

## 1 Aproximación de una función mediante un polinomio

Cuando  $y=f(x)$  tiene una expresión complicada y necesitamos calcular los valores de ésta, se puede aproximar mediante funciones sencillas (polinómicas).

El teorema del valor medio permite aproximar el valor de una función para un punto en concreto y acotar el error cometido en dicha aproximación.

Si  $f$  es continua en  $[a,x]$  y derivable en  $(a,x)$ , existe  $c \in (a,x)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(c)(x - a).$$

### Ejemplo:

Dar una cota del valor  $\sqrt{101}$  utilizando el teorema del valor medio.

Definimos  $f(x) = \sqrt{x}$  que es una función continua y derivable en  $\mathbb{R}^+$ , en particular lo es en el intervalo  $[100,101]$ . Aplicando el teorema del valor medio en este intervalo, se obtiene

$$f(101) = f(100) + \frac{1}{2\sqrt{c}}(101 - 100) \Rightarrow \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{c}} \text{ con } c \in (100,101), \text{ es decir, } 100 < c < 101 \text{ con lo}$$

$$\text{cual } 10 < \sqrt{c} < \sqrt{101} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{20} = 0,05, \text{ por consiguiente,}$$

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{c}} < 10 + 0,05 = 10,05 \Rightarrow \sqrt{101} < 10,05$$

En general, buscamos un polinomio que coincida con  $f(x)$  en un punto dado  $x=a$  y que sea aproximadamente igual en las cercanías de dicho punto (entorno del punto).

La aproximación más sencilla corresponde a la recta tangente a  $f(x)$  en  $x=a$  que se denomina **aproximación lineal**:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

### Ejemplo:

Dar una aproximación de  $\ln(0.9)$  utilizando la recta tangente.

La función a utilizar es  $f(x) = \ln x$  en el punto  $a=1$ , puesto que se conoce  $f(1) = \ln 1 = 0$ , obteniendo:  $f(0.9) = \ln(0.9) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(1) + f'(1)(0.9-1) = -0.1$ , ya que  $f'(x) = 1/x$ .

En un punto  $x$  próximo a “ $a$ ” el error al utilizar la recta tangente en lugar de la expresión de la función, será:  $E(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$

### Ejemplo:

Suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta y que su radio es igual a  $6370 \pm 0,1$  km, ¿qué efecto tendría la tolerancia  $\pm 0,1$  en nuestra estimación del área de la superficie del globo?

Como  $S = 4\pi r^2 \Rightarrow S' = \frac{dS}{dr} = 8\pi r \Rightarrow dS = 8\pi r dr$  y el incremento de la recta tangente a  $S$  (en  $r=6370$ ) que corresponde a  $dr = 0,1$  es:

$$dS = 8\pi r dr = 8\pi (6370) (0,1) \approx 16009 \text{ km}^2 \text{ que se denomina error propagado.}$$

Siendo el **error relativo**  $\frac{dS}{S} = \frac{8\pi r dr}{4\pi r^2} = \frac{2}{r} dr = \frac{2}{6370} (\pm 0,1) \approx \pm 3,14 \cdot 10^{-5}$ , o bien el **error porcentual** **0,00314%**

## 2 Construcción del polinomio

Buscamos un polinomio  $P_n(x)$  tal que  $f(a)=P_n(a)$ ,  $f'(a)=P'_n(a)$ , ...,  $f^{(n)}(a)=P^{(n)}_n(a)$ .

El método debe ser consistente, es decir, si consideramos  $f(x)=P(x)$  la aproximación no debe producir ningún error.

Sea el polinomio de grado  $n$ :  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  que ordenado según las potencias de  $x-a$  resulta:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k \text{ con } P_n(a)=b_0$$

para calcular el resto de los coeficientes  $b_k$  calculamos las derivadas sucesivas del polinomio:

$$P'_n(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \dots + nb_n(x-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kb_k(x-a)^{k-1}; P'_n(a) = b_1$$

$$P''_n(x) = 2b_2 + \dots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)b_k(x-a)^{k-2}; P''_n(a) = 2b_2$$

.....

$$P^{(i)}_n(x) = \sum_{k=i}^n k(k-1)\dots(k-i+1)b_k(x-a)^{k-i}; P^{(i)}_n(a) = b_i i!$$

.....

$$P^{(n)}_n(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_n; P^{(n)}_n(a) = b_n n!$$

En consecuencia los coeficientes han de ser:  $b_k = \frac{P^{(k)}_n(a)}{k!}$  y el polinomio queda:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}_n(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Ejemplo:**

Ordenar  $5x^3+7x^2+3x+8$  según las potencias de  $x-2$ .

Para  $P_n(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x + 8$  en  $a=2$  resulta  $P_n(2)=82$  y las sucesivas derivadas:

$$P'_n(x) = 15x^2 + 14x + 3; P'_n(2) = 91$$

$$P''_n(x) = 30x + 14; P''_n(2) = 74$$

$$P'''_n(x) = 30; P'''_n(2) = 30$$

que sustituyendo en la expresión anterior:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n=3} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = P_n(a) + \frac{P'_n(a)}{1!} (x-a) + \frac{P''_n(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{P'''_n(a)}{3!} (x-a)^3 =$$
$$= 82 + \frac{91}{1!} (x-2) + \frac{74}{2!} (x-2)^2 + \frac{30}{3!} (x-2)^3 = \boxed{82 + 91(x-2) + 37(x-2)^2 + 5(x-2)^3}$$

**Definición:** Dada una función  $y=f(x)$  con derivadas hasta un cierto orden  $n$  en un punto  $a$ , se denomina **polinomio de Taylor de grado  $n$  de  $f$  en  $a$ :**

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$\text{o abreviadamente } T_n[f(x), a] = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Ejemplo:**

Determinar el polinomio de Taylor de grado  $n=3$  de  $f(x)=\ln x$  en  $a=1$ .

Calculamos las derivadas sucesivas en  $a=1$ :

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = 1/x \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$T_{n=3}[f(x) = \ln x, a = 1] = \sum_{k=0}^{n=3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1) \frac{(x-1)^3}{3!} =$$

$$\boxed{0 + 1(x-1) - 1 \frac{(x-1)^2}{2!} + 2 \frac{(x-1)^3}{3!} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}}$$

**Definición:** Para el valor concreto de  $a=0$  el polinomio de Taylor se dice **Polinomio de**

**Maclaurin:**  $T_n[f(x), 0] = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

**Ejemplo:**

Determinar el polinomio de Maclaurin de grado  $n=2$  de  $f(x)=\operatorname{ch}x$ .

Calculamos las derivadas sucesivas en  $a=0$ :

$$f(x) = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f(0) = \operatorname{ch}0 = 1$$

$$f'(x) = \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(0) = \operatorname{sh}0 = 0$$

$$f''(x) = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$T_{n=2}[f(x) = \operatorname{ch}x, a = 0] = \sum_{k=0}^{n=2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2!} = 1 - 0 \cdot x + 1 \frac{x^2}{2!} = 1 + \frac{x^2}{2!}$$

**Ejemplo:**

Usar el polinomio de Maclaurin de grado  $n=4$  para dar una aproximación del número  $e$ .

En este caso utilizaremos la función  $f(x)=e^x$  para la cual  $f(1)=e$ :  $T_{n=4}[f(x) = e^x, a = 0] =$

$$= \sum_{k=0}^{n=4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0) \frac{x^4}{4!} = 1 + 1 \cdot x + 1 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + 1 \frac{x^4}{4!}$$

Para  $x=1$  resulta  $e \approx 1 + 1 \cdot 1 + 1 \frac{1^2}{2!} + 1 \frac{1^3}{3!} + 1 \frac{1^4}{4!} = \frac{65}{24} \approx 2,708$

**Definición:** Sea  $f(x)$  una función para la cual existe el Polinomio de Taylor de orden  $n$  en el punto  $a$ , se define **resto de orden  $n$  de  $f(x)$  en  $a$ :**

$$R_n[f(x), a] = f(x) - T_n[f(x), a]$$

**3 Cálculo del resto:**

Busquemos una función  $Q(x)$  tal que sea  $R_n(f(x), a) = \frac{Q(x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ .

Como  $f(x) = T_n[f(x), a] + R_n[f(x), a]$ , entonces:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Sea  $x$  fijo. Utilizamos la función auxiliar:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

$t \in [a, x]$ . F verifica las hipótesis del Teorema de Rolle, ya que:

$$F(a) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$$

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-x)^{n+1} = 0$$

Luego,  $F(a)=F(x)$ . Además  $F(t)$  es continua en  $[a, x]$  y derivable en  $(a, x)$  siendo:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n$$

$$= F'(t) = -f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n$$

Entonces,  $\exists c \in (a, x)$  tal que  $F'(c)=0$ , es decir,

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-c)^n = 0 \Rightarrow Q(x) = f^{(n+1)}(c)$$

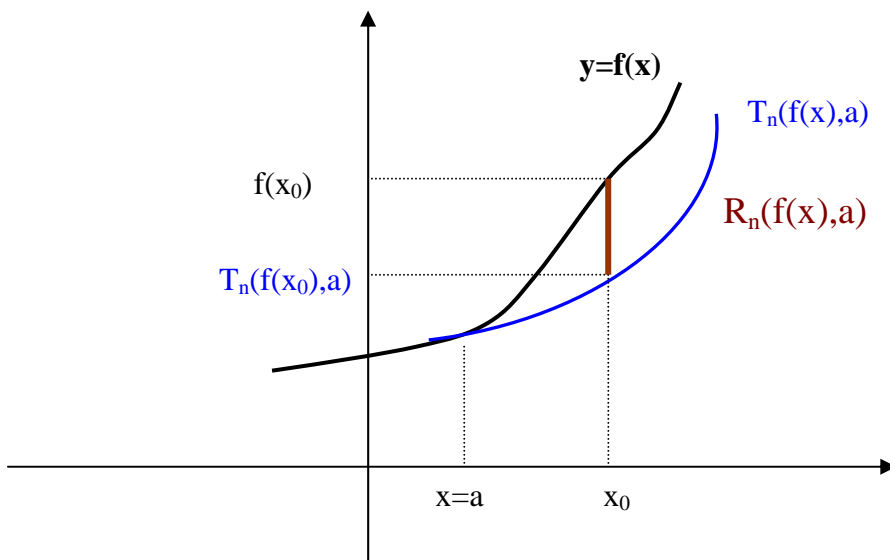
resultando que el resto n-ésimo es:

$$R_n[f(x), a] = f(x) - T_n[f(x), a] = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con  $a < c < x$  ó  $x < a < c$  expresión que se conoce como el **resto de Lagrange o término complementario**.

**4 Acotación del error:**

Al aproximar  $f(x) \approx T_n[f(x), a]$  se comete un error:  $E(x) = |R_n[f(x), a]| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|$



Si  $f^{(n+1)}$  es una función acotada en un entorno de  $a$  (por ejemplo, si es continua)

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \max_{c \in [a,x]} |f^{(n+1)}(c)| \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq k \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Podemos aproximar  $f(x)$  por  $P(x)$  en un entorno de  $x=a$  con la precisión deseada sin más que tomar  $n$  suficientemente grande ya que para cada  $x$  fijo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ .

## 5 Fórmula de Cauchy para el término complementario o resto:

Otra forma equivalente del resto se obtiene escribiendo  $c = a + \theta(x-a)$  siendo  $0 < \theta < 1$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \text{ siendo } h=x-a$$

$$\text{En particular, si } a=0: R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

## 6 Fórmula de Taylor:

**Teorema:** sea  $f(x)$  una función derivable hasta el orden  $n+1$ , con derivadas continuas hasta el orden  $n$  en un entorno del punto  $a$ , entonces, existe  $c \in (a, x)$  o bien  $c \in (x, a)$  tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Si  $a=0$  se obtiene la **fórmula de Maclaurin**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ con } 0 < \theta < 1$$

## Ejemplo:

¿Qué error se comete al adoptar 65/24 como valor del número  $e$ ?

Tenemos:  $f(x)=e^x$ ;  $a=0$ ;  $n=4$  y  $x=1$  (véase el ejemplo anterior) y el error

$$E(x) = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| e^{\theta x} \frac{x^5}{5!} \right|$$

$$E(1) = |R_{n=4}(1)| = \left| e^{\theta} \frac{1^5}{5!} \right| < e^1 \frac{1^5}{5!} < 3 \frac{1^5}{5!} = \frac{1}{40} = 0,025$$

ya que la función exponencial es creciente y el valor de  $e$  lo podemos acotar por 3, pues según el polinomio de Maclaurin que en nuestro caso da 65/24 es mayor que 2.

## COMENTARIOS A LA FÓRMULA DE TAYLOR

**Notación:**  $T_n[f(x), a] \equiv$  Polinomio de Taylor de  $f$  de grado  $n$  en  $x = a$ . Cuando no haya confusión posible, por simplificar expresiones, pondremos simplemente  $T_n(x)$ .

### 1) Para cada $x$ fijo ¿qué ocurre cuando $n \rightarrow \infty$ ?

Es decir, a medida que crece el grado del polinomio de Taylor ¿va siendo mejor la aproximación  $f(x) \approx T_n(x)$ ?

Esto ocurrirá cuando  $\boxed{R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$  es decir, cuando  $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \rightarrow 0$ .

Como, para cada  $x$  fijo, puede demostrarse que  $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ , basta que  $f^{(n+1)}$  sea una función acotada en un entorno de “ $a$ ” para que se cumpla.

Y, en este caso, será  $|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$ , siendo  $M = \sup_{z \in (a,x)} |f^{(n+1)}(z)|$ .

### Ejercicio:

Aplicando lo anterior, es fácil probar que el resto en las series de Maclaurin de las funciones  $\sin x$ ,  $\cos x$  y  $e^x$ , tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito (precisamente por que sus derivadas de orden  $n+1$ :  $\sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$ , y  $e^x$ , son funciones acotadas para “ $x$ ” próximos a cero).

### 2) Para cada $n$ fijo ¿qué ocurre cuando $x \rightarrow a$ ?

a)  $R_n(x)$  es un infinitésimo en  $x \rightarrow a$ , es decir,  $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} R_n(x) = 0}$ .

En efecto:  $\lim_{x \rightarrow a} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - T_n(x)] = f(a) - T_n(a) = f(a) - f(a) = 0$ , por ser  $f$  y  $T_n$  funciones continuas en “ $a$ ”.

b)  $R_n(x)$  es un infinitésimo en  $x \rightarrow a$  de orden mayor que  $n$ .

En efecto:

$$\text{Para } n = 2, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}}{(x-a)^2} = \frac{0}{0} ?$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a) \frac{2(x-a)}{2!}}{2(x-a)} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - f''(a)}{2} \stackrel{f'' \text{ es continua en } a}{=} 0$$

Para  $n = 3$ , se haría exactamente igual, pero, aplicando la regla de L'Hôpital tres veces en lugar de dos.

Para  $n = n$ , se aplicaría la regla de L'Hôpital  $n$  veces, llegando al mismo resultado:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

**Notación:** A veces se escribe, en el desarrollo de Maclaurin,

$$f(x) = T_n(x) + O(x^{n+1})$$

indicando con  $O(x^{n+1})$  un infinitésimo de orden mayor ó igual que  $n+1$  (que no es otro que el resto  $R_n(x)$ ). En general, en  $x = a$ :

$$f(x) = T_n(x) + O((x-a)^{n+1})$$

**c) En el caso particular de que  $f$  sea un infinitésimo cuando  $x \rightarrow a$** , al ser  $R_n(x)$  otro infinitésimo en  $x = a$  y verificarse que  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ , se tiene que:

$c_1)$   $T_n(x) = f(x) - R_n(x)$  es también un infinitésimo en  $x \rightarrow a$  (por ser resta de dos infinitésimos).

$$\text{Además, por ser } \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{2!(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!(x-a)^0} \right] = \infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^n}{T_n(x)} = 0$$

se deduce que  $T_n(x)$  es un infinitésimo de orden menor que  $n$ , y por tanto, de menor orden que  $R_n(x)$ .

$c_2)$  Como consecuencia de lo anterior y aplicando que la suma de infinitésimos es un infinitésimo equivalente al sumando de menor orden, se verifica:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \approx T_n(x)$$

es decir,  $f(x)$  y  $T_n(x)$  son infinitésimos equivalentes en  $x \rightarrow a$ , para un  $n$  tal que  $T_n(x)$  no sea el polinomio nulo.

$c_3)$  Si  $g(x)$  es otro infinitésimo en  $x \rightarrow a$  que cumple las hipótesis de la fórmula de Taylor, se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n[f(x), a]}{T_m[g(x), a]}$$

suponiendo  $T_n[f(x), a] \neq 0$  y  $T_m[g(x), a] \neq 0$  en un entorno de  $x = a$  (se toman  $n$  y  $m$  los menores que lo verifican, pudiendo ser  $n$  y  $m$  distintos entre sí).

Esta igualdad de límites se obtiene aplicando la propiedad de que un infinitésimo en  $x = a$  que aparezca como factor o divisor en una expresión de la que se quiera calcular su límite cuando  $x \rightarrow a$ , puede sustituirse por otro infinitésimo equivalente y el límite no varía.

**Álgebra de los Polinomios de Taylor.** Para obtener el Polinomio de Taylor de una función compuesta, muchas veces es preferible desarrollar por separado las funciones componentes y sumar, restar o multiplicar los polinomios de Taylor de las respectivas funciones.

**3) Si  $f$  y  $g$  son dos funciones que cumplen las hipótesis de la Fórmula de Taylor** en un entorno de  $x = a$ , llamando  $T_n(f)$  y  $T_n(g)$  a los respectivos polinomios de Taylor de grado  $n$  en  $x = a$ , se verifica:

a)  $T_n(f \pm g) = T_n(f) \pm T_n(g)$

b)  $T_n(f \cdot g) = T_n(f) \cdot T_n(g) - \text{términos en } (x-a)^{n+1}, (x-a)^{n+2}, \dots, (x-a)^{2n}.$

#### 4) Fórmula de Taylor para la función compuesta

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\varphi} & b & \xrightarrow{f} & c \\ & & \xrightarrow{F=f \circ \varphi} & & \end{array}$$

Si conocemos los desarrollos de Taylor de las funciones  $y = \varphi(x)$  en  $x = a$ , y de  $y = f(x)$  en  $x = \varphi(a) = b$ :

(1)  $\varphi(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + O[(x-a)^{n+1}]$

(2)  $f(x) = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \dots + a_n(x-b)^n + O[(x-b)^{n+1}]$

entonces, se verifica:

(3)  $F(x) = f(\varphi(x)) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + O[(x-a)^{n+1}]$ , obteniéndose estos coeficientes  $b_i$  de la siguiente forma:

En (2) se sustituye  $x$  por  $\varphi(x)$  y luego se sustituye  $\varphi(x)$  por su desarrollo (1), efectuando las correspondientes operaciones matemáticas y conservando solo los términos en la forma  $b_k(x-a)^k$ , con  $k = 0, 1, \dots, n$ .

**En el caso particular:**

$$\varphi(x) = Ax^m \quad \text{y} \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + O(x^n)$$

$$\text{entonces: } \boxed{f(\varphi(x)) = a_0 + a_1(Ax^m) + a_2(Ax^m)^2 + \dots + a_n(Ax^m)^n}$$

- Si  $h(x)$  es la función derivada de  $f(x)$  entonces  $T_n[h(x),0] = (T_n[f(x),0])'$
- Si  $h(x)$  es una función primitiva de  $f(x)$  entonces:  $T_n[h(x),0] = \int_0^x T_n[f(t),0] dt$

**Fórmulas de Maclaurin de algunas funciones:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad \text{con } c \in (x,0) \text{ o bien } c \in (0,x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+c)^{-(n+1)}$$

$c \in (x,0) \text{ o bien } c \in (0,x)$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!} + \operatorname{sen}\left(c + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c \in (x,0) \text{ o bien } c \in (0,x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!} + \cos\left(c + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c \in (x,0) \text{ o bien } c \in (0,x)$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} \frac{x^n}{n!} +$$
$$+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } c \in (x,0) \text{ o bien } c \in (0,x)$$