Propiedades de orden en R

Reflexiva: $x \le x \quad \forall x \in R$

Antisimétrica: $x \le y \text{ e } y \le x \;\Rightarrow x = y \qquad \forall x,y \in R$

Transitiva: $x \le y \text{ e } y \le z \;\Rightarrow x \le z \qquad \forall x,y,z \in R$

Total: $x \le y, \text{ o bien, } y \le x \qquad \forall x,y \in R$

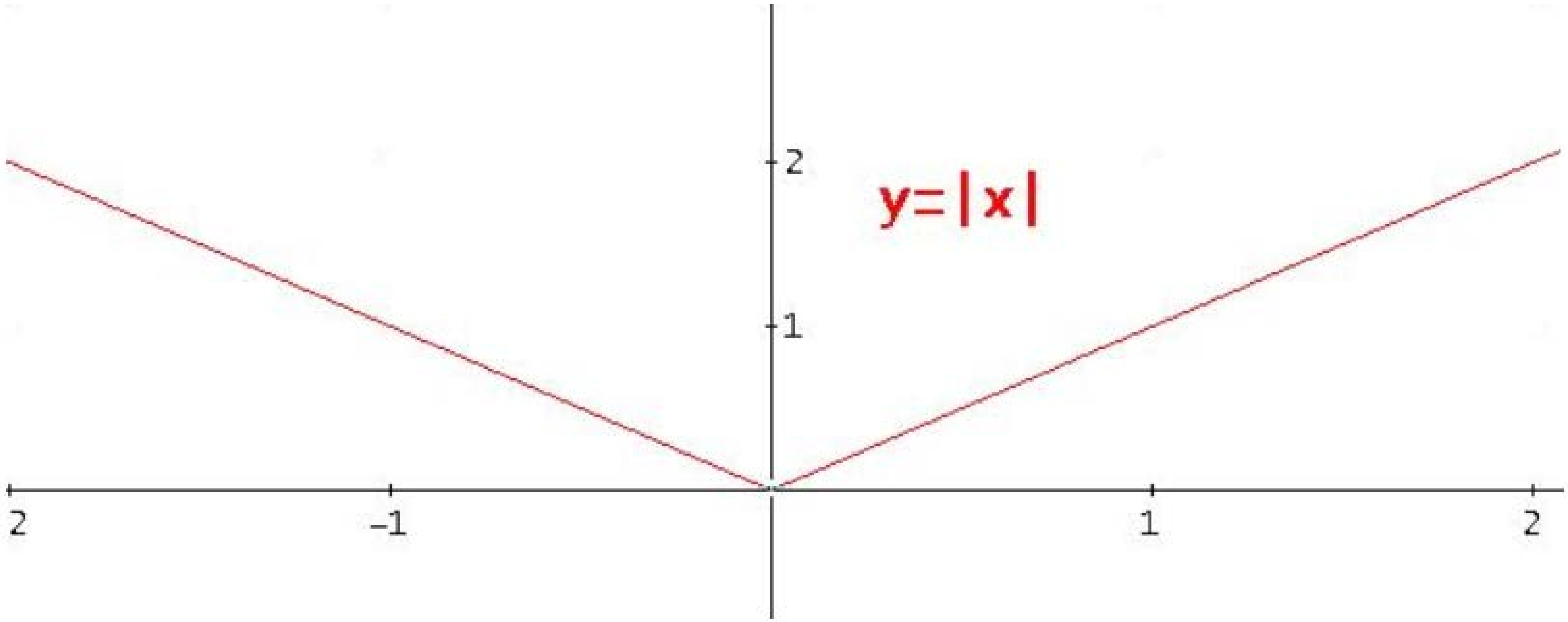
Compatible con la suma: $x \le y \;\Rightarrow x+z \le y+z \qquad \forall x,y,z \in R$

Con el producto: $\text{si } z>0, x \le y \;\Rightarrow x \cdot z \le y \cdot z \qquad \forall x,y,z \in R$

$\text{si } z<0, x \le y \;\Rightarrow x \cdot z \ge y \cdot z \qquad \forall x,y,z \in R$

Valor absoluto de un número real

$$|x| = d(x,0) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases} \qquad \forall x \in R$$



Propiedades del valor absoluto de un número real

$\forall x,y \in R$, se verifica:

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

Teorema fundamental del valor absoluto

$$\text{Si} \quad y > 0 \qquad |x| \leq y \Rightarrow -y \leq x \leq y$$

Conjuntos notables: Intervalos

Intervalo cerrado $[a,b]=\{x\in R\,/\,a\le x\le b\}$

Intervalo abierto $(a,b)=\{x\in R\,/\,a<x<b\}$

Intervalo semiabierto

$$(a,b]=\{x\in R\,/\,a<x\le b\}$$
$$[a,b)=\{x\in R\,/\,a\le x<b\}$$

Intervalos infinitos

$(-\infty,b]=\{x\in R\,/\,x\le b\}$ $\quad(-\infty,b)=\{x\in R\,/\,x<b\}$

$[a,\infty)=\{x\in R\,/\,a\le x\}$ $\quad(a,\infty)=\{x\in R\,/\,a<x\}$

Entorno de centro a y radio δ

$$E(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\in R\,/\,a-\delta<x<a+\delta\}$$

Entorno reducido de centro a y radio δ

$$E^*(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$$

En general, un entorno de un punto es un intervalo abierto que contiene a dicho punto

Si A⊂ R, un número real "a" es un punto de acumulación de A cuando

$$\forall E^*(a,\delta) \text{ se verifica que } E^*(a,\delta)\cap A\neq\varnothing$$

Consecuencias:

- En todo entorno de un punto de acumulación de A, hay infinitos puntos de A.
- Los conjuntos finitos carecen de puntos de acumulación.
- Un conjunto infinito y acotado posee al menos un punto de acumulación

Un conjunto A está acotado inferiormente si existe $k \in R$ tal que $k \le a, \forall a \in A$

Se dice entonces que k es una cota inferior de A

Un conjunto A está acotado superiormente si existe $k \in R$ tal que $a \le k, \forall a \in A$.

Se dice entonces que k es una cota superior de A.

Un conjunto A es acotado si está acotado inferior y superiormente.

El extremo inferior o ínfimo de un conjunto A es la mayor de las cotas inferiores de A. Existe siempre que A está acotado inferiormente.

$$\text{ínf}(A) = \text{máx}\left\{k \in R \,/\, k \text{ es cota inferior de } A\right\}$$

Si $\text{ínf} \in A$ **, se le denomina mínimo de A.**

El extremo superior o supremo de un conjunto A es la menor de las cotas superiores de A. Existe siempre que A está acotado superiormente.

$$\sup(A) = \text{mín}\left\{k \in R \,/\, k \text{ es cota superior de } A\right\}$$

Si $\sup(A) \in A$ **, se le denomina máximo de A.**