Límites y Continuidad de funciones de varias variables

1.- Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de ese depósito en función del radio *r* del cilindro y de su altura *h*.

Solución

2.- Determinar si las siguientes funciones son acotadas:

a) $z = \operatorname{sen}^2(x+y)\cos(x - e^y)$ **b)** $z = \dfrac{x+y}{e^{x+y}}$ **c)** $z = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} + y^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{y^2}$

Solución

3.- Hallar el dominio y la imagen o recorrido de las funciones:

a) $f(x, y) = \ln(xy - 6)$ **b)** $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2y^2 - 9}}{x}$.

c) $h(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$ **d)** $p(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

Solución

4.- Hallar las curvas de nivel de las funciones:

a) $z = xy$ **b)** $z = \operatorname{sen}(xy)$ **c)** $z = x^2 + y^2$

Solución

5.- La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (*x*, *y*) de una placa circular de 10m de radio es:

$$T = 600 - 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2$$

Donde *x* e *y* se miden en metros. Calcular y dibujar algunas curvas isotermas:

Solución

6.- Calcular los siguientes límites:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$ **c.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4}$

d. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y}$ **e.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ **f.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\operatorname{sen}x\,\ln(1+y)}$

Solución

7.- Estudiar la continuidad de las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} ;\quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

8.- Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ **, se pide:**

a. Hallar, si existe, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b. Estudiar la continuidad de f en todo R^2, según los valores de k.

Solución

9.- Estudiar la continuidad en (0, 0) de las siguientes funciones:

a. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b. $h(x,y)=\begin{cases}g(x,y)\cdot\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$**, siendo g(x, y) una función continua en (0,0) tal que g (0, 0) =0. Nota: Utilizar que** $|xy|\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

c. $j(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(x^2-y^2\right)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Solución

10.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) Estudiar la continuidad de f en todo R², según los valores de k.

Solución

11.- Dada la función $z=\dfrac{y^2\left(1+2y\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)+x^2}{x^2+y^2}$ **. Se pide:**

a) Dominio de la función.
b) Límites reiterados en el punto (0,0).
c) A la vista del resultado anterior ¿existe el límite de f en (0,0)? En caso afirmativo calcularlo.
d) ¿Es continua la función en (0,0)?
e) Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.

Solución

12.- Para las siguientes funciones, probar que el valor de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **depende del camino elegido para acercarse a (0,0):**

a) f(x, y) = $\dfrac{x^2y^4}{x^2y^4+\left(x-y^2\right)^2}$ **b) f(x, y) =** $\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

Solución

13.- Consideremos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{xy}$**. Se pide:**

a) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta $y=mx$**.**
b) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola $y=x^2$**.**
c) ¿Existe el límite? Justifica la respuesta.

Solución

14.- Demostrar aplicando la definición de límite que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\cos\frac{1}{x}\right)=0$.

Solución

15.- Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **se pide:**

a) Límites radiales en (0, 0)
b) Límites reiterados en (0, 0)
c) ¿Existe límite en (0, 0)?
d) ¿Existe algún valor de k para el cual la función sea continua en todo R^2**?**

Solución

16.- ¿Existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y^2}{x^4y^2+(y-x^2)^2}$ **? Caso afirmativo, calcularlo.**

Solución

17.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. **Se pide:**

a) Dominio de f.
b) Estudiar la continuidad de f.

Solución

18.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+4y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. **Se pide:**

a) Dominio de f.
b) Estudiar la continuidad de f.

Solución

19.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}2+\dfrac{x^2y(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar, si existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
b) ¿Es f continua en (0, 0) para algún valor de k?

Solución

20.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2x(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar, si existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) ¿Es f continua en (0, 0) para algún valor de k?

Solución

21.- Sea $f : R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{2x^2 + 3y^2 - xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **con p>0 y q>0.**

Obtener $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **según los valores de p y q**

Solución

22.- Sea $f : R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^5}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f.**

Solución

23.- Sea $f : R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f.**

Solución

24.- Sea $f : R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^k}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f según los valores de k>0.**

Solución

25.- Sea $f : D \to R$ **la función:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + x^8 + y^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **. Estudiar la continuidad de f en los siguientes casos:**

a) $D = R^2$

b) $D = \{(x,y) \in R^2 / y \geq x^2, x \geq y^2\}$

Solución

1.- Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de ese depósito en función del radio *r* del cilindro y de su altura *h*.

Solución:

El volumen V del depósito depende de los valores que tengan *r* y *h*, y es único para cada par (*r*,*h*) por lo que es una función de *r* y *h*.

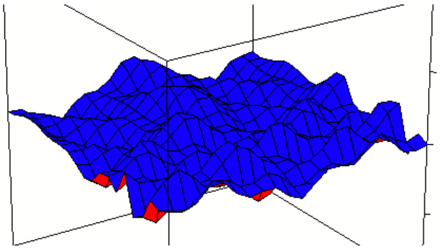
$$V(r,h) = \boxed{\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3}$$

2.- Determinar si las siguientes funciones son acotadas:

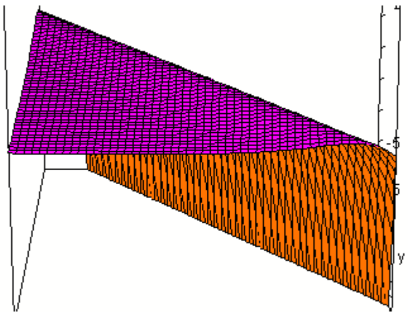
a) $z = \operatorname{sen}^2(x+y)\cos\left(x - e^y\right)$ **b)** $z = \dfrac{x+y}{e^{x+y}}$ **c)** $z = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} + y^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{y^2}$

Solución:

a. $z = \operatorname{sen}^2(x+y)\cos\left(x - e^y\right)$, $-1 \le \operatorname{sen}^2(x+y)\cos\left(x - e^y\right) \le 1$, luego, **es acotada**:

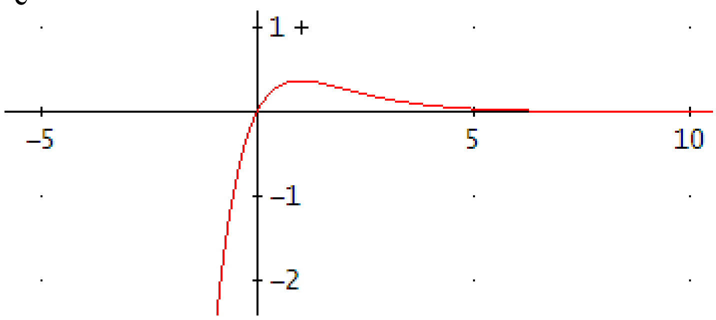


b. $z = \dfrac{x+y}{e^{x+y}}$



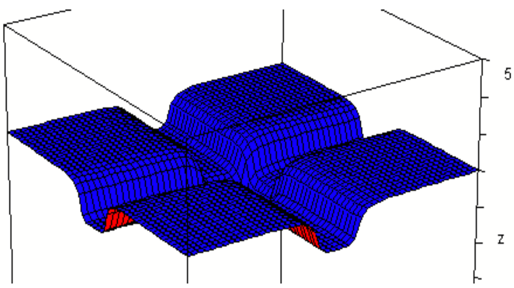
No es acotada pues, por ejemplo, a lo largo del eje OX (y = 0):

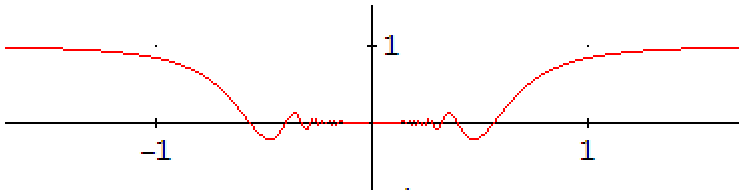
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$



c. $z = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} + y^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{y^2}$

Es acotada, por serlo los dos sumandos:



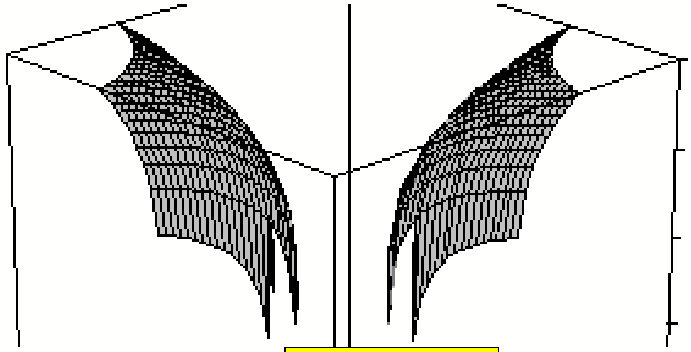


$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} = 1$$

3.- Hallar el dominio y la imagen o recorrido de las funciones: a) f(x, y) = $\ln(xy-6)$ **b) g(x,y) =** $\frac{\sqrt{x^2y^2-9}}{x}$**.c) h(x,y) = arc cos** $\frac{y}{x}$ **d) p(x,y) =** $\frac{x}{x^2+y^2}$ **e) j(x,y) =** $\sqrt{4-x^2-4y^2}$.

Solución:

a) f(x, y) = $\ln(xy-6)$



Dominio: xy-6 > 0 $\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y<\frac{6}{x} & \text{si } x<0 \\ y>\frac{6}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}}$

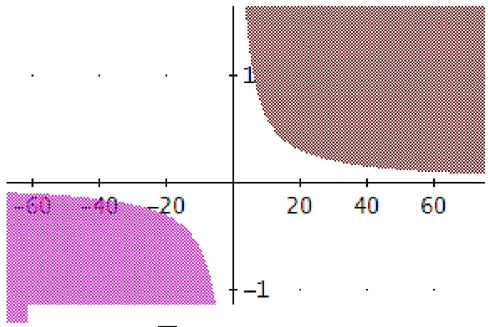
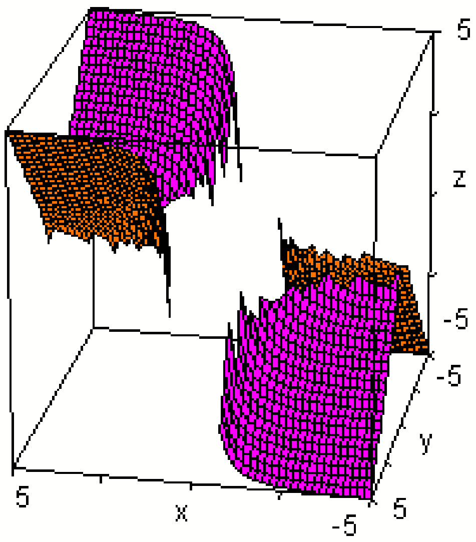


Imagen: $\boxed{\mathbb{R}}$

(al acercarse el punto (x, y) a la hipérbola xy=6, tiende a $-\infty$; cuando x e y crecen, f tiende a ∞)

f

b) g(x,y) = $\frac{\sqrt{x^2y^2-9}}{x}$.

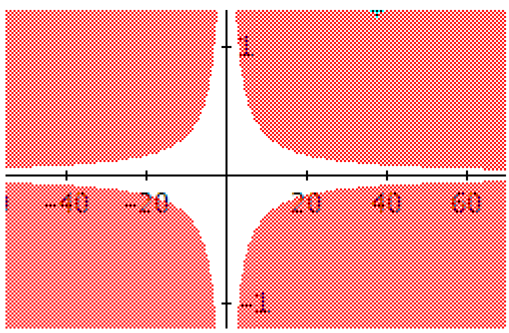


Dominio: $x^2y^2-9\geq 0 \quad \wedge \quad x\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } x>0, & y\leq -\frac{3}{x} \quad \vee \quad y\geq \frac{3}{x} \\ \text{Si } x<0, & y\leq \frac{3}{x} \quad \vee \quad y\geq -\frac{3}{x} \end{cases}}$$

Recorrido: $\boxed{\mathbb{R}}$

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ y=mx}} g(x,y)=\pm\infty$$

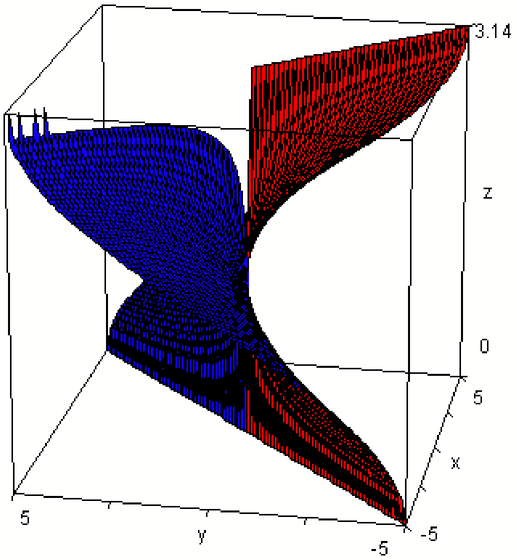


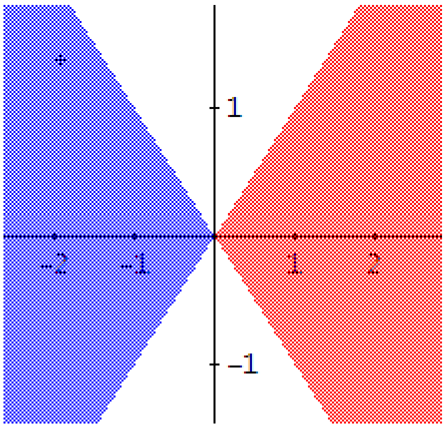
c) $h(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$

Dominio: $x \neq 0 \;\wedge\; -1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 1 \Leftrightarrow$

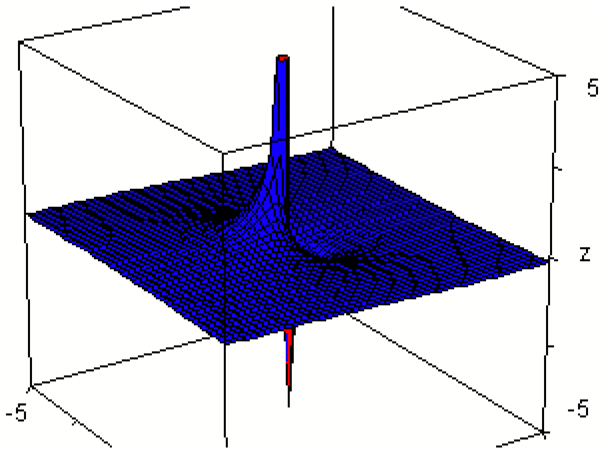
$$\begin{cases} \text{Si } x > 0, & -x \leq y \leq x \\ \text{Si } x < 0, & -x \geq y \geq x \end{cases}$$

Recorrido: **[0, π]**





d) $p(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

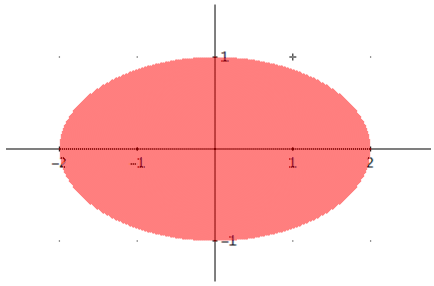


Dominio: $R - \{(0,0)\}$

Recorrido: **R**

$$\lim_{\substack{x \to 0^{\pm} \\ y = x}} p(x,y) = \pm\infty$$

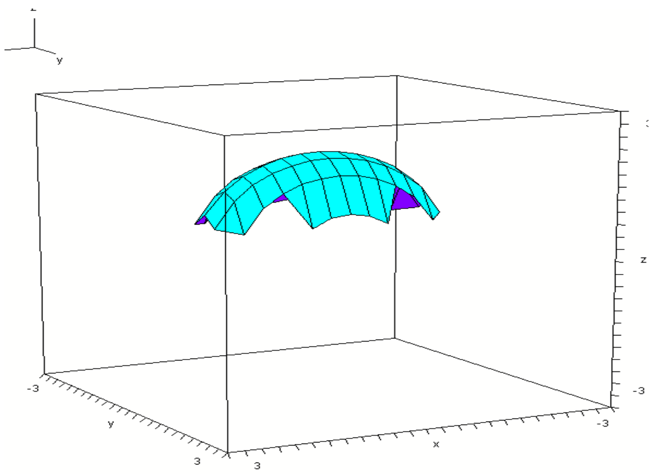
e) j(x,y) = $\sqrt{4-x^2-4y^2}$.



Dominio: $4-x^2-4y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow 4 \geq x^2+4y^2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1}$$

que es una elipse con los puntos de su interior

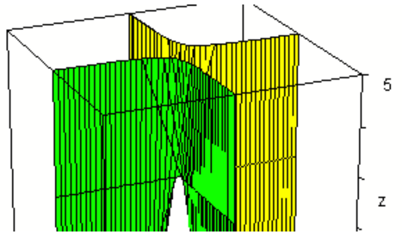


Recorrido: **[0,2]**

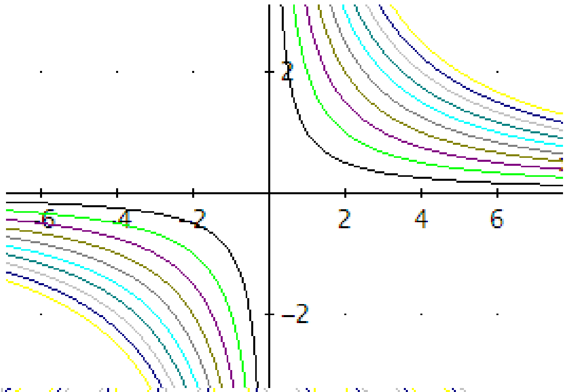
4.- Hallar las curvas de nivel de las funciones:

a) $z = xy$ **b)** $z = \text{sen}(xy)$ **c)** $z = x^2 + y^2$ **d)** $z = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)}$ **e)** $z = 6 - 2x - 3y$

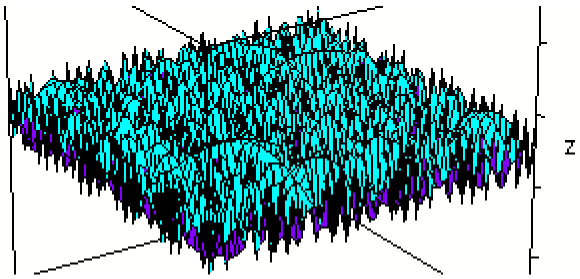
a) $z = xy$

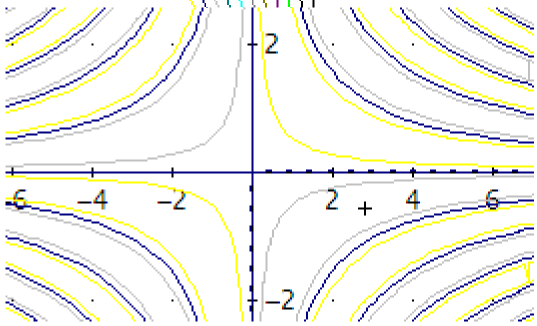


$\boxed{xy = c}$ Son hipérbolas.



En el dibujo: vector (xy = c, c, 1, 10)





b. $z = \text{sen}(xy)$

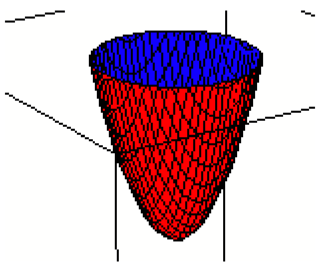
$\text{sen}(xy) = c \in [-1,1] \Rightarrow$ $\boxed{xy = d + 2k\pi}$,

$d = \text{arc sen } c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

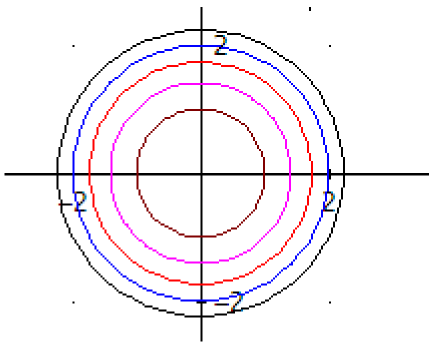
Son hipérbolas.

En el dibujo: vector (sin(xy) = c, c, -1, 1, 0.5).

c. $z = x^2 + y^2$



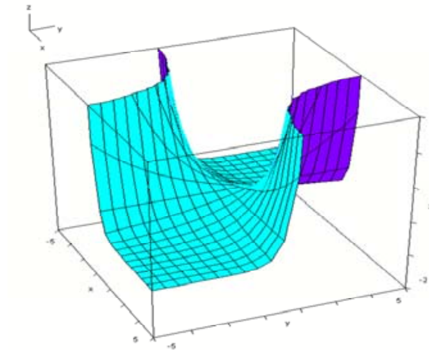
$\boxed{x^2 + y^2 = c}$. Son circunferencias centradas en el origen.

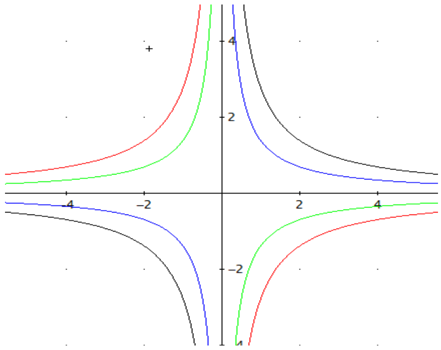


En el dibujo: vector ($x^2 + y^2 = c$, c, 1, 5).

d) $z = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)}$

Las curvas de nivel de esta función son de la forma $c = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)} \Leftrightarrow \boxed{2\ln c = xy}$ que corresponden a hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

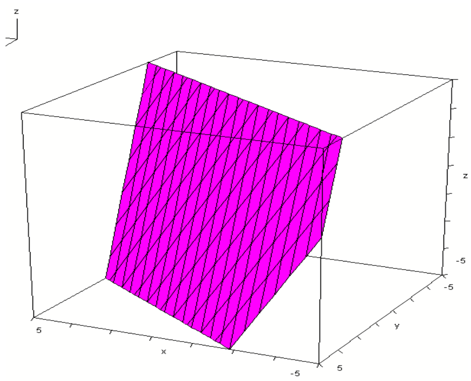


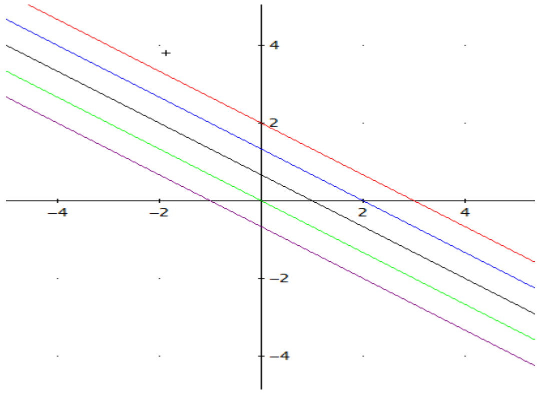


e) $z = 6 - 2x - 3y$

Esta función es un plano inclinado y sus curvas de nivel son las rectas

$c = 6 - 2x - 3y$, donde c = 0, 2, 4, 6, 8





5.- La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x,y) de una placa circular de 10m de radio es:

$$\mathbf{T = 600 - 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2}$$

Donde x e y se miden en metros. Calcular y dibujar algunas curvas isotermas:

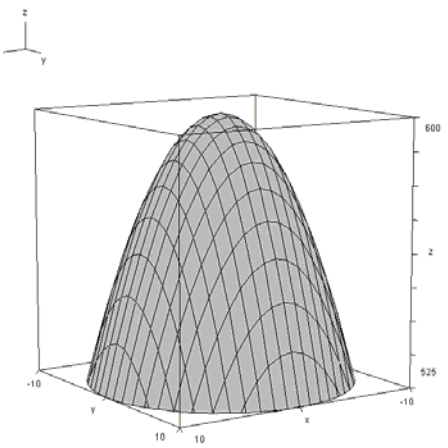
Solución:

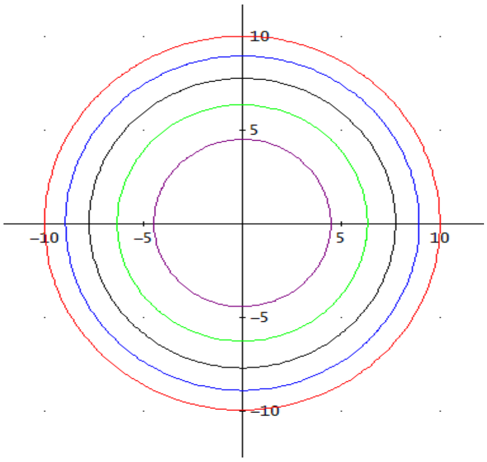
Observemos que las condiciones del problema nos indican que $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$, con $x^2 + y^2 \leq 10^2$, por tanto tenemos que la función temperatura T(x,y) está acotada, por ejemplo, entre T(0,0) =600 y T(10,10) = 450 .

Si queremos precisar más y obtener la temperatura mínima de la placa, hemos de tener en cuenta que T = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2 = 600 - 0.75 (x^2+y^2) y que el valor máximo que puede alcanzar $x^2 + y^2 = 10^2$, luego la temperatura mínima de la placa es T = 600 – 0.75·100 = 525.

Por lo tanto 525 < c < 600 y las curvas isotermas para c = 525, 540, 555, 570, 585, 600, son, respectivamente:

$$\mathbf{0{,}75x^2 - 0{,}75y^2 = 75;\ 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2 = 60;\ 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2 = 45;}$$
$$\mathbf{0{,}75x^2 - 0{,}75y^2 = 30;\ 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2 = 15;\ 0{,}75x^2 - 0{,}75y^2 = 0}$$





6.- Calcular los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ **b.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ **c.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{x+y}$ **e.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ **f.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\operatorname{senx}\ \ln(1+y)}$

Solución:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} = \dfrac{10}{5} = \boxed{2}$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} = \dfrac{0}{0}? = \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (x-y) = \boxed{2}$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$

a lo largo de la recta x = 1: $\lim\limits_{y\to1} \dfrac{1-y^4}{1-y^4} = \lim\limits_{y\to1} 1 = 1$

a lo largo de la recta y = 1: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{x^3-1} = \dfrac{0}{0}? = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{1}{3}$

Luego, **no existe el límite**, pues de existir, sería único y no coinciden los límites radiales.

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{x+y} = \dfrac{0}{0}?$

Límites reiterados:

$\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to0}(-1) = -1$, $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{y}{y} = \lim\limits_{y\to0} 1 = 1$.

Luego, **No existe**.

De hecho los radiales tampoco coinciden (valen $\dfrac{m-1}{m+1}$).

e. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \dfrac{0}{0}?$

a lo largo de la recta y = x: $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\right)^2 = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$

a lo largo de la recta y = -x: $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x^2-(2x)^2}{x^2+(2x)^2}\right)^2 = \lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x^2-(2x)^2}{x^2+(2x)^2}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

Luego, **no existe el límite**, pues de existir, sería único.

f. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\operatorname{senx}\ \ln(1+y)} = \dfrac{0}{0}?$ indeterminación.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\operatorname{senx}\ \ln(1+y)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x\ y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1 = \boxed{1}$,

utilizando las equivalencias de infinitésimos siguientes en 0:

$e^{xy}-1 \approx xy$, $\operatorname{senx} \approx x$, $\ln(1+y) \approx y$.

7.- Estudiar la continuidad de las funciones:

f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **; g(x,y)=** $\begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Solución:

a) f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **;**

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to0}(0)=0$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2}=\frac{0}{1}=0$$

Límite a lo largo de la parábola $x=ay^2$:

$$\lim_{y\to0}\frac{ay^2y^2}{ay^4+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{a}{a^2+1}=\frac{a}{a^2+1},$$ que depende del valor de a.

Luego no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y, por tanto, ***f* no es continua en (0, 0)**.

Si (x, y) ≠ (0, 0), *f* es continua en *(x, y)* por ser compuesta de funciones continuas.

b) g(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} g(x,y)\right)=\lim_{x\to0}(0)=0$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} g(x,y)\right)=\lim_{y\to0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to0\\ y=mx}} g(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{mx^3}{x^2+m^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{1+m^4x^2}=\frac{0}{1}=0$$

Luego de existir el límite, valdría 0. Pasando a polares, se obtiene:

$$\lim_{r\to0} g\left(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\alpha\right)=\lim_{r\to0}\frac{\left(r\cos\alpha\right)^2\left(r\,\mathrm{sen}\alpha\right)}{\left(r\cos\alpha\right)^2+\left(r\,\mathrm{sen}\alpha\right)^4}=0$$

¿Depende de α?

No, ya que $\lim_{r\to0}\dfrac{r\,\mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+r^2\mathrm{sen}^4\alpha}=\lim_{r\to0} g(r)\cdot h(r,\alpha)$, siendo $g(r)=r$ una función que tiende a cero cuando r tiende a cero y $h(r,\alpha)=\dfrac{\mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+r^2\mathrm{sen}^4\alpha}$ una función acotada. En efecto:

$\lim\limits_{r\to 0} g(r) = \lim\limits_{r\to 0} r = 0$ y $|h(r,\alpha)| = |\mathrm{sen}\alpha| \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + r^2\mathrm{sen}^4\alpha} \leq 1\cdot 1 = 1$, ya que el numerador $\cos^2\alpha$ es menor ó igual que el denominador $\cos^2\alpha + r^2\mathrm{sen}^4\alpha$ (pues se diferencian en un sumando positivo).

Por tanto, se verifica que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\, y}{x^2 + y^4} = 0$ y, **g es continua en (0, 0)**.

8.- Dada la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **, se pide:**

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$**.**

b) Estudiar la continuidad de f en todo R^2, según los valores de k.

Solución:

f(x, y) está definida en todo R^2 ya que $2x^2+3y^2-xy>0\ \forall\ (x, y) \neq (0, 0)$. En efecto, pasando a coordenadas polares:

$2x^2+3y^2-xy = (2r^2\cdot\cos^2\alpha+3r^2\cdot\text{sen}^2\alpha-r^2\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha = r^2(2\cos^2\alpha+3\text{sen}^2\alpha-\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha) =$
$r^2[2+\text{sen}^2\alpha-1/2\cdot\text{sen}(2\alpha)] > r^2[2+0-(1/2)] = (3/2)r^2 > 0$
para $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Es fácil probar que los límites radiales son 0.

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{r\cdot\cos\alpha\cdot r^2\cdot\text{sen}^2\alpha}{r^2\left(2+\text{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}\text{sen}(2\alpha)\right)}\right|=r\frac{|\cos\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha|}{\left|2+\text{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}\text{sen}(2\alpha)\right|}<\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}r=g(r)$$

Y $\lim\limits_{r\to 0} g(r)=0$. Luego, por el criterio de la mayorante, $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0}$

b) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, f es continua en (x, y) por ser compuesta por funciones continuas independientemente del valor de k.
En (0,0):
Si $k = f(0, 0) = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ entonces f es continua en (0, 0).

Luego:

Si k = 0, f es continua en todo R^2.
Si k ≠ 0, f es continua en R^2 – {(0, 0)}.

9.- Estudiar la continuidad en (0, 0) de las siguientes funciones:

a. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b. $h(x,y)=\begin{cases}g(x,y)\cdot\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$**, siendo g(x, y) una función continua en (0,0) tal que g (0, 0) =0. Nota: Utilizar que** $|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$**.**

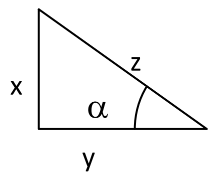
c. $j(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Solución:

a) **f no es continua en (0, 0)** ya que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pues es fácil comprobar que los límites radiales dependen de m (pendiente de la recta por la que nos acerquemos al origen).

b) Como $-\frac{1}{2}\leq f(x,y)\leq\frac{1}{2}$, h(x, y) es el producto de una función acotada por una función que tiende a cero, luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)=0=h(0,0)$, luego, **h es continua en (0, 0)**.

La acotación de arriba se obtiene haciendo:



$$x\cdot y=z\,\text{sen}\alpha\cdot z\cos\alpha=\frac{1}{2}z^2\;2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}z^2\text{sen}(2\alpha)\leq\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow\frac{xy}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}.$$

c. $j(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Es un caso particular del apartado anterior para $g(x,y)=x^2-y^2$.

Luego, **j es continua en (0, 0)**.

10.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **. Se pide:**

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **.**

b) Estudiar la continuidad de f en todo R^2, según los valores de k.

Solución:

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}?$$

Es fácil comprobar que los límites reiterados y los radiales son nulos. Pasando a polares en este último límite, se obtiene:

$$\lim_{r\to0} f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) = \lim_{r\to0}\left[\frac{(r\cos\alpha)^2 (r\operatorname{sen}\alpha)}{r^2}\right] = \lim_{r\to0}\left[r\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right] = \lim_{r\to0}\left[g(r)\cdot h(r,\alpha)\right]$$

siendo, $g(r) = r$ y $h(r,\alpha) = \cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha$ que verifican que $\lim\limits_{r\to0} g(r) = 0$ y que $h(r,\alpha)$ es una función acotada).

Luego $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$.

b)

Si k = 0, f es continua en todo el plano (en el origen por el apartado anterior y en cualquier otro punto por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador). **Si $k \neq 0$, f es continua en $R^2 - \{(0,0)\}$** por el mismo motivo.

11.- Dada la función $z=\dfrac{y^2\left(1+2y\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x}\right)+x^2}{x^2+y^2}$ **. Se pide:**

a) Dominio de la función.
b) Límites reiterados en el punto (0,0).
c) A la vista del resultado anterior ¿existe el límite de f en (0,0)? En caso afirmativo calcularlo.
d) ¿Es continua la función en (0,0)?
e) Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.

Solución:

a) Dom = $\boxed{R^2-\{(0,y)/\,y\in R\}}$, ya que en x = 0 no está definido $\dfrac{1}{x}$; además, el denominador x^2+y^2 no se anula para ningún (x, y) salvo para (0, 0).

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to 0}(\text{No }\exists)=$ $\boxed{\textbf{No existe}}$.

c) No podemos saber si existe límite o no en (0, 0). Sólo sabemos que de existir, vale 1

$$|f(x,y)-1|=\left|\frac{r^2\mathrm{sen}^2\alpha\left[1+2r\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{r\cos\alpha}\right)\right]+r^2\cos^2\alpha}{(r\cos\alpha)^2+(r\,\mathrm{sen}\alpha)^2}-1\right|=$$

$$\left|\frac{r^2\mathrm{sen}^2\alpha+2r^3\mathrm{sen}^3\alpha\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{r\cos\alpha}\right)+r^2\cos^2\alpha-r^2}{r^2}\right|=\left|\mathrm{sen}^2\alpha+2r\,\mathrm{sen}^3\alpha\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{r\cos\alpha}\right)+\cos^2\alpha-1\right|$$

$$\underset{\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}{=}\left|2r\,\mathrm{sen}^3\alpha\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{r\cos\alpha}\right)\right|\underset{|\mathrm{sen}x|\le 1\ \forall x\in R}{\le}2r=g(r),\ \text{con}\ \lim_{r\to 0}g(r)=0.$$

Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$.

d)¿Es continua la función en (0,0)?

$\boxed{\textbf{f es discontinua en (0, 0)}}$ pues $(0,0)\notin \mathrm{Dom}\,f$.

e) Definir f(0,0) para que f sea continua en dicho punto.

Tendría que ser $\boxed{f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1}$.

12.- Para las siguientes funciones, probar que el valor de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ depende del camino elegido para acercarse a (0,0):

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^2y^4 + (x-y^2)^2}$ **b)** $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

Solución:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^2y^4 + (x-y^2)^2}$

Los límites radiales son todos nulos (comprobarlo).

Límite a lo largo de la parábola $x = y^2$: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^4y^4}{y^4y^4+0} = \lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

Los límites radiales son todos nulos (comprobarlo).

Límite a lo largo de la curva $x = y^3$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

¿Existen dichos límites?

No, ya que de existir, los límites a lo largo de todos los caminos deberían coincidir.

13.- Consideremos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$**. Se pide:**

a) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta $y = mx$**.**
b) Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$**.**
c) ¿Existe el límite? Justifica la respuesta.

Solución:

a) Cuando existe, se ha de verificar que **:**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{\substack{y=mx \\ x\to 0}} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1+m^2\right)}{mx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^2}{m} = \frac{1+m^2}{m}.$$

Como vemos el valor del límite depende de la recta que tomemos para acercarnos. Así para m=1, el límite vale 2 pero para m=-1, el límite vale -2.

b) Cuando existe, se ha de verificar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{\substack{y=x^2 \\ x\to 0}} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^2}{xx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} = \infty$$

c) Los resultados anteriores indican que el valor depende del camino de acercamiento al (0,0) y como el límite para existir ha de ser único, la conclusión es que **el límite no existe**.

14.- Demostrar aplicando la definición de límite que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\cos\frac{1}{x}\right)=0$**.**

Solución:

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces $\left|y\cos\frac{1}{x}-0\right| < \varepsilon$.

Si es $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces: $\left|y\cos\frac{1}{x}-0\right| = |y|\,\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le |y|\cdot 1 = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Basta, por tanto, tomar $\delta = \varepsilon$ para que se cumpla la definición.

15.- Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **se pide:**

a) Límites radiales en (0, 0)
b) Límites reiterados en (0, 0)
c) ¿Existe límite en (0, 0)?
d) ¿Existe algún valor de k para el cual la función sea continua en todo R^2?

Solución

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \dfrac{x^3m}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2m}{\sqrt{1+m^2}} = \boxed{0}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(0)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim\limits_{y\to 0}(0)=\boxed{0}$

c) $\left|f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)-0\right| = \left|\dfrac{r^2\cos^2\alpha\, r\operatorname{sen}\alpha}{r}\right| = \left|r^2\cos^2\alpha\, r\operatorname{sen}\alpha\right| \le r^2 = g(r)$, con $\lim\limits_{r\to 0} g(r)=0$,

luego **el límite existe y vale 0**.

d) f es continua en (x, y) $\neq (0,0)$ **para cualquier valor de k**, por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Para k = 0, también es continua en (0, 0) pues será: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=k=f(0,0)$.

16.- ¿Existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 y^2}{x^4 y^2 + (y - x^2)^2}$? Caso afirmativo, calcularlo.

Solución

Los límites radiales son todos nulos (comprobarlo).

Límite a lo largo de la parábola $y = x^2$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 x^4}{x^4 x^4 + 0} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

Luego, **no existe el límite** estudiado ya que depende del camino.

17.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Se pide:**

a) Dom f.
b) Estudiar la continuidad de f.

Solución

a) El dominio de la función es todo $\boxed{\mathbf{R}^2}$

b) En todo (x,y)≠(0,0) la función es cociente de funciones continuas cuyo denominador es distinto de 0. En (0,0) hemos de estudiar si el límite es 1. Pasamos a polares

$$\#13:\quad \frac{\mathrm{SIN}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{\mathrm{SIN}((r\cdot \mathrm{COS}(\alpha))^2+(r\cdot \mathrm{SIN}(\alpha))^2)}{(r\cdot \mathrm{COS}(\alpha))^2+(r\cdot \mathrm{SIN}(\alpha))^2}=\frac{\mathrm{SIN}(r^2)}{r^2}$$

$$\#14:\quad \lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{SIN}(r^2)}{r^2}=1$$

Luego f también **es continua en (0,0)**

18.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+4y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. **Se pide:**

a) Dom f.
b) Estudiar la continuidad de f.

Solución

a) El dominio de la función es todo $\boxed{\mathbf{R}^2}$

b)
Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^4+4m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+4m^2}=\frac{0}{4m^2}=0$$

Límite a lo largo de la parábola y=ax^2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^4+4a^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+4a^2}=\frac{a}{1+4a^2},$$ que depende del valor de *a*.

Luego no existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y, por tanto, **$\boxed{f \text{ no es continua en } (0, 0)}$**.

Si (x, y) ≠ (0, 0), *f* es continua en *(x, y)* por ser compuesta de funciones continuas.

19.- Sea $f(x,y)=\begin{cases} 2+\dfrac{x^2y(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) ¿Es f continua en (0, 0) para algún valor de k?

Solución:

a) Es fácil ver que los límites radiales todos valen 2.

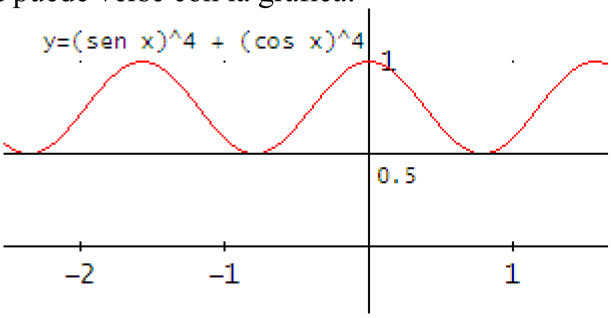
Aplicamos el criterio de la mayorante:

$$\left|f(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\alpha)-2\right| = \left|2+\frac{(r\cos\alpha)^2 r\,\mathrm{sen}\alpha\left((r\,\mathrm{sen}\alpha)^2+(r\cos\alpha)^2\right)}{(r\,\mathrm{sen}\alpha)^4+(r\cos\alpha)^4}-2\right| =$$

$$\left|\frac{r^5\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\alpha}{r^4\left(\mathrm{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}\right| = \left|\frac{r\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\alpha}{\mathrm{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha}\right| \leq \frac{r}{1/2} = 2r = g(r)$$

pues $\left|\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\right| \leq 1$, y $\left|\mathrm{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha\right| \geq \dfrac{1}{2}$.

Esta última desigualdad puede verse con la gráfica:



O bien viendo hallando su valor mínimo con el método habitual (igualando a cero la derivada primera, etc.).

Como $\lim\limits_{r\to o} g(r) = \lim\limits_{r\to o}(2r) = 0$, ya puede asegurarse que $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2}$.

b) f continua en (0, 0) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{2 = k}}$

20.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2x(y^2+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Hallar, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) ¿Es f continua en (0, 0) para algún valor de k?

Solución:

a) Es fácil ver que los límites radiales todos valen 0.

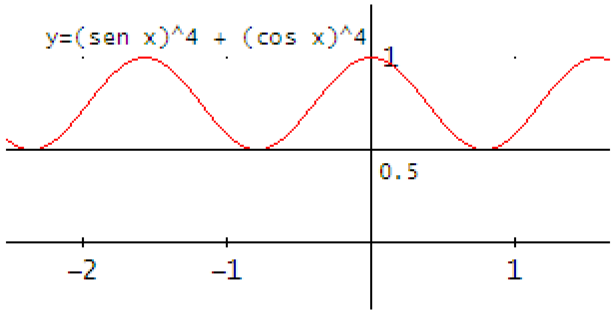
Aplicamos el criterio de la mayorante:

$$|f(r\cos\alpha, r\text{sen}\alpha)-0| = \left|\frac{(r\text{sen}\alpha)^2 r\cos\alpha\left((r\text{sen}\alpha)^2+(r\cos\alpha)^2\right)}{(r\text{sen}\alpha)^4+(r\cos\alpha)^4}\right| =$$

$$\left|\frac{r^5\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{r^4(\text{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha)}\right| = \left|\frac{r\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha}\right| \le \frac{r}{1/2} = 2r = g(r)$$

pues $|\text{sen}^2\alpha\cos\alpha| \le 1$, y $|\text{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha| \ge \frac{1}{2}$.

Esta última desigualdad puede verse con la gráfica:



O bien viendo hallando su valor mínimo con el método habitual (igualando a cero la derivada primera, etc.).

Como $\lim\limits_{r\to o} g(r) = \lim\limits_{r\to o}(2r) = 0$, ya puede asegurarse que $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0}$.

b) f continua en (0, 0) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{0 = k}}$

21.- Sea $f: R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^p y^q}{2x^2+3y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **con p>0 y q>0.**

Obtener $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **según los valores de p y q**

Solución:

f(x, y) está definida en todo R^2 ya que $2x^2+3y^2-xy>0$ $\forall$ (x, y) $\neq$ (0, 0).

En efecto, pasando a coordenadas polares:

$2x^2+3y^2-xy = (2r^2\cdot\cos^2\alpha + 3r^2\cdot\text{sen}^2\alpha - r^2\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha = r^2(2\cos^2\alpha + 3\text{sen}^2\alpha - \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha) =$
$r^2[2+\text{sen}^2\alpha - 1/2\cdot\text{sen}(2\alpha)] > r^2[2+0-(1/2)] = (3/2)r^2 > 0$ para (x, y) $\neq$ (0, 0).

Ahora, expresando f(x,y) en coordenadas polares:

$$f(x,y)=\frac{(r\cdot\cos\alpha)^p\cdot(r\cdot\text{sen}\alpha)^q}{r^2\left(2+\text{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}\text{sen}(2\alpha)\right)}=r^{p+q-2}\frac{\cos^p\alpha\cdot\text{sen}^q\alpha}{2+\text{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}\text{sen}(2\alpha)}$$

Primer caso:

Si p+q<2 se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, pues $(x,y)\to(0,0)\Rightarrow r^{p+q-2}\to\infty$

Segundo caso:

Si p+q=2 se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, pues depende α

Tercer caso:

Si p+q>2

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to0}(0)=0$$
$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to0}(0)=0$$

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{(r\cdot\cos\alpha)^p\cdot(r\cdot\text{sen}\alpha)^q}{r^2\left(2+\text{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}\text{sen}(2\alpha)\right)}\right|=r^{p+q-2}\left|\frac{\cos^p\alpha\cdot\text{sen}^q\alpha}{2+\text{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}\text{sen}(2\alpha)}\right|<r^{p+q-2}\frac{1}{3/2}=r^{p+q-2}\frac{2}{3}=g(r)$$

Y $\lim\limits_{r\to0} g(r)=0$ Luego, por el criterio de la mayorante, $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0}$

22.- Sea $f: R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f.**

Solución:

La función es cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero para $(x,y)\neq(0,0)$

Veamos en particular para (x,y)=(0,0) el límite:

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to0}(0)=0$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to0 \\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^3+m^5x^5}{x^2+m^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x+m^5x^3}{(1+m^4x^2)}=\frac{0}{1}=0$$

Límite a lo largo de la parábola $y=ax^2$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+a^5x^{10}}{x^2+a^4x^8}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+a^5x^7)}{1+a^4x^6}=\frac{0}{1}=0,$$

Veamos con el criterio de la mayorante

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right|=\frac{|x^3+y^5|}{x^2+y^4}\le\frac{|x^3|+|y^5|}{x^2+y^4}=\frac{|x^3|}{x^2+y^4}+\frac{|y^5|}{x^2+y^4}\le\frac{|x^3|}{x^2}+\frac{|y^5|}{y^4}=|x|+|y|$$

Que cumple $|x|+|y|\to0$ cuando (x,y) →(0,0) resulta f(x,y) →(0,0)

La función es continua en (0,0) y por lo tanto en todo R^2.

23.- Sea $f:R^2 \to R$ **la función:** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f.**

Solución:

La función es cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero para $(x,y)\neq(0,0)$

Veamos en particular para (x,y)=(0,0) el límite:

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^5}{x^2+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^3}{(1+m^4x^2)}=\frac{0}{1}=0$$

Límite a lo largo de la parábola y=ax^2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^5}{x^2+a^4x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3}{1+a^4x^6}=\frac{0}{1}=0,$$

Sin embargo,

Límite a lo largo de la parábola x=ay^2:

$$\lim_{y\to 0}\frac{ay^4}{a^2y^4+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{a^4+1}=\frac{a}{a^4+1},$$

El último límite depende de a luego no existe el límite cuando (x,y) →(0,0).

En consecuencia f no es continua en (0,0)

24.- Sea $f: R^2 \to R$ la función: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(xy)^k}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **Estudiar la continuidad de f según los valores de k>0.**

Solución:

La función es cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero para $(x,y) \neq (0,0)$

Veamos en particular para (x,y)=(0,0) el límite:

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$$

Primer caso:

Si 0<k<2 se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, pues no es finito

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2k}}{2x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^{2k-4}=\infty$$

En consecuencia f no es continua en (0,0)

Segundo caso:

Si k=2 se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, pues depende m

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2}{1+m^4}=\frac{m^2}{1+m^4}$$

En consecuencia f no es continua en (0,0)

Tercer caso:

Si k>2

Ahora, expresando f(x,y) en coordenadas polares:

$$f(x,y)=\frac{(r\cdot\cos\alpha r\cdot\text{sen}\alpha)^k}{r^4(\cos^4\alpha+\text{sen}^4\alpha)}=r^{2(k-2)}\frac{\cos^k\alpha\cdot\text{sen}^k\alpha}{\cos^4\alpha+\text{sen}^4\alpha}$$

$$\left|f(x,y)-0\right| = r^{2(k-2)}\left|\frac{\cos^k\alpha\cdot\operatorname{sen}^k\alpha}{\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha}\right| < r^{2(k-2)}\frac{1}{1/2} = 2r^{2(k-2)} = g(r)$$

Y $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$ Luego, por el criterio de la mayorante, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

En consecuencia f es continua en (0,0) y por lo tanto en todo R^2 cuando sea k>2

Nota:

La función $G(\alpha) = \cos^4\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha$ tiene un mínimo absoluto para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

25.- Sea $f: D \to R$ la función: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **. Estudiar la continuidad de f en los siguientes casos:**

a) $D = R^2$

b) $D=\left\{(x,y)\in R^2 / y\geq x^2, x\geq y^2\right\}$

Solución:

a)

Obviamente f es continua por ser cociente de funciones continuas en todo punto distinto de (0,0). Analizamos las función f en (x,y)=(0,0)

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}(0)=0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{m^2x^4+x^8+m^8x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2}{m^2+x^4(1+m^8)}=1$$

La función no tiene límite cuando (x,y) →(0,0).

En consecuencia f no es continua en (0,0)

b)

Sin embargo en el nuevo dominio existe el límite y vale 1:

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8}-1\right|=\left|\frac{-x^8-y^8}{x^2y^2+x^8+y^8}\right|=\frac{x^8}{x^2y^2+x^8+y^8}+\frac{y^8}{x^2y^2+x^8+y^8}\leq\frac{x^8}{x^2y^2+x^8}+\frac{y^8}{x^2y^2+y^8}=$$
$$=\frac{x^6}{y^2+x^6}+\frac{y^6}{x^2+y^6}\underset{\substack{y\geq x^2\\ x\geq y^2}}{\leq}\frac{x^6}{x^4+x^6}+\frac{y^6}{y^4+y^6}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}\to 0$$

Resulta que f es continua en (0,0) y por lo tanto en todo $D=\left\{(x,y)\in R^2 / y\geq x^2, x\geq y^2\right\}$

Dominio de definición o campo de existencia.

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analítica de la función.

$$D = \left\{ \vec{x} \in R^n \text{ tales que, existe } \vec{y} = f\left(\vec{x}\right) \right\}$$

Función acotada

Una función $f : D \to R$ está **acotada,** si existe un número real positivo k, tal que $\left| f(\vec{x}) \right| \leq k$ para todo $\vec{x}$ en D.

Concepto de límite

Sean z=f(x,y) una función real de dos variables reales cuyo dominio es un subconjunto $D\subset\mathbf{R}^2$, L un número real y (x_o,y_o) un punto de acumulación del dominio D.

Diremos que el ***límite de la función z=f(x,y) cuando (x,y) tiende a (x_o,y_o) es el número L*** y escribiremos $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L$ si y solo si:

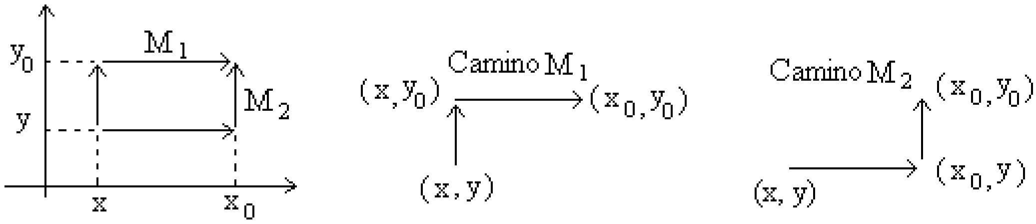
Para cualquier número **ε>0**, existe un número **δ>0** tal que ***para todos los puntos*** **(x,y)∈D**, siendo $(x,y)\neq(x_o,y_o)$, ***que verifiquen que*** **$d((x,y),(x_o,y_o))<\delta$** ***entonces sus imágenes verifican que*** **d(f(x,y),L)< ε.** Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{tal que, todo } (x,y)\neq(x_o,y_o) \text{ con}$$

$$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon .$$

Límites reiterados

Dos caminos usuales para especular sobre el valor del límite de una función z=f(x,y) en un punto (x_o,y_o), son los dos caminos determinados por dos lados del rectángulo de la figura :



Estos dos caminos proporcionan los siguientes límites que se denominan ***límites reiterados***:

$$\boxed{\lim_{x\to x_o} \lim_{y\to y_o} f(x,y) = L_1 \quad y \quad \lim_{y\to y_o} \lim_{x\to x_o} f(x,y) = L_2}$$

Continuidad en un punto

Una función z=f(x,y) es ***continua en un punto*** (x_o,y_o) si y solo si verifica las tres condiciones siguientes:

1. Existe $f(x_o,y_o)$, es decir (x_o,y_o) es un punto del dominio de la función.
2. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L$, siendo L un número real finito.
3. $L=f(x_o,y_o)$.

Imagen de una función f

Sea $f: R^2 \to R$ una función, **Imagen** de f es:

$$\operatorname{Im}(f) = f\left(R^2\right) = \left\{\vec{y} \in R^2 \,/\, \exists \vec{x} \in V, f\left(\vec{x}\right) = \vec{y}\right\} \subset R \,.$$

Curva de nivel

Dada la función $z=f(x,y)$ y una constante c. Una curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales $f(x,y)=c$.

Isoterma

Curva de nivel correspondiente a la misma temperatura en un mapa cartográfico.