, puede ocurrir que a un mismo valor de x le correspondan varios valores de y (las diferentes imágenes de x en cada una de las ramas γ_i).

REPRESENTACIÓN DE CADA RAMA γ_i, CON $t \in (t_{i-1}, t_i)$

Lo haremos siguiendo el siguiente cuadro:

dominio de variación de t	valores correspondientes de x	valores correspondientes de y	Signo de $y'(x)$	signo de $y''(x)$
$t_{i-1} < t < t_i$	signo de x' crecimiento de x respecto de t	signo de y' crecimiento de y respecto de t	Crecimiento de y respecto de x	concavidad, convexidad de y respecto de x

Puntos de tangencia:

Si la curva tiene tangente en el punto $\left(x(t_0), y(t_0)\right)$, ésta viene dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) &= y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{aligned}\right\}$$

La **ecuación de la tangente** en forma explícita si $x'(t_0) \neq 0$ es:

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0))$$

En particular, si para $t = t_0$ es $x'(t_0) = 0$ e $y'(t_0) \neq 0$, la **tangente** en el punto correspondiente a t_0 será **vertical** (pues anulará el denominador de $y'(x)$).

Si $y'(t_0) = 0$ y $x'(t_0) \neq 0$, la recta **tangente** será **horizontal.**

Cuando son nulas ambas derivadas decimos que se trata de un punto singular que a su vez puede ser un punto de tangencia (vertical u horizontal).

ESTUDIO DE PUNTOS SINGULARES

Un ***punto singular*** es aquel en el cual $\overrightarrow{F'(t)} = \vec{0}$, es decir:

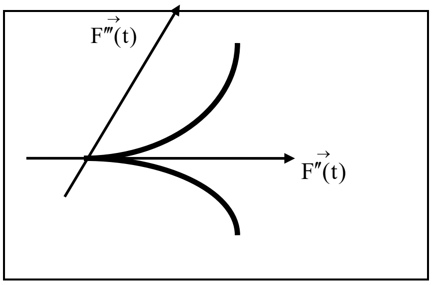
$$x'(t) = y'(t) = 0 .$$

Y en ellos puede haber tangencia horizontal, vertical o ninguna de ellas.
Cualquier punto singular es pues un punto crítico. El recíproco no es cierto.
Puede desarrollarse una **fórmula de Taylor** para este tipo de funciones (vectoriales de una variable real) análoga al caso de una función real de una variable real, y haciendo razonamientos similares a aquel caso obtener la siguiente:

Clasificación de los puntos singulares

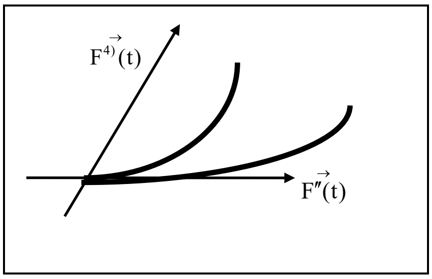
$\overrightarrow{F''(t)}$ proporciona la dirección de la recta tangente a la curva en los puntos correspondientes al valor t=t0 tal que $\overrightarrow{F'(t_0)} = \vec{0} = (0,0)$

1) Punto de retroceso de primera especie, cuando $\overrightarrow{F''(t)}$, $\overrightarrow{F'''(t)}$ no son proporcionales. En el punto, el arco atraviesa a su tangente.



2) Punto de retroceso de segunda especie, cuando $\overrightarrow{F''(t)}$, $\overrightarrow{F'''(t)}$ son proporcionales, pero no lo son $\overrightarrow{F''(t)}$ y $\overrightarrow{F^{IV}(t)}$

En un entorno del punto, la curva se encuentra en el ángulo definido por los dos vectores que forman la base.



Puntos múltiples:

Un **punto doble** o **punto de cruce** es aquel que se obtiene para dos valores distintos t_1 y t_2 del parámetro.

Se obtienen resolviendo el sistema: $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$

Es decir, un punto doble pertenece a dos ramas distintas de la curva.
Análogamente se definiría un **punto de multiplicidad n.**

EJEMPLOS

1) Representar la curva dada por $\begin{cases} x = x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$, siendo a > 0.

SOLUCIÓN

Dominio de t: R.

Campo de variación $\left| \begin{array}{l} \text{de x:R} \\ \text{de y:-}1 \le \cos t \le 1 \Rightarrow 2a \ge y \ge 0 \end{array} \right.$

Simetrías: $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, luego la curva es simétrica respecto del eje OY.

Periodicidad: $\begin{cases} x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi a \\ y(t + 2\pi) = y(t) \end{cases}$, luego solamente la y es una función periódica de t, de período 2π. Por consiguiente, la curva no es periódica.

Teniendo en cuenta la simetría, basta estudiar la curva para valores de $t \ge 0$.

Asíntotas: $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = \pm\infty; \lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \nexists$, luego no hay asíntotas.

Puntos críticos: $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) = 0 \Rightarrow t = 0 + 2\pi z \\ y'(t) = a \operatorname{sen} t = 0 \Rightarrow t = 0 + \pi z \end{cases}$ con $z \in Z$; los puntos críticos son periódicos tanto para x'(t) como para y'(t). Bastará tomar entonces como tales el conjunto $t_0 = \{0, \pi, 2\pi\}$, luego, $[0, \pi]$ y $[\pi, 2\pi]$ son las dos ramas que consideramos.

Estudio de derivadas:

Puntos de tangencia vertical: $\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = 2\pi \\ y'(t) \ne 0 \Rightarrow t \ne 0,\ t \ne \pi \end{cases} \Rightarrow$ No hay (por ahora).

Puntos de tangencia horizontal: $\begin{cases} x'(t) \ne 0 \Rightarrow t \ne 0,\ t \ne \pi \\ y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pi \end{cases} \Rightarrow t = \pi \Rightarrow P_1 = (\pi a, 2a)$.

Puntos singulares: $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow O = (0,0)$

$$\begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = a \end{cases}, \quad \begin{cases} x'''(t) = a\cos t \Rightarrow x'''(0) = a \\ y'''(t) = -a\ \mathrm{sen}\ t \Rightarrow y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Así, $\left\{\vec{F''}(0), \vec{F'''}(0)\right\} = \{(0,a),(a,0)\}$ son dos vectores no proporcionales y por tanto, **el origen es un punto de retroceso de primera especie.**

Tangente en el punto de retroceso: Recta que pasa por el punto O=(0,0) y es paralela al vector $\vec{F''}(0) = (0,a)$. **Se trata por tanto del eje OY.**

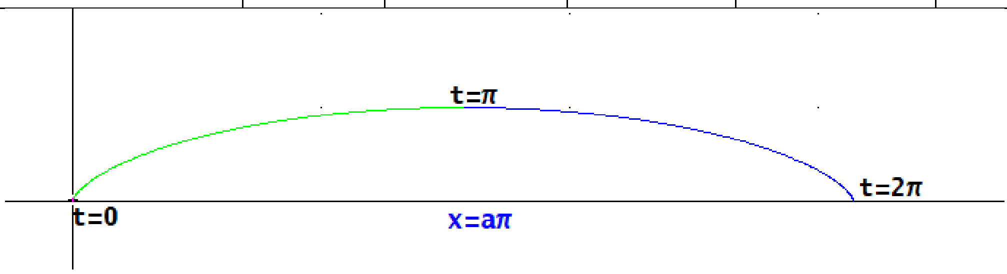
Ramas de la curva:

Para t = 0, se obtiene el punto (0, 0); para t = π, se obtiene el punto (aπ, 2a); para t = 2π, se obtiene el punto (2πa,0).

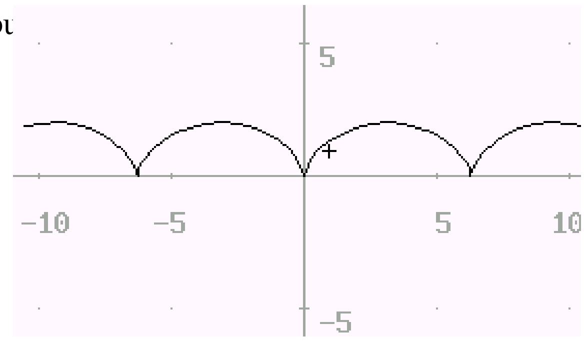
$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\mathrm{sen}\ t}{1\text{-}\cos t}$$

$$\begin{cases} x''(t) = a\ \mathrm{sen}\ t \\ y''(t) = a\cos t \end{cases} \Rightarrow y''(x) = \frac{xi(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

	0	$0 < t < \pi$	π	$\pi < t < 2\pi$	2π
$x(t) = a(t - \mathrm{sen}\,t)$	0	$0 < x < a\pi$	$a\pi$	$a\pi < x < 2\pi a$	$2\pi a$
$y(t) = a(1-\cos t)$	0	$0 < y < 2a$	$2a$	$2a > y > 0$	0
$x'(t) = a(1-\cos t)$	0	+	2a	+	0
y '(t)=a sent	0	+	0	-	0
$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\mathrm{sen}\ t}{1\text{-}\cos t}$	$\nexists$ Punto singular	+ creciente	0 Máximo Tangencia horizontal	- decreciente	$\nexists$ Punto singular



Máximo en el punto $(a\pi, 2a)$. Por la simetría respecto al eje OY y la traslación de la x, podemos hacer un dibu



Esta curva se denomina ***cicloide***; representa la trayectoria de un punto de una circunferencia que rodara sin deslizarse sobre una recta.

Cortes con los ejes:

Con OX: $y(t)=0 \Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow O=(0,0) \\ t=2\pi \Rightarrow P_2=(2\pi a,0) \end{cases}$

Con OY: $x(t)=0 \Rightarrow t=\operatorname{sen} t \Rightarrow t=0 \Rightarrow O=(0,0)$

2) Representar la curva dada por $\begin{cases} x=x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y=y(t)=\dfrac{t^3}{t^2-1} \end{cases}$

SOLUCIÓN

Dominio de t: $R-\{1,-1\}$. En este conjunto, no sólo están definidas $x(t)$ y $y(t)$, sino que son derivables y con derivadas continuas hasta el orden que se precise.

Simetrías: $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$, luego la curva es simétrica respecto del eje OX ; basta estudiarla entonces para valores de $t\geq 0$.

Periodicidad: La curva no es evidentemente periódica.

Asíntotas: Por ser $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=1$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=+\infty$,la recta **x=1** es **asíntota vertical**.

Además, $\lim\limits_{t\to1} x(t)=\pm\infty$, $\lim\limits_{t\to1} y(t)=\pm\infty$, siendo $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^3}{t^2}=1$ y $\lim\limits_{t\to1} (y(t)-x(t))=\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^3-t^2}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^2(t-1)}{(t+1)(t-1)}=\dfrac{1}{2}$, entonces:

la recta **y = x + 1/2** es **asíntota oblicua**.

Comportamiento de la curva frente a las asíntotas:

a) $\boxed{x=1}$

$$t\to\infty \Rightarrow \begin{cases} x\to 1,\ x>1 \\ y\to+\infty \end{cases}$$

b) $\boxed{y=x+1/2}$

$$t\to 1, t>1 \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{cases}$$

$$y_{curva}-y_{asint\,ota}=\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{t^2}{t^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{(t-1)^2(t+\frac{1}{2})}{t^2-1}=\frac{+\cdot+}{+}>0$$

$\Rightarrow y_c > y_a$.

$$t \to 1,\ t < 1 \Rightarrow \begin{cases} x \to -\infty \\ y \to -\infty \end{cases}$$

$$y_{curva} - y_{asintota} = \frac{(t-1)^2(t+\frac{1}{2})}{t^2-1} = \frac{+\cdot+}{-} < 0 \Rightarrow y_c < y_a$$

Corte de la curva con las asíntotas:

a) $\boxed{x=1}$, $\frac{t^2}{t^2-1} = 1 \Rightarrow t^2 = t^2 - 1 \Rightarrow -1 = 0$, absurdo.

b) $\boxed{y = x + 1/2}$, $\frac{t^3}{t^2-1} = \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

El único resultado válido es $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

Puntos críticos: $\begin{cases} x'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2} = 0 \Rightarrow t=0 \\ y'(t) = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} = 0 \Rightarrow t=0,\ t=\pm\sqrt{3} \end{cases}$; luego, para $t \geq 0$ .tenemos dos puntos críticos $t = 0,\ t=\sqrt{3}$ que anulan alguna de las derivadas, y t = 1 para el que no existe ninguna de ambas derivadas.

Ramas de la curva: Hay tres ramas, correspondientes a los intervalos $(0,1), (1,\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3},+\infty)$.

Para t= 0, se obtiene el punto O=(0, 0); para t = $\sqrt{3}$, se obtiene el punto $P_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para $t \to 1$, se tiene que $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = -\infty \end{cases}$ y $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to 1^+} y(t) = +\infty \end{cases}$.

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{2}t(3-t^2)$$

Estudio de derivadas:

Puntos de tangencia vertical: $\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow y'(t) = 0 \\ y'(t) \neq 0 \end{cases}$ No hay.

Puntos de tangencia horizontal: $\begin{cases} x'(t) \neq 0 \Rightarrow t \neq 0 \\ y'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 & \Rightarrow x'(t)=0 \\ t=\pm\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$

Para $t=\sqrt{3}$, se obtiene el punto $P_2=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, como ya vimos.

Puntos singulares: $\begin{cases} x'(t)=0 \Rightarrow t=0 \\ y'(t)=0 \Rightarrow t=0,\ t=\pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow t=0 \Rightarrow (0,0)$

$$\begin{cases} x''(0)=-2 \\ y''(0)=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x'''(t)=-\dfrac{24t(t^2+1)}{(t^2-1)^4} \Rightarrow x'''(0)=0 \\ y'''(t)=-\dfrac{6(t^4+6t^2+1)}{(t^2-1)^4} \Rightarrow y'''(0)=-6 \end{cases}$$

Así, $\left\{\vec{F}''(0),\vec{F}'''(0)\right\}=\{-(2,0),(0,6)\}$ son dos vectores no proporcionales y por tanto, **el origen es un punto de retroceso de primera especie.**

Tangente en el punto de retroceso: Recta que pasa por $(0,0)$ y es paralela al vector $\vec{F}''(0)=(-2,0)$. **Se trata por tanto del eje OX.**

Crecimiento y decrecimiento: $\begin{cases} x'(t) \leq 0 \Rightarrow x \text{ es decreciente en } t \\ y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 3 \Leftrightarrow t \geq \sqrt{3} \end{cases}$

Luego y es creciente en t para $t \geq \sqrt{3}$.

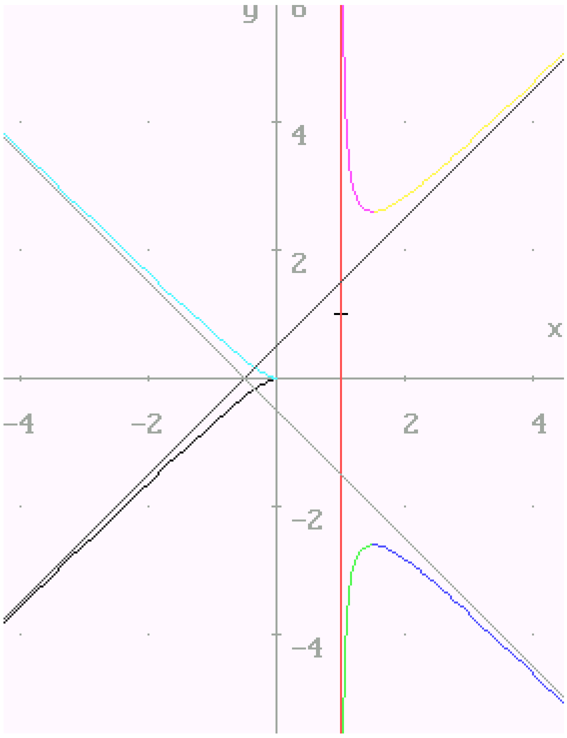
$$\begin{cases} x''(t)=\dfrac{2(3t^2+1)}{(t^2-1)^3} \\ y''(t)=\dfrac{2t(t^2+3)}{(t^2-1)^3} \end{cases} \Rightarrow y''(x)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}=\frac{3(t^2-1)^3}{4t}$$

Crecimiento y concavidad de cada una de las tres ramas:

Dominio de variación de t	Valores correspondientes de x	Valores correspondientes de y	signo de $y'(x)$	signo de $y''(x)$
$0<t<1$	$0>x>-\infty$ $x'(t)<0$ x decrece respecto de t	$0>y>-\infty$ $y'(t)<0$ y decrece respecto de t	$y'(x)>0$ y crece respecto de x	$y''(x)<0$ curva convexa
$1<t<\sqrt{3}$	$+\infty>x>\frac{3}{2}$ $x'(t)<0$ x decrece respecto de t	$+\infty>y>\frac{3\sqrt{3}}{2}$ y $y'(t)<0$ decrece respecto de t	$y'(x)>0$ y crece respecto de x	$y''(x)>0$ curva cóncava

$\sqrt{3} < t < +\infty$	$\frac{3}{2} > x > 1$ $x'(t) < 0$ x decrece respecto de t	$\frac{3\sqrt{3}}{2} < y < +\infty$ y $y'(t) > 0$ crece respecto de t	$y'(x) < 0$ y decrece respecto de x	$y''(x) > 0$ curva cóncava

Gráfica:



Cortes con los ejes:

***Con* OX**: $x(t) = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow (0,0)$

***Con* OY**: $y(t) = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow (0,0)$

Puntos dobles: Debemos resolver el sistema $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$; en este caso particular,

$$\begin{cases} \dfrac{t_1^{\ 2}}{t_1^{\ 2} - 1} = \dfrac{t_2^{\ 2}}{t_2^{\ 2} - 1} \\[2ex] \dfrac{t_1^{\ 3}}{t_1^{\ 2} - 1} = \dfrac{t_2^{\ 3}}{t_2^{\ 2} - 1} \end{cases}$$

, sistema que no acepta soluciones en el dominio de t, salvo $t_1 = t_2$.

Por tanto, la curva carece de puntos dobles.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Representar las curvas dadas por las ecuaciones:

1) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{t^3+1} \\ y = \dfrac{3at^2}{t^3+1} \end{cases}$ (Folium de Descartes)

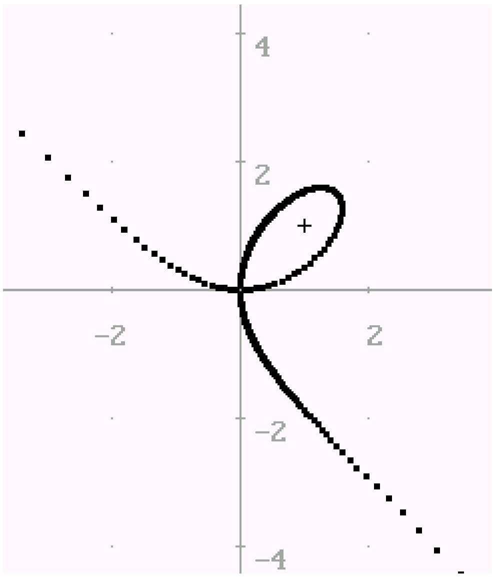
3) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{(t+1)(t-2)} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$

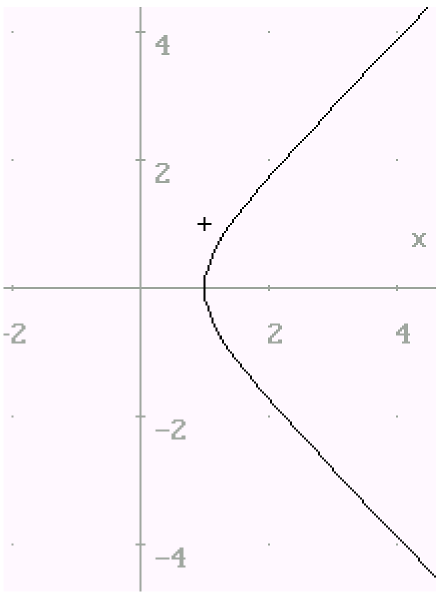
4) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{tg}\dfrac{t}{3} \end{cases}$

SOLUCIONES

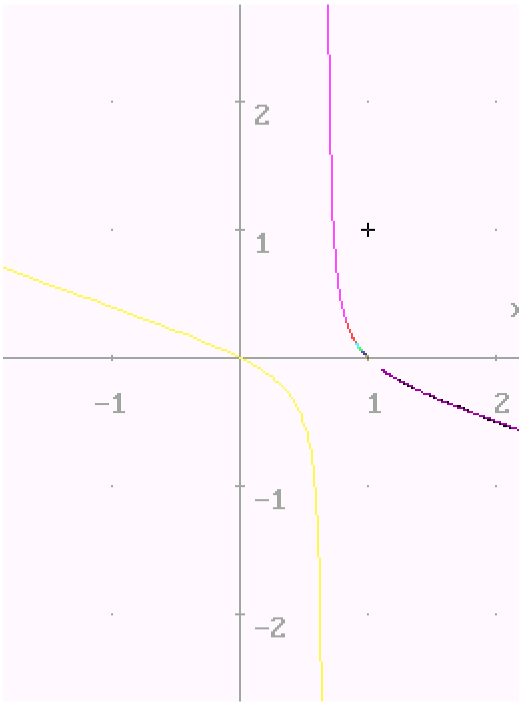
1)



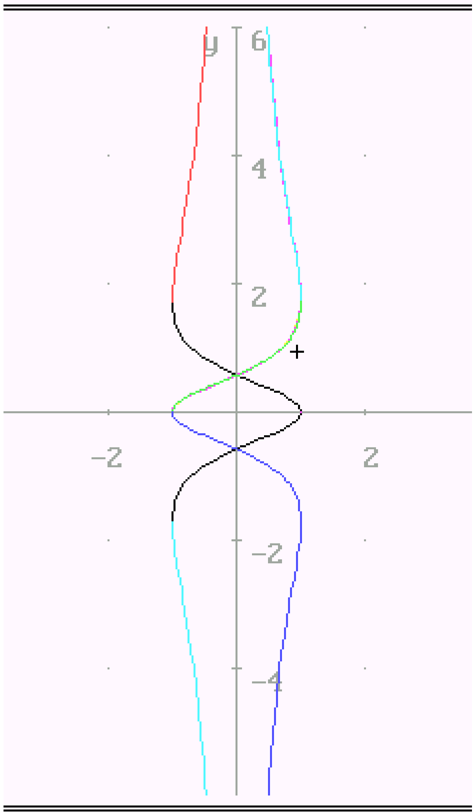
2)



3)



4)



BIBLIOGRAFÍA

Jordi Puig. “Análisis Matemático I”. Toray-Masson.
“Problemas de Matemáticas para COU y primer nivel universitario”. Alhambra.

A. Doneddu. “Curso de Matemáticas. Análisis y Geometría Diferencial”. Aguilar.

N. Piskunov. “Cálculo diferencial e integral” Tomo I. Mir.