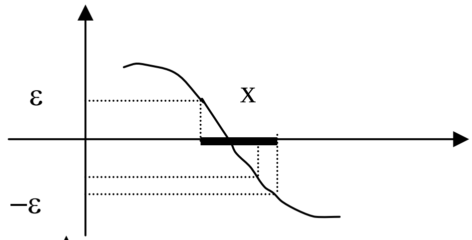
INFINITÉSIMOS

1 Definición

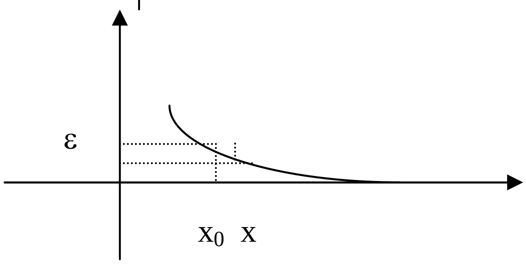
Diremos que una función y=f(x) es infinitamente pequeña, infinitesimal o **infinitésimo** cuando $x \to a$ (o bien cuando $x \to \infty$) si y solo si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$).

De la definición de límite se deduce:

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces para cualquier número ε, por pequeño que sea, existe un entorno de radio δ (a-δ, a+δ) tal que para cada $x \in$ (a-δ, a+δ) se verifica que $|f(x)| < \varepsilon$.



- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces para cualquier número ε, por pequeño que sea, existe un número $x_0 \in \mathbf{R}$ tal que para cada x >x_0 se verifica que $|f(x)| < \varepsilon$.



Ejemplos

a) $\frac{1}{x}$ es un infinitésimo cuando $x \to \infty$.

b) senx es un infinitésimo cuando $x \to 0$.

c) tgx-1 es un infinitésimo cuando $x \to \frac{\pi}{4}$.

d) lnx es un infinitésimo cuando $x \to 1$.

2 Propiedades de los infinitésimos

1. Si la función y=g(x) es suma de una constante b y de un infinitésimo f(x) cuando $x \to a$, es decir y=b+f(x) , entonces $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Y **recíprocamente** si $\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces se puede escribir g(x)=b+f(x), siendo f(x) un infinitésimo cuando $x \to a$.

El resultado es análogo para $x \to \infty$.

2. La suma algebraica de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo (cuando $x \to a$ ó $x \to \infty$)

3. El producto de una función acotada por un infinitésimo es otro infinitésimo. En particular el producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo (cuando $x \to a$ ó $x \to \infty$).

4. El cociente entre un infinitésimo y una función no nula (cuando $x \to a$ ó $x \to \infty$) es otro infinitésimo (cuando $x \to a$ ó $x \to \infty$).

3 Infinitésimos comparables

Dos infinitésimos f(x) y g(x) cuando $x \to a$ se dice que son **comparables** si y solo si existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. Además:

i). Si $k \neq 0$ se dice que f(x) y g(x) son **infinitésimos del mismo orden**.

ii). Si $k=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ se dice que f(x) es un **infinitésimo de mayor orden** (u orden superior) que g(x) (f(x) tiende a 0 “con más rapidez”), o bien que g(x) es un infinitésimo de menor orden (u orden inferior) que f(x).

Análogamente para $x \to \infty$

4 Infinitésimos equivalentes

Se dice que dos infinitésimos f(x) y g(x) cuando $x \to a$ son **equivalentes** si y solo si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Escribiremos en este caso $f \approx g$ cuando $x \to a$.

Análogamente para $x \to \infty$.

Tabla de infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$

$$\operatorname{sen} x \approx x \approx \operatorname{arcsen} x$$
$$\operatorname{tg} x \approx x \approx \operatorname{arctg} x$$
$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$$
$$a^x - 1 \approx x \ln a$$

2.5 Orden de un infinitésimo

Sean f(x) y g(x) dos infinitésimos cuando $x \to a$, diremos que **f es un infinitésimo de orden n** respecto de g si y solo si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = k \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$

Análogamente cuando $x \to \infty$.

Ejemplos

1. $f(x)=5x^2$ es un infinitésimo de orden 2 respecto de $g(x)=x$ cuando $x \to 0$.

En general el infinitésimo kx^n es de orden n respecto del infinitésimo x cuando $x \to 0$.

2. $f(x)=7(x-1)^3$ es un infinitésimo de orden 3 respecto de $g(x)=x-1$ cuando $x \to 1$.

En general el infinitésimo $k(x-a)^n$ es de orden n respecto del infinitésimo x-a cuando $x \to a$. **Podemos escribir O(x-a).**

5 Teorema 1

La suma de dos infinitésimos de distinto orden es otro infinitésimo equivalente al de orden inferior (cuando $x \to a$ ó $x \to \infty$).

Demostración

Supongamos que f(x) y g(x) son infinitésimos cuando $x \to a$ y que g es de mayor orden que f, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{g(x)}{f(x)}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1+0=1$.

Luego $f(x)+g(x) \approx f(x)$ cuando $x \to a$. (Análogamente se probaría para $x \to \infty$).

Observación

Por inducción, el teorema se puede generalizar para la suma de un número finito de infinitésimos. La demostración se propone como ejercicio.

Ejemplo

$p(x)=5x^3-4x^2+2x$ es un infinitésimo cuando $x \to 0$ que es equivalente a $f(x)=2x$ ya que

$$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x^3-4x^2+2x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x^3}{2x}-\frac{4x^2}{2x}+\frac{2x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{4}{2}x+1\right)=1.$$

Luego $\boxed{5x^3-4x^2+2x \approx 2x}$

6 Teorema 2

El límite cuando $x \to a$ de toda expresión de la forma E(x)f(x) donde f(x) es un infinitésimo cuando $x \to a$, no varía si se sustituye f(x) por un infinitésimo equivalente p(x) que cumpla la condición de ser no nulo en un cierto entorno reducido de a.

Demostración

$$\lim_{x\to a}\left(E(x)f(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(E(x)f(x)\frac{p(x)}{p(x)}\right) = \lim_{x\to a}\left(E(x)p(x)\frac{f(x)}{p(x)}\right) = \lim_{x\to a}\left(E(x)p(x)\right)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{p(x)} = \lim_{x\to a}\left(E(x)p(x)\right)$$

(Análogamente se probaría para $x\to\infty$).

Nota: Este teorema se puede generalizar fácilmente a toda expresión de la forma $\lim_{x\to a}\left(E(x)\frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)}\right)$, donde $f_1(x), f_2(x),\cdots,f_n(x), g_1(x), g_2(x),\cdots,g_m(x)$ son infinitésimos con la condición de ser no nulos en un cierto entorno reducido de a (cuando $x\to a$ ó $x\to\infty$).

INFINITOS

7 Teorema

Si y=f(x) es un infinitésimo cuando $x\to a$ (o bien $x\to\infty$) siendo $f(x)\neq 0$ en un entorno reducido de a (o bien para x>x_0), entonces $\lim_{x\to a}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \infty$ $\left(\text{o bien}, \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \infty\right)$.

La demostración es obvia.

Definición

Diremos que una función y=g(x) es un **infinito** o infinitamente grande cuando $x\to a$ (o bien cuando $x\to\infty$) si y solo si la función $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ es un infinitésimo cuando $x\to a$ (o bien cuando $x\to\infty$).

Es decir, una función y=g(x) es un infinito o infinitamente grande cuando $x\to a$ (o bien cuando $x\to\infty$) si y solo si $\lim_{x\to a}\left|\frac{1}{g(x)}\right| = 0$ $\left(\text{o bien}, \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{g(x)}\right| = 0\right)$.

Observación

El estudio hecho para **infinitésimos** se desarrolla de manera análoga para **infinitos**.