

Función Real de variable Real

Definiciones

Función

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.

Una **aplicación de A en B** es una relación que asocia a cada elemento (x=variable independiente) de A un único valor de B (y=variable dependiente) de B.

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

$$\forall x \in A \quad \exists (\text{un único}) y \in B / f(x) = y$$

Función

A es el conjunto inicial o dominio de la función f.

Dominio de una función: es el conjunto de valores de x para los que la función f(x) existe.

B es el conjunto final o imagen de la función f.

Recorrido o imagen de una función: es el conjunto de valores que toma la variable dependiente, y.

Se dice que y es la imagen de x por f.

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \ / \ \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\} = f(A) \subset B$$

Función real de variable real: es aquella cuyo dominio y recorrido son subconjuntos de los números reales.

Función

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **inyectiva** si cada elemento de B, que es imagen de uno de A, lo es de uno sólo, es decir,

$$\forall a, b \in A, \text{ si } f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **sobreyectiva** si todo elemento de B es imagen de al menos uno de A, es decir,

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } f(x)=y$$

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **biyectiva** si todo elemento de B es imagen de un solo elemento de A o también si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Función

Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ está **acotada**, si existe un número real positivo k , tal que $|f(x)| \leq k$ para todo número x en D .

Gráfica de la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de pares ordenados (x, y) tales que $y = f(x)$ considerando un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la **identidad**, si $f(x) = x$ para todo número x en \mathbb{R} y la denotaremos por $I_{\mathbb{R}}$.

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{simétrica respecto el eje OY (Función par)} \\ -f(x) & \text{simétrica respecto el origen O (Función impar)} \end{cases}$$

Función periódica: Función para la que existe una constante p tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo valor x de su dominio. La constante p se llama **período** cuando es el valor mínimo que lo cumple.

Composición de funciones

El **producto o composición de las funciones**

$f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ es la función: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tal
 $\xrightarrow{g \circ f}$

que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$, en cuyo caso se dice f compuesto g , o bien el producto de f por g .

Sea $f : A \rightarrow B$ con $A, B \subset \mathbb{R}$ una función biyectiva. Llamaremos **función inversa de f** , y la denotaremos por f^{-1} , a la función:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

siendo $f(x)=y$

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = x$$

Se verifica que: $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$

La gráfica de f^{-1} es simétrica respecto de la recta $y=x$, respecto de la gráfica de f .

Función Real de variable Real

Funciones continuas

Función continua en un punto y en un intervalo

Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si:

- 1. f está definida en un intervalo que contiene a “ a ”.**
- 2. Existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$**
- 3. Se verifica: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$**

Aplicando la definición de límite:

La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si y solo si

$\forall \varepsilon > 0$ existe otro número positivo $\delta(\varepsilon)$ tal que si

$x \in (a - \delta(\varepsilon), a + \delta(\varepsilon))$ entonces $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$

Función continua en un punto y en un intervalo

Continuidad en un intervalo

Se dice que una función $y = f(x)$ es continua en un subconjunto o en un intervalo si lo es en cada de sus puntos.

El conjunto de los puntos en los que $f(x)$ es continua se denomina dominio de continuidad y se representa por $\text{Cont}(f)$.

Es evidente que $\text{Cont}(f) \subseteq \text{Dom}(f)$.

Una función que es continua en su dominio se dice continua.

Ejemplos

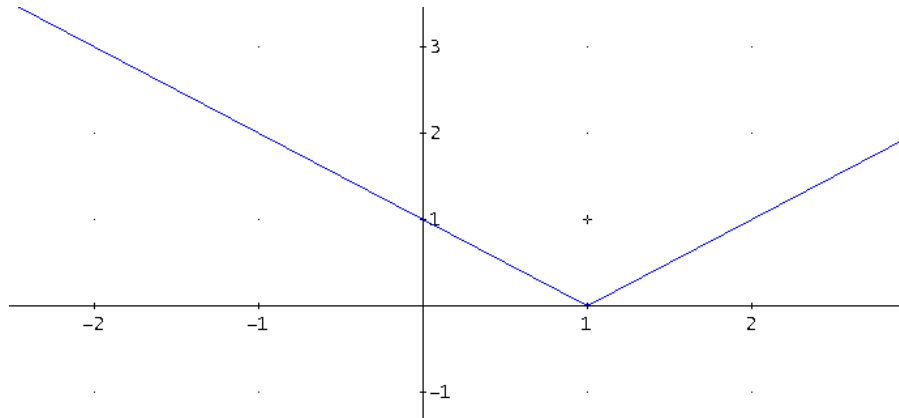
1. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$

2. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ no es continua en $x = -2$

3. $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$

Ejemplos

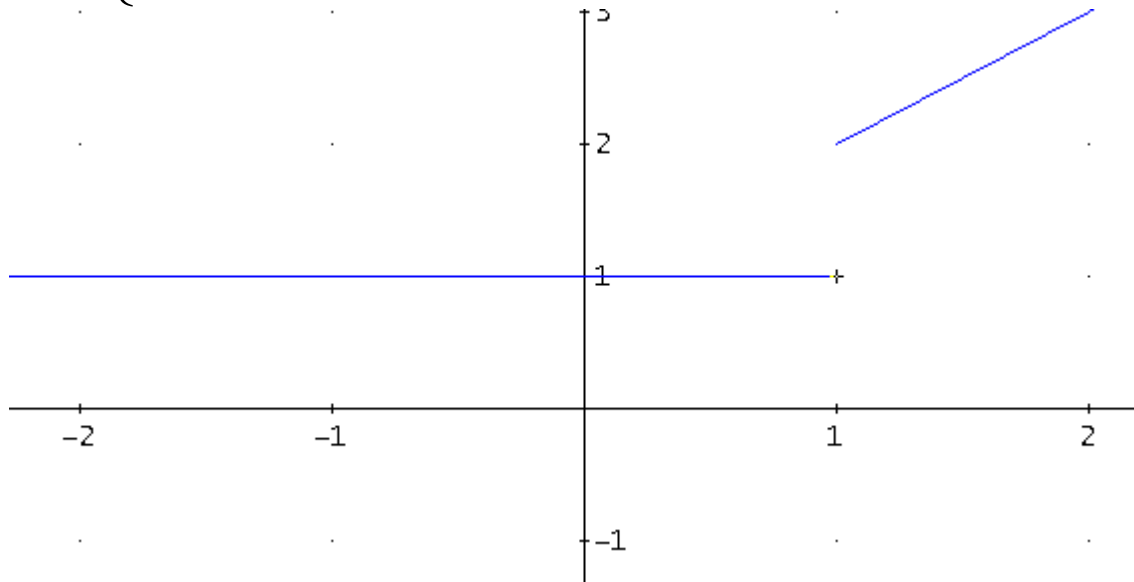
- Gráfica del ejemplo 1. Calcular el Dominio y Continuidad



Dominio = \mathbb{R} y Cont = \mathbb{R}

Ejemplos

1. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ no es continua en $x = 1$



Dominio = \mathbb{R} y Continuidad = $\mathbb{R} - \{1\}$

Discontinuidades y sus tipos

Discontinuidades y sus tipos

Un punto en el que la función f no es continua se dice que es punto de discontinuidad de f .

La función f no es continua en $x = a$ cuando no se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Hay varias posibilidades para que esto suceda:

l) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ en este caso diremos que la

la función presenta una discontinuidad evitable en $x = a$

• se evitaría haciendo $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Discontinuidades y sus tipos

II) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

La función presenta una discontinuidad de primera especie o de salto, que puede ser finito o infinito.

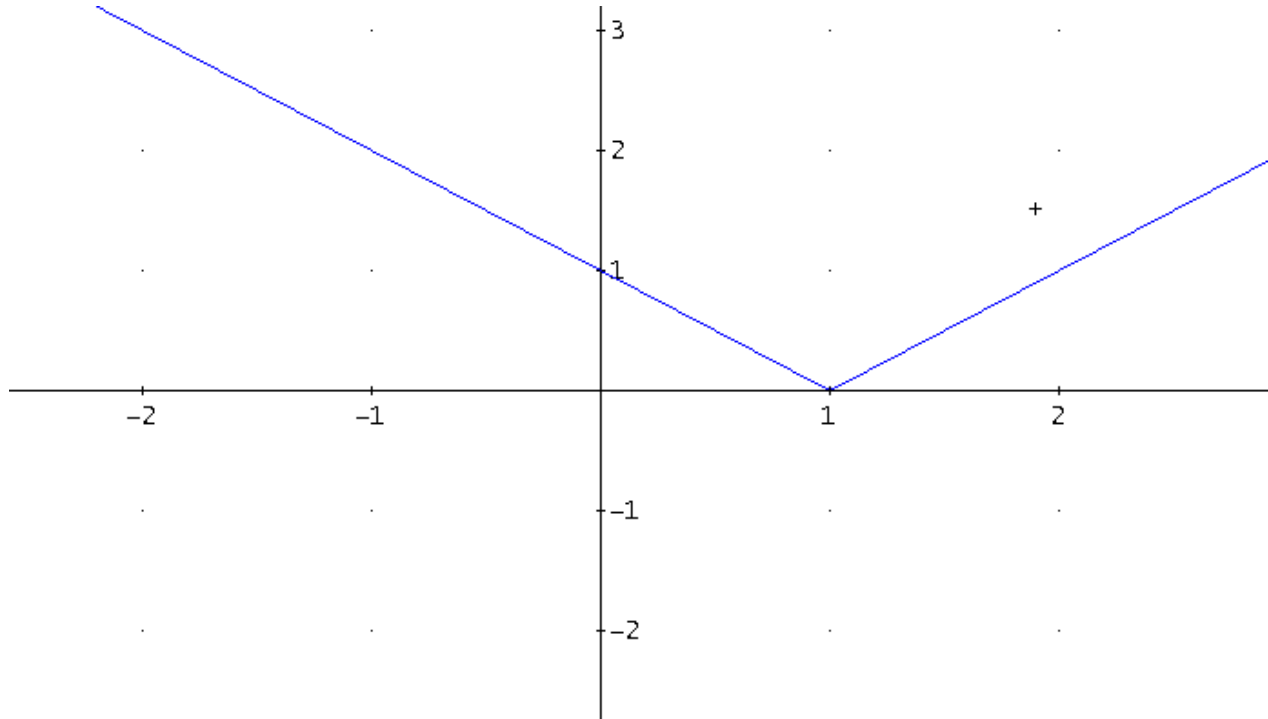
III) Si uno o los dos límites laterales, no existen, la discontinuidad es esencial o de segunda especie.

Caso particular:

Si los dos límites laterales tienden a “ $+\infty$ ” se dice que la función tiene “tendencia al infinito”

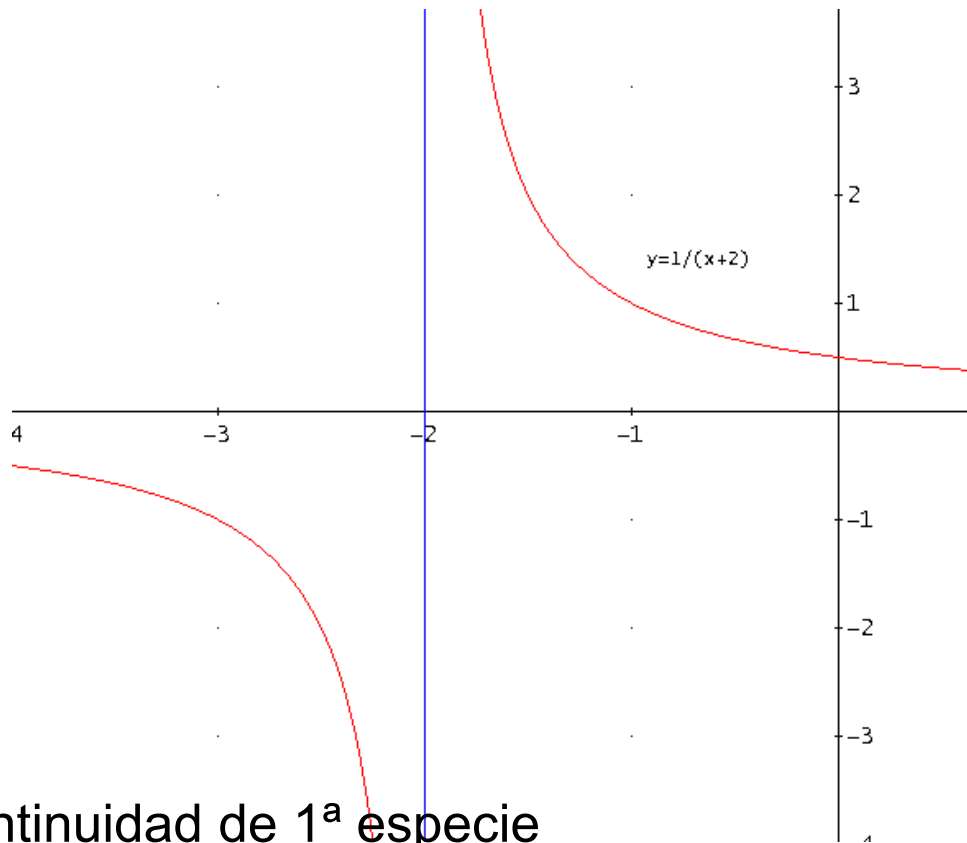
Ejemplos

1. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$



Ejemplos

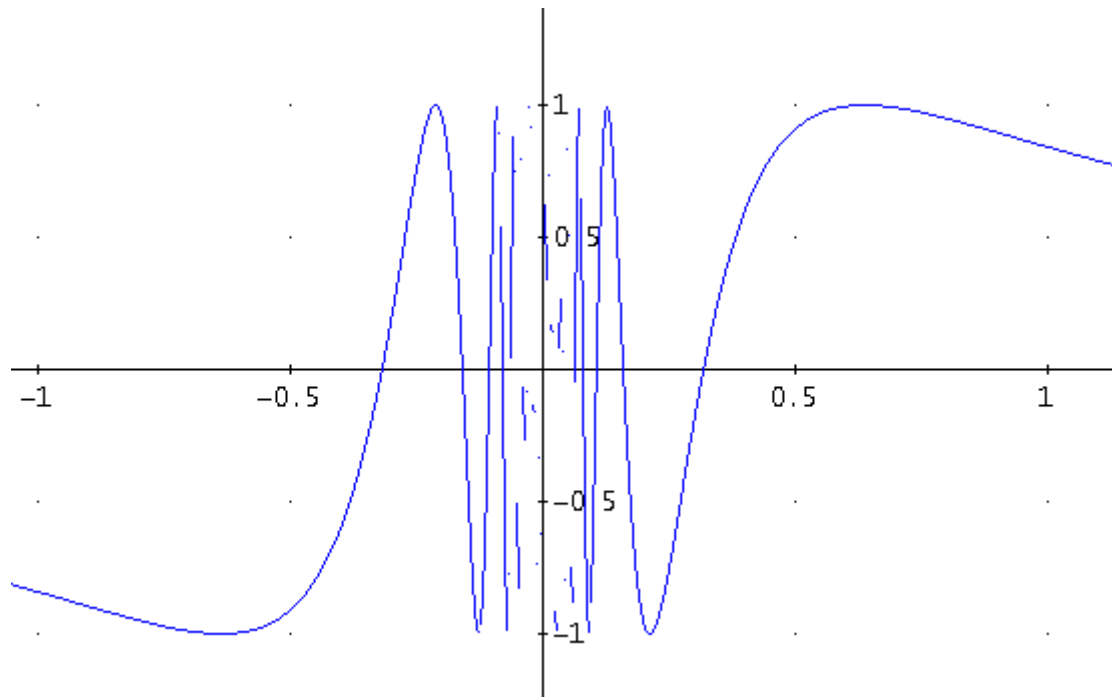
2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ no es continua en $x = -2$



Discontinuidad de 1ª especie

Ejemplos

3. $f(x) = \text{sen} \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$



Discontinuidad de 2ª especie

Propiedades locales de las funciones continuas

1. Acotación.

Si f es continua en $x = a$, existe un entorno de $x = a$ en el que la función está acotada.

2. Conservación del signo.

Si f es continua en $x = a$ y $f(a) \neq 0$, existe un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ de $x = a$ en el cual el signo $f(x)$ coincide con el signo de $f(a)$.

Propiedades operativas de las funciones continuas

Sean f y g funciones continuas en $x = a$. Se verifica:

1. $f + g$ es continua en $x = a$.
2. $f - g$ es continua en $x = a$.
3. Si $k \in \mathbb{R}$, la función $k \cdot f$ es continua en $x = a$.
4. $f \cdot g$ es continua en $x = a$.
5. $\frac{f}{g}$ es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$.
6. f^g es continua en $x = a$ si $f(a) > 0$.

En particular, f^n es continua en $x = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

7. La función compuesta de dos funciones continuas es una función continua.

Ejemplos de funciones continuas

Consecuencias

- Las funciones polinómicas son funciones definidas y continuas en \mathbb{R} .
- Las funciones racionales son funciones definidas y continuas en \mathbb{R} salvo en los puntos en los que se anula el denominador.
- Las funciones irracionales del tipo $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, donde $p(x)$ es un polinomio, son continuas en su dominio.
- Las funciones trigonométricas del tipo $f(x) = \text{sen } g(x)$ y $f(x) = \text{cos } g(x)$ son continuas donde lo sea $g(x)$.
- Las funciones exponenciales del tipo $a^{g(x)}$ ($a > 0$), son continuas donde lo sea $g(x)$.

Ejemplos de funciones continuas

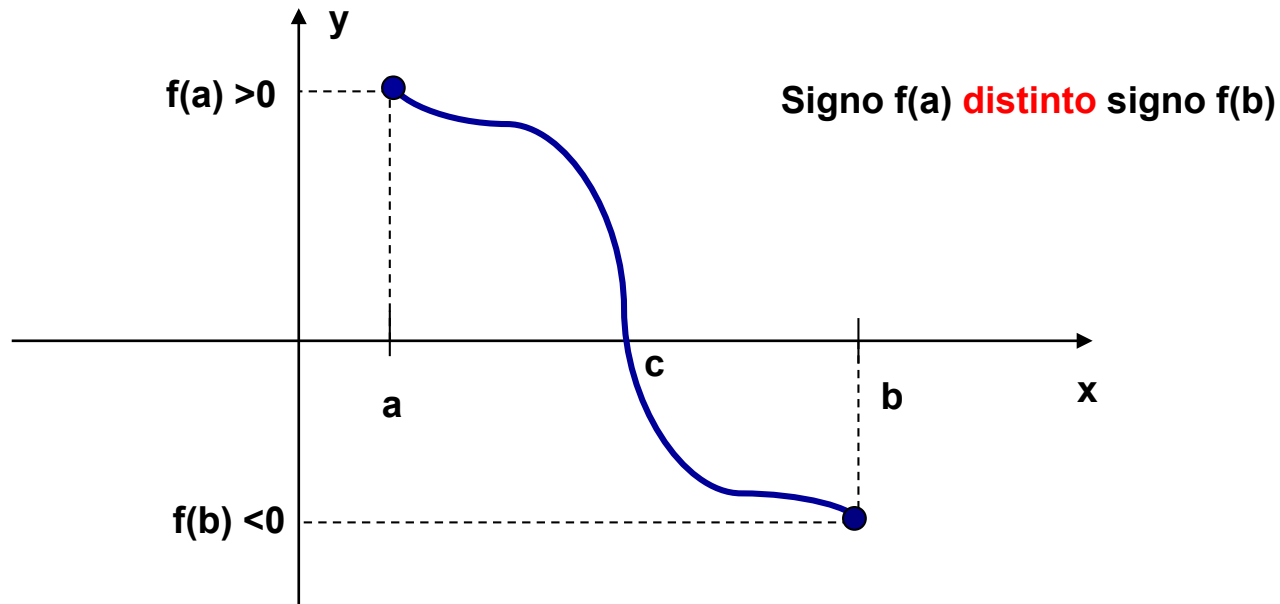
- Las funciones logarítmicas del tipo $f(x) = \log_a(g(x))$, ($a > 0$), son continuas en $\text{Cont}(g) \cap \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0\}$.
- Las funciones valor absoluto, $f(x) = |g(x)|$, son continuas donde lo sea $g(x)$.

Teoremas de las funciones continuas

- 1. Teorema de Bolzano (o de los ceros)**
- 2. Teorema de los valores intermedios o de Darboux**
- 3. Teorema de acotación de funciones continuas**
- 4. Teorema de Weierstrass**

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y toma valores distinto signo en los extremos del intervalo. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.



Ejemplos

1. Prueba que $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $[1, 2]$

Nota: $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$

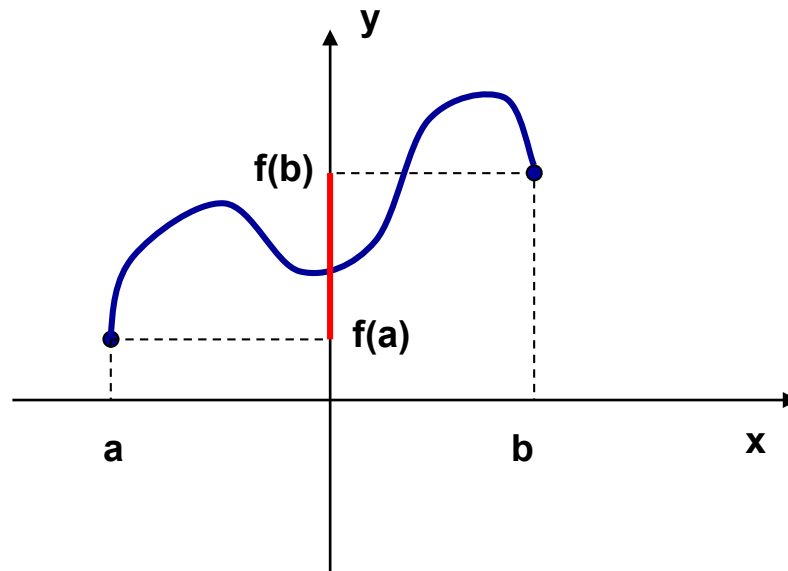
2. ¿Tendrá, según Bolzano, $1/x$ alguna raíz en $(0, 1)$?

Solución:

NO, ya que en $x = 0$ f no está definida

Teorema de los valores intermedios o de Darboux

Si f es una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces la función $f(x)$ toma al menos una vez todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

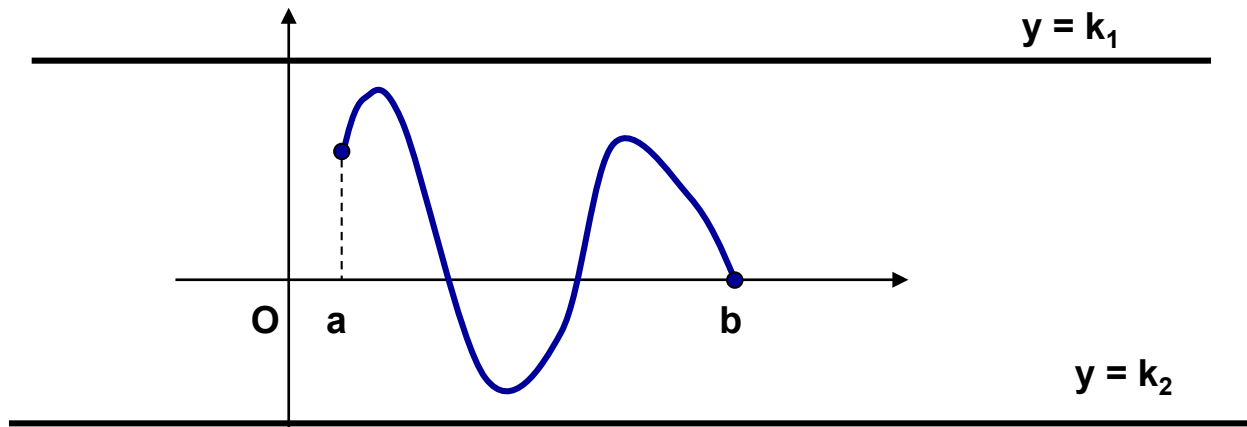


Teorema de acotación de funciones continuas

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número k_1 tal que

$$f(x) \leq k_1 \text{ para todo } x \text{ de } [a,b].$$

También f está acotada inferiormente en $[a,b]$, o sea, existe algún número k_2 tal que $f(x) \geq k_2$ para todo x de $[a,b]$.

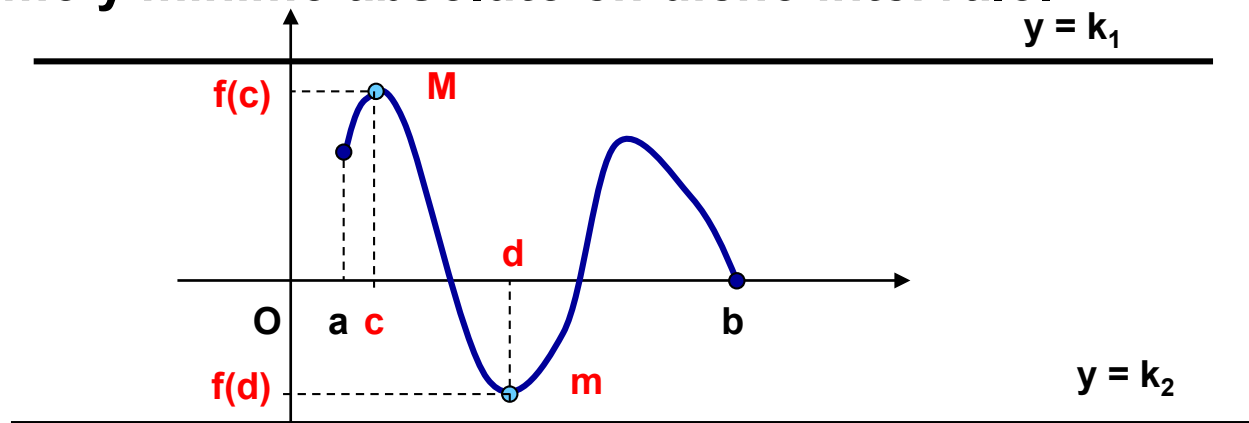


Teorema de Weierstrass

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ existe algún número c en $[a,b]$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x de $[a,b]$.

Del mismo modo, si f es continua en el intervalo $[a,b]$ existe algún d en $[a,b]$ tal que $f(d) \leq f(x)$ para todo x de $[a,b]$.

En resumen: Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.



Ejemplos

1. Decide si se puede aplicar el teorema de Weierstrass a la función:

$$f(x) = \frac{1}{9 - x^2} \quad \text{en } [2, 4], \text{ ¿y en } [4, 5]?$$

Solución

La función es discontinua en $x = -3, 3$

No en $[2, 4]$ por ser discontinua en $x = 3$

Si en $[4, 5]$

Función Real de variable Real

Funciones derivables

Funciones derivables

Derivada de una función en un punto

Dada la función f definida en el intervalo I y $a \in I$, se llama derivada de f en a , y se denota con $f'(a)$, al siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El valor $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si existe, se llama derivada de f a la derecha de a .

El valor $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si existe, se llama derivada de f a la izquierda de a .

Funciones derivables

Si existe $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, es porque ambas derivadas laterales existen y coinciden.

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a)$ es un número real.

Nota:

Para saber cuando es derivable una función, primero se deriva y después se comprueba dónde la derivada es válida, es decir:

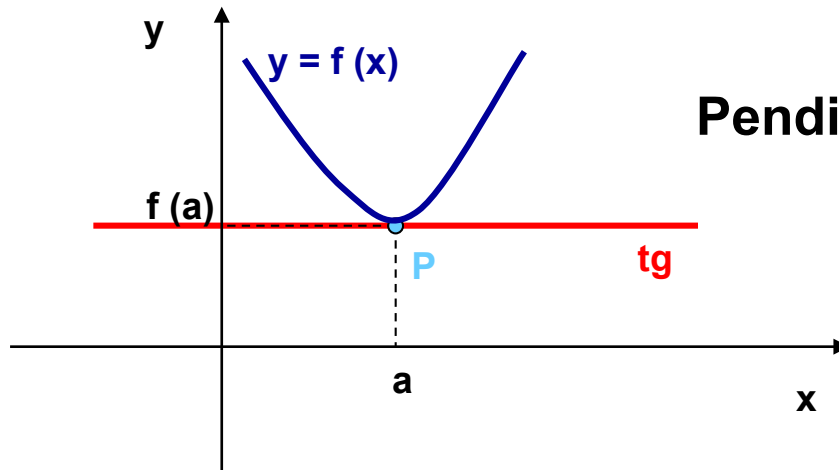
$$\text{Der}(f) = \text{Dom}(f')$$

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto

La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la tangente a la curva representada por la función en dicho punto.

Es decir:

$f'(a)$ = Pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$



Pendiente = $m_t = f'(a) = 0$

Ecuación de las rectas tangente y normal a una curva

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ en el cual f es derivable es la siguiente:

$$y - f(a) = f'(a) (x - a)$$

Se llama recta normal a una curva en un punto P a la recta perpendicular a la tangente trazada por P . Según esto las pendientes de rectas perpendiculares son inversas y opuestas una de la otra

Es decir: $m = -\frac{1}{f'(a)}$

La ecuación de la recta a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ será:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} (x - a)$$

Concepto de Diferencial

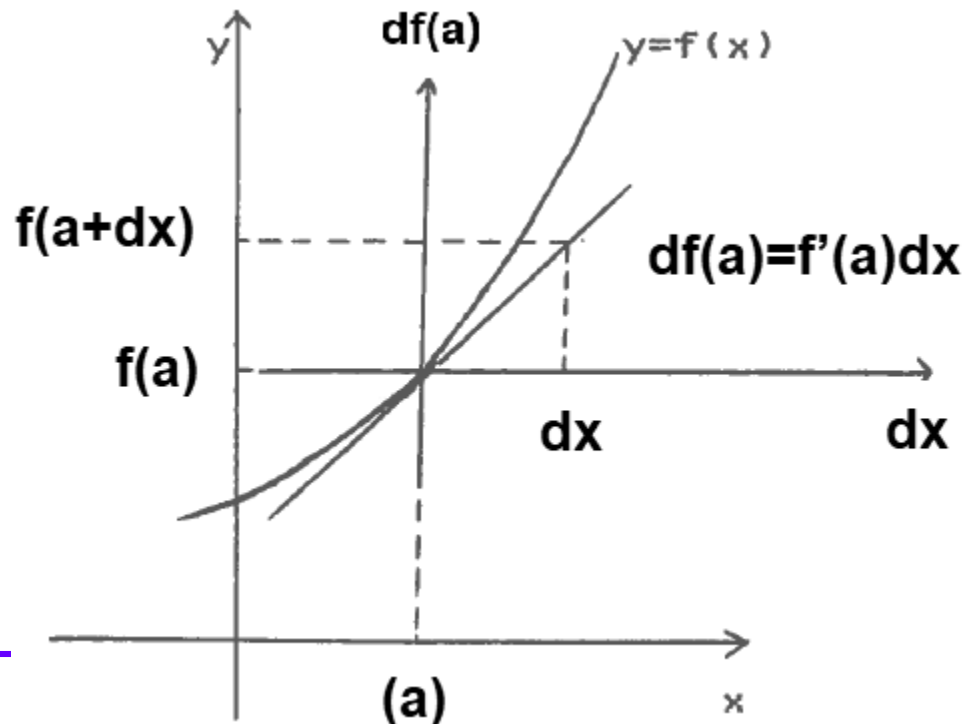
Diferencial de una función f en un punto a es la aplicación lineal:

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(a) \cdot x \quad \text{siendo } f \text{ derivable en } a.$$

Suele denotarse dx a la variable de la aplicación lineal diferencial.

Será, por tanto, una función de dos variables a y dx .



Derivabilidad y continuidad

Proposición

Si f es una función derivable en a , entonces es continua en a .

Demostración

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$. Calculemos este último límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \lim_{h \rightarrow 0} h =$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Sigue 

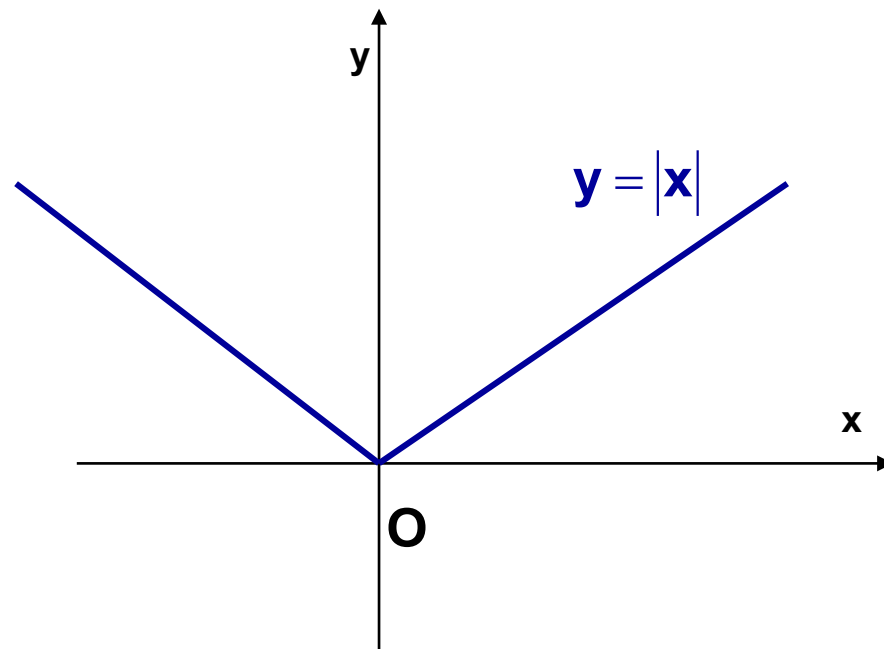
Derivabilidad y continuidad

Existen funciones continuas en un punto que no son derivables.

Ejemplo: $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



En el punto $(0, 0)$ no es derivable ya que $f'(0^+) = 1$ y $f'(0^-) = -1$

Funciones derivables

Estudio de la derivabilidad para funciones definidas a trozos

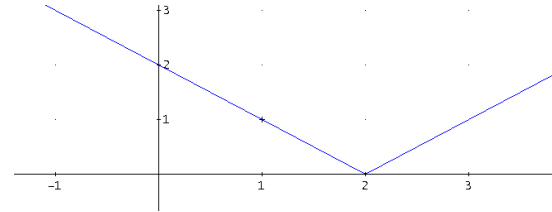
Para estudiar la derivabilidad de una función en un punto conflictivo usando las reglas de derivación, daremos los siguientes pasos:

1. Estudiamos la continuidad de la función en un punto.
2. Escribimos la expresión de la función derivada y estudiamos las derivadas laterales

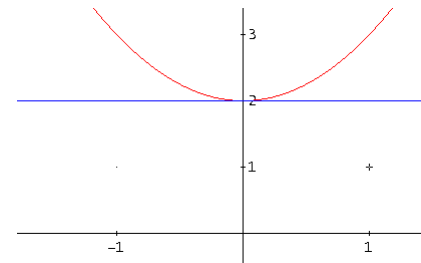
Ejemplos

1. Estudia la derivabilidad de la función: $y = |2 - x|$

Nota: es una función definida a trozos



2. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 1$.



Derivada de la composición de funciones

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $a \in A$ tal que f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$ entonces $(g \circ f)$ es derivable en a y se verifica:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Derivada de la función inversa

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ biyectiva y continua en $a \in A$ tal que f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$. Entonces la función f^{-1} es derivable en $b=f(a)$ y vale:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Derivadas de orden superior

Si la función $y = f(x)$ es derivable en un cierto intervalo su función derivada $y' = f'(x)$ es otra función que depende de x .

Es posible que esta nueva función tenga derivada en algún punto “a” del intervalo; en este caso la nueva derivada se llamará derivada segunda o derivada de segundo orden, y se anotará $f''(x)$.

Análogamente, se puede pasar de la derivada segunda a la tercera, etc.

En general a la derivada de orden n de la función $y = f(x)$ se denota por $f^{(n)}(x)$.

Crecimiento y decrecimiento

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él “ x ” y “ $x+h$ ” se verifica:

$$x < x + h \Rightarrow f(x) < f(x + h)$$

Una función es **creciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él “ x ” y “ $x+h$ ” se verifica:

$$x < x + h \Rightarrow f(x) \leq f(x + h)$$

Una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) es **creciente** en un intervalo (a,b) cuando se verifica: $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

Crecimiento y decrecimiento

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él “ x ” y “ $x+h$ ” se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) > f(x + h)$.

Una función es **decreciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él “ x ” y “ $x+h$ ” se verifica:
 $x < x + h \Rightarrow f(x) \geq f(x + h)$.

Una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) es **decreciente** en un intervalo (a,b) cuando se verifica: $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$

Extremos: Máximos y Mínimos

Una función f tiene un **máximo relativo o local en $x=a$** cuando para todos los x de un entorno de a se verifica: $f(x) \leq f(a)$.

Una función f tiene un **máximo absoluto en $x=a$** cuando para todos los x del dominio de f se verifica: $f(x) \leq f(a)$.

Una función f tiene un **mínimo relativo o local en $x=a$** cuando para todos los x de un entorno de a se verifica: $f(a) \leq f(x)$.

Una función f tiene un **mínimo absoluto en $x=a$** cuando para todos los x del dominio de f se verifica: $f(a) \leq f(x)$.

Concavidad y Convexidad

Una función es **cóncava** (hacia arriba) si la gráfica de la función queda por encima de la recta tangente en cada uno de los puntos.

Una función es **convexa** (hacia arriba) si la gráfica de la función queda por debajo de la recta tangente en cada uno de los puntos.

Si $f''(a) > 0$, la función f es cóncava en a

Si $f''(a) < 0$, la función f es convexa en a

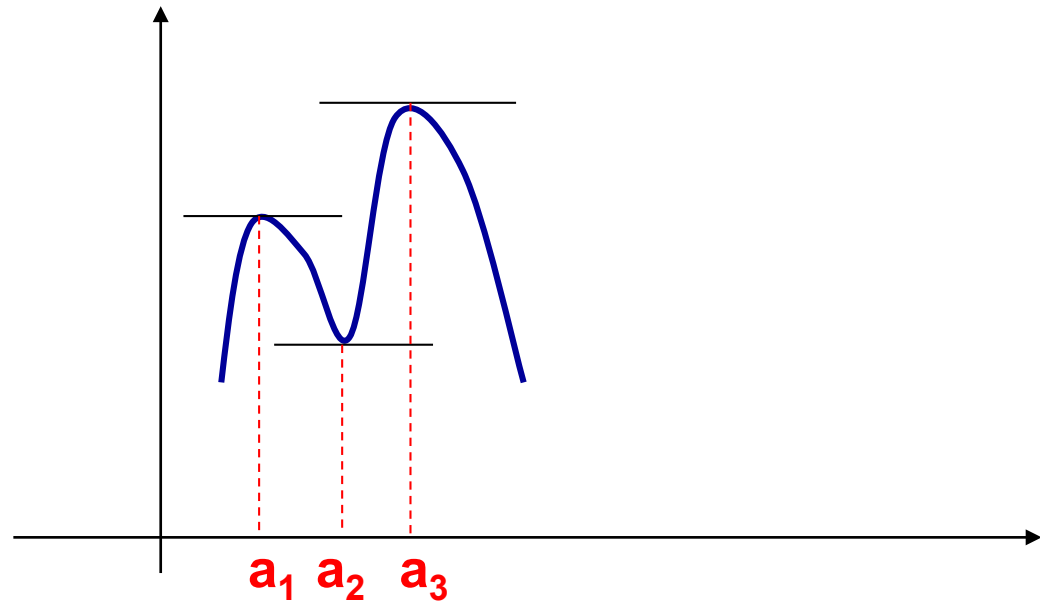
Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces $(a, f(a))$ es un **punto de inflexión**.

Teoremas de las funciones derivables

- 1. Existencia de extremo (máximo o mínimo)**
- 2. Teorema de Rolle**
- 3. Teorema de los incrementos finitos, de Lagrange o del valor medio**
- 4. Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado**

Existencia de extremo (máximo o mínimo)

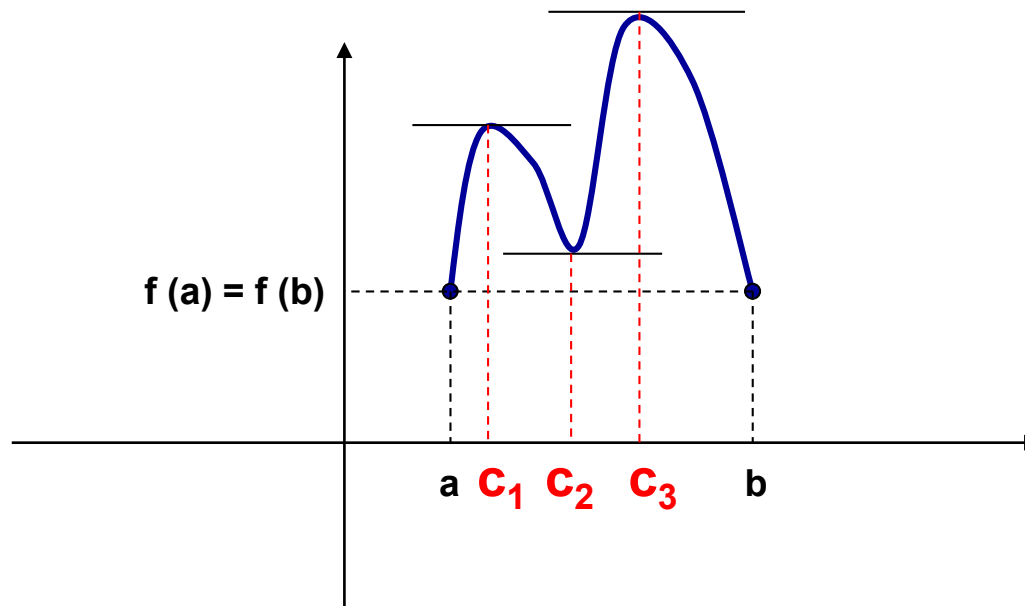
Si la función derivable $y=f(x)$ tiene un extremo (máximo o mínimo) en $x=a$, Entonces $f'(a)=0$. En cuyo caso a es un **punto singular**.



Una función puede tener valores extremos solamente en los puntos donde la derivada existe y es igual a cero, o bien en aquellos donde no existe la derivada. A estos puntos de cualquiera de las dos clases se les denomina **puntos críticos**.

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ donde la derivada de la función se anula, $f'(c) = 0$.



Ejemplos

1. Estudia si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 0]$. En caso afirmativo, determina los valores c en los que $f'(c) = 0$.

Solución

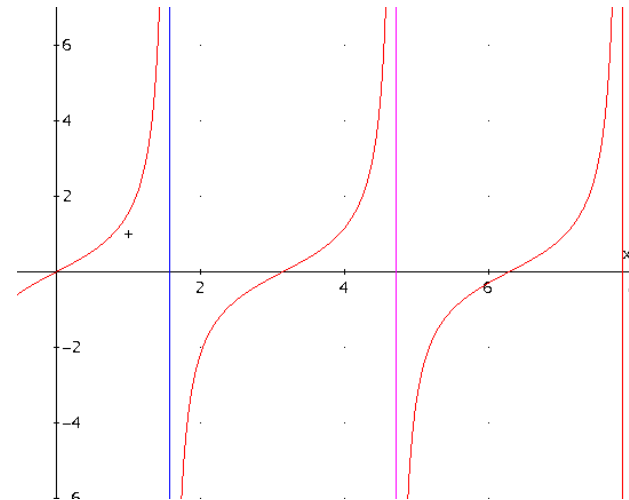
$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$$

2. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $y = \operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0, \pi]$?

Nota: $\operatorname{Dom}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} - \{x = \pi/2 + \pi k / k \in \mathbb{Z}\}$

Solución

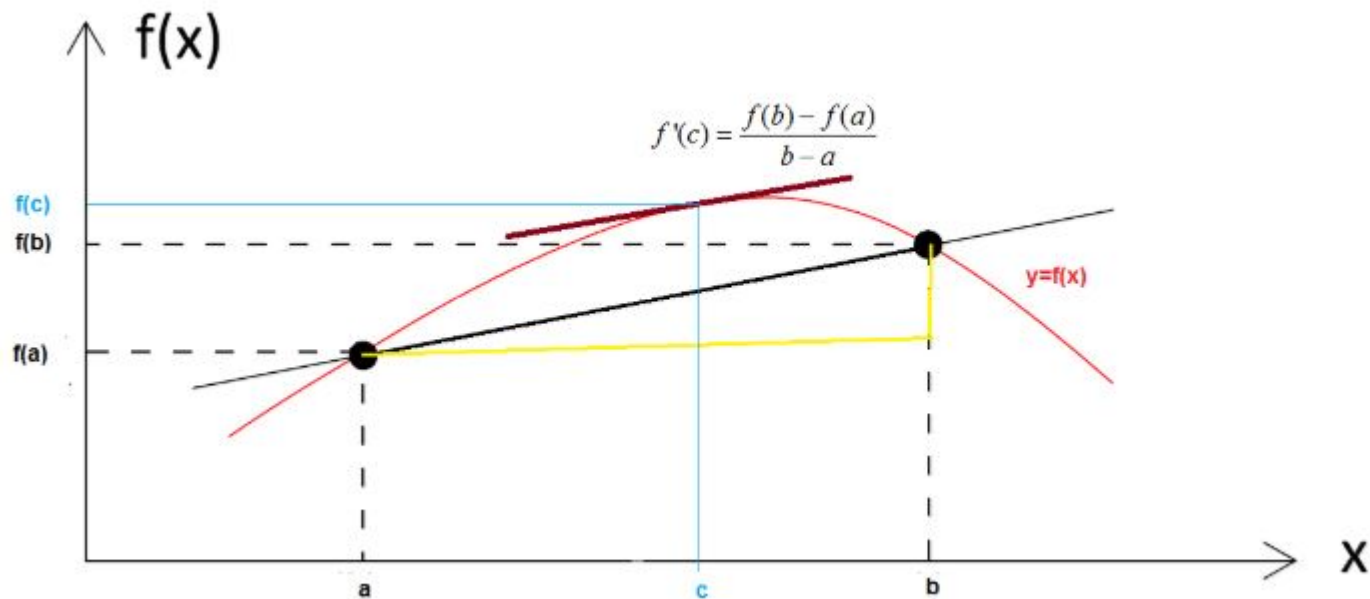
No, la función $\operatorname{tg} x$ no es continua en $[0, \pi]$?



Teorema de los incrementos finitos, de Lagrange o del valor medio

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) , entonces existe, al menos,

un punto $c \in (a,b)$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Sigue



Teorema de los incrementos finitos, de Lagrange o del valor medio

Interpretación geométrica

El cociente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por

A $(a, f(a))$ y B $(b, f(b))$ y $f'(c)$ es la tangente de la recta tangente a la función en el punto $(c, f(c))$.

El teorema afirma que existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que la tangente a la función en dicho punto es paralela a la recta que pasa por A y B.

Corolario:

El teorema de Rolle es un caso particular cuando $f(a)=f(b)$, entonces

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

T. De Cauchy o del valor medio generalizado

En este teorema se relacionan las pendientes de las tangentes a dos curvas en puntos que tienen la misma abscisa.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b) , entonces existe, al menos, un punto c tal que $[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$

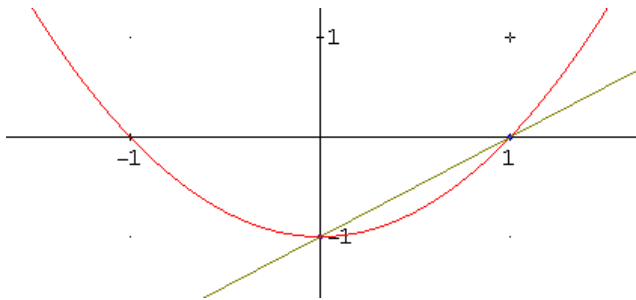
Si $g'(x) \neq 0$ en $[a,b]$, la igualdad anterior se escribe:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ejemplo del teorema de Lagrange

1. Halla las coordenadas del punto de la parábola $f(x) = x^2 - 1$ cuya tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, -1)$.

Solución



Intervalo: $[0, 1]$

Pendiente de la recta que pasa

$$\text{Por A y B: } \frac{-0 - (-1)}{1 - 0} = 1$$

$$\text{Derivada: } y' = 2x \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2$$

Punto pedido: $(1/2, -3/4)$

Regla de L'Hôpital

Supongamos que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, que existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y que existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También podemos aplicar la regla de L'Hôpital cuando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$$

y cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$, a^+ , a^-

Indeterminaciones

Operaciones con límites infinitos

1. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3}$

Solución: $1/6$

2. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x}$

Solución: ∞

Indeterminaciones

3. Indeterminación $0 \cdot \infty$

$0 \cdot \infty$ se transforma en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ Solución: 0

4. Indeterminación $\infty - \infty$

Se transforma $\infty - \infty$ en $\frac{0}{0}$ realizando la operación

Calcula $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$ Solución: 0

Indeterminaciones

5. Indeterminaciones 1^∞ , ∞^0 y 0^0 . Estas indeterminaciones se reducen al tipo $0 \cdot \infty$, tomando logaritmos neperianos en los dos miembros.

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$

Solución: 1

Asíntotas

Asíntota de la curva dada por la función f es toda recta cuya distancia a un punto de la curva que se aleje infinitamente es cero.

Verticales: (ver Dominio). Si $x \rightarrow a \Rightarrow y \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es una asíntota vertical}$$

(Sólo puede haber asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio)

Horizontales: Si $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow b$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b \text{ es una asíntota horizontal}$$

Oblicuas: $y = mx + n$ es una asíntota oblicua, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Representación gráfica de funciones

Seguiremos los siguientes pasos:

1. Dominio de definición.
2. Puntos de cortes con los ejes coordenados.
3. Simetrías respecto del eje OY y respecto del origen, pues en caso de que existan simetrías de este tipo bastará estudiar la función cuando $x \geq 0$.
4. Periodicidad, pues si la función es periódica bastará representarla en un intervalo de amplitud periódica y luego extender al resto del dominio de definición.
5. Estudio del crecimiento y decrecimiento.
“Estudiar el signo de la derivada 1ª”

Representación gráfica de funciones

6. Cálculo de máximos y mínimos locales.
7. Estudio de la concavidad y convexidad.
“Estudiar signo de la derivada 2ª ”
8. Cálculo de los puntos de inflexión.
9. Cálculo de las asíntotas.
10. Representación gráfica.

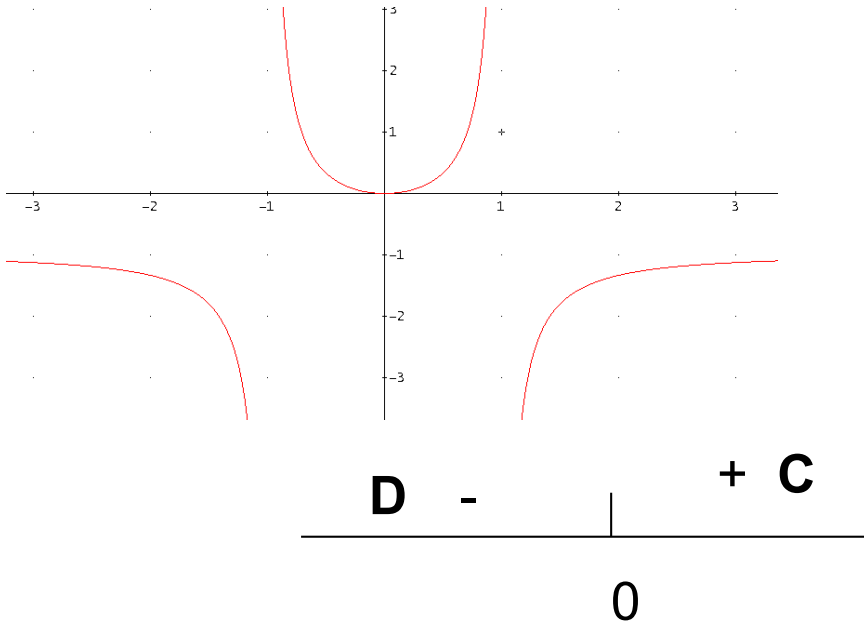
Representar las siguientes funciones :

1. $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

2. $f(x) = e^{-x^2}$

Representación gráfica de funciones

$$1. f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$



6. Mínimo: $m(0, 0)$

1. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

2. Ptos de cortes ... $P(0, 0)$

3. Simetrías: Respecto eje OY

5. Crecimiento y decrecimiento

$$y' = \frac{2 \cdot x}{(x^2 - 1)^2}$$

Creciente: $(0, \infty)$, Decrec: $(-\infty, 0)$

Representación gráfica de funciones

7. Concavidad y convexidad

$$y'' = \frac{2 \cdot (3 \cdot x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3}$$

	Convexa			Cóncava					Convexa	
Denom:	-	+					-			
Num:	+	+	-1	+	+	+	+	1	+	+

8. Punto de Inflexión. No tiene

Representación gráfica de funciones

9. Asíntotas

Verticales: (ver Dominio). Si $x \rightarrow k \Rightarrow y \rightarrow \infty$.

$$x = 1, x = -1$$

Horizontales: Si $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow k$.

Si $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow k$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1$$

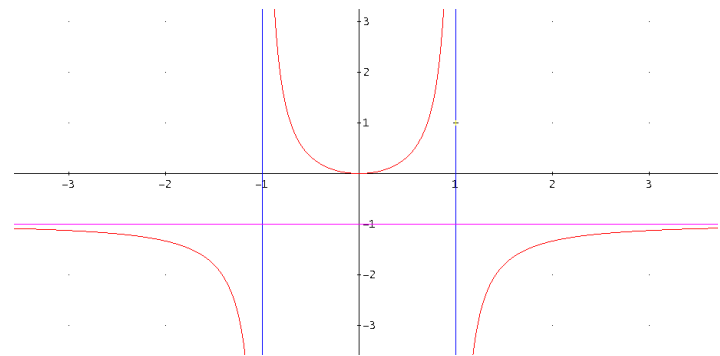
Representación gráfica de funciones

Asíntotas

Oblicuas; $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right), \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

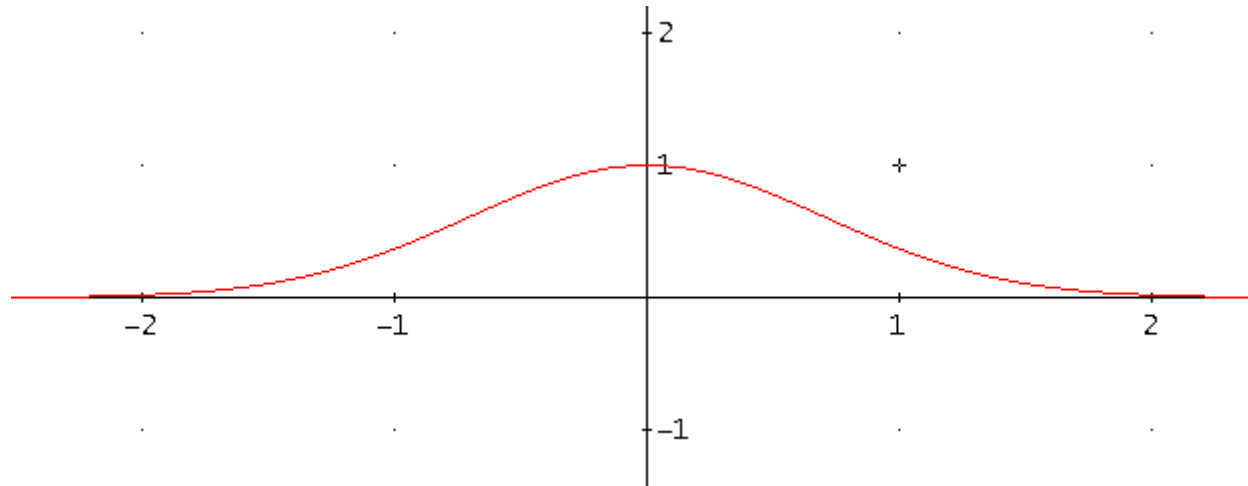
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 / x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0 \Rightarrow \text{No hay Oblicuas}$$



Representación gráfica de funciones

Representar la siguiente función :

$$2. \quad f(x) = e^{-x^2}$$



$$y' = -2 \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

$$y'' = e^{-x^2} \cdot (4 \cdot x^2 - 2)$$

Bibliografía

- PRIMO MARTINEZ A. y otros: “Matemáticas”. Modalidad: Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. 2º Bachillerato. Ed. Hespérides (1998).
- ARIAS J.M., MAZA I.: “Matemáticas”. Modalidad: Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. 2º Bachillerato. Ed. Casals (2000).