ECUACIONES DIFERENCIALES

Definiciones: Se llama **ecuación diferencial** a toda ecuación que incluya una función, que es la incógnita, y alguna de sus derivadas o diferenciales.

♦Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su:

- ***TIPO:***

Ordinarias si la función incógnita es de una sola variable independiente.

Ejemplo: y''+y'+x = cosx, siendo y=f(x).

Derivadas parciales si la función incógnita depende de dos o más variables independientes.

Ejemplo: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, *siendo z=f(x,y).*

- **ORDEN**:

El de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

*Ejemplo: y''+y'+x = cosx, siendo y=f(x), se trata de una ecuación diferencial de **segundo** orden; ya que aparece y''.*

♦Se llama **solución** de una ecuación diferencial a toda función f que junto con sus derivadas satisfaga la ecuación diferencial.

Estudiaremos las ***ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.***

Introducción.

Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es una ecuación de la forma **F(x,y,y')=0** (1).

A veces la ecuación anterior se puede expresar en la forma **y'=G(x,y)** (2), diremos que la ecuación diferencial viene expresada en forma **normal.**

- Decimos que una función derivable y=f(x) es solución de (2) en un intervalo I si la función f y su derivada f ' satisface la relación f '(x)=G(x,f(x)) para cada $x\in I$. El caso más sencillo se presenta cuando G(x,y)=Q(x), entonces y'=Q(x) $\Rightarrow \boxed{y=\int Q(x)dx+C}$.
- Obsérvese que para cada valor de C se obtiene una función cuya representación gráfica es una curva plana. El conjunto de todas las funciones que son solución de la ecuación constituye una **familia o haz de curvas planas**.

Cada una de estas curvas planas se denomina **integral o solución particular** de la ecuación, pues queda determinada por un punto cualquiera (x_o,y_o) tal que $y'_o=G(x_o,y_o)$. El par (x_o,y_o) recibe el nombre de **condición inicial** .

El haz o familia de curvas (que podemos expresar como $y=f(x,C)$, $C\in\mathbf{R}$) es la **solución o integral general** de la ecuación.

- En general se demuestra que para toda ecuación diferencial $y'=G(x,y)$ definida en un recinto D del plano $\mathbf{R}^2$ y para todo $(x_o,y_o)\in D$, tal que:
  1. $G(x,y)$ es continua, como función de dos variables, en D.
  2. $G(x,y)$ admite G'_y continua, respecto de x e y, en D.

  existe una, y sólo una, solución $y=f(x)$ de la ecuación dada que satisface la condición inicial (x_o,y_o). Geométricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el punto (x_o,y_o) del plano.

Estudiaremos seguidamente las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

1.- De variables separadas y separables.

2.- Homogéneas.

3.- Lineales.

4.- Diferenciales exactas

1. Ecuaciones con variables separadas y ecuaciones reducibles a ellas.

- Toda ecuación de la forma **f(y)dy=g(x)dx** se llama ecuación de **variables separadas**. La solución general es de la forma $\boxed{\int f(y)dy-\int g(x)dx=C}$
- Las ecuaciones de la forma **f(y)h(x)dy=g(x)m(y)dx** donde los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores que dependen solo de x, o solo de y, se llaman ecuaciones con **variables separables**.

Dividiendo por $h(x)m(y)$ la anterior ecuación, se obtiene una de variables separadas:

$$\frac{f(y)}{m(y)}dy=\frac{g(x)}{h(x)}dx \;\Rightarrow\; \boxed{\int\frac{f(y)}{m(y)}dy=\int\frac{g(x)}{h(x)}dx}$$

Observación. La división por $h(x)m(y)$ puede dar lugar a que se pierdan las soluciones particulares que anulan el producto $h(x)\,m(y)$.

Ejercicio. Resolver la ecuación diferencial $3e^x \operatorname{tg}y\,dx+(2-e^x)\sec^2 y\,dy=0$.

Solución: $\boxed{\dfrac{\operatorname{tg} y}{\left(2-e^x\right)^3}=C}$

2. Ecuaciones homogéneas y reducibles a ellas.

- Toda ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma $\mathbf{\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ se dice que es **homogénea**. También puede venir dada en la forma **P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0** siendo P(x,y), Q(x,y) funciones homogéneas del mismo grado.

  Nota: Una función f(x,y) es **homogénea de grado** n si se verifica que $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

  Las ecuaciones homogéneas se reducen a una ecuación de variables separables haciendo $\dfrac{y}{x}=u$,

$$\Rightarrow y=xu \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

- Las ecuaciones de la forma $\mathbf{\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)}$ se reducen a homogéneas trasladando el origen de coordenadas al punto (x_0,y_0) intersección de las rectas $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1\\ a_2x+b_2y+c_2\end{cases}$, mediante la traslación $\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+y_0\end{cases}$.

  Si las rectas son paralelas, entonces $a_1x+b_1y=\lambda(a_2x+b_2y)$ para algún $\lambda\in R$ y, si hacemos el cambio $a_2x+b_2y=u$, la ecuación queda $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du-a_2dx}{b_2dx}=F\left(\dfrac{\lambda u+c_1}{u+c_2}\right)$ que es de variables separadas.

Ejercicios. Resolver las ecuaciones:

a) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$. *Solución*: $\boxed{\arcsin\dfrac{y}{x}=\ln Cx}$

b) (x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0. *Solución*: $\boxed{x^2+2xy-y^2-4x+8y=C}$

3. Ecuaciones lineales de primer orden. Ecuaciones de Bernoulli.

- Se llama ecuación diferencial **lineal de primer orden** a la que es lineal respecto de la función incógnita y su derivada. Es de la forma:

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)}$$

1. Si q(x)=0 la ecuación se denomina **lineal homogénea** y es de variables separables; entonces:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow \boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

2. Si q(x)≠0 la ecuación se denomina **lineal no homogénea** y su solución se calcula:

i) O bien, a partir de la solución de la homogénea utilizando el llamado método de variación de la constante, según el cual se busca una solución de la forma $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ que verifique la ecuación dada.

ii) O bien, haciendo y=u(x)v(x) en la ecuación dada obteniéndose:

$$u'v+uv'+puv=q(x) \Leftrightarrow u'v+(v'+pv)u=q(x)$$

Resolviendo v'+pv=0 (variables separadas) se halla v=v(x), a continuación, se calcula u(x).

Ejercicios. Resolver las ecuaciones diferenciales:

a) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ *Solución*: $\boxed{y = (x^2 + c)e^{-x^2}}$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \operatorname{sen}2y}$

Esta ecuación es lineal si consideramos x función de y (x=g(y)), entonces:

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \operatorname{sen}2y \Rightarrow \frac{dx}{dy} - x\cos y = \operatorname{sen}2y$$ *Solución*: $\boxed{x = ce^{\operatorname{sen} y} - 2\operatorname{sen} y - 2}$

- Se llama **ecuación de Bernouilli** a toda ecuación de la forma $\mathbf{\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n}$ donde n≠0 y n≠1, ya que en dichos casos sería lineal. La ecuación se reduce a una lineal haciendo la sustitución $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$.

◊ Sin embargo, resulta más conveniente resolver la ecuación de Bernouilli utilizando la sustitución y=u(x)v(x) (sin reducirla previamente a lineal) tal y como se explica en el apartado **ii)** anterior.

Ejercicio: Resolver la ecuación $xy'+y=y^2\ln x$ *Solución*: $\boxed{y = \dfrac{1}{1 + cx + \ln x}}$

4. Ecuaciones diferenciales exactas. Factor integrante.

La ecuación **M(x,y)dx+N(x,y)dy=0** (1) se llama **ecuación diferencial exacta o ecuación en diferenciales totales** si M(x,y) y N(x,y) son funciones continuas y derivables que verifican:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} \text{ siendo } \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \text{continuas en un cierto dominio.}$$

Estas hipótesis lo que suponen es que (1) *es la diferencial total de una cierta función U(x,y)=0 que sería solución de la ecuación.*

Cálculo de U(x,y): Como $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, entonces ha de verificarse que

$$\begin{cases} M = \dfrac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow U = \int M dx + \varphi(y) \\ N = \dfrac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) + \varphi'(y) \end{cases}, \text{ luego } \varphi'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) \Rightarrow$$

$\varphi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) \right] dy$, y por lo tanto:

$$\boxed{U(x,y) = \int M dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) \right] dy + C}$$

Factor integrante.

Supongamos que el primer miembro de la ecuación (1) no es una diferencial total. A veces se puede elegir una función μ(x,y) tal que al multiplicar (1) por μ(x,y) proporciona una ecuación diferencial exacta.

La función μ(x,y) se denomina **factor integrante de la ecuación** (1).

Para hallar un factor integrante μ=μ(x,y) se procede de la forma siguiente:

- Multiplicamos la ecuación (1) por **μ:** μMdx+μNdy=0.
- Si esta nueva ecuación es diferencial exacta entonces:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

- Dividiendo por μ:

$$\boxed{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}=N\frac{\partial\mu/\partial x}{\mu}-M\frac{\partial\mu/\partial y}{\mu}=\boxed{N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}}\ (2).$$

Toda función $\mu(x,y)$ que satisfaga (2) es un factor integrante de la ecuación (1).

La ecuación (2) es una ecuación en derivadas parciales siendo μ una función desconocida que depende de x e y.

Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, (2) posee infinidad de soluciones y que, por tanto, pueden encontrarse factores integrantes para la ecuación (1) Pero, en el caso general el problema de resolver la ecuación (2) para calcular μ es más difícil que integrar la propia ecuación (1) dada. Sólo en algunos casos particulares se logra determinar, con cierta facilidad, la función $\mu(x,y)$. Por ejemplo, cuando:

- La ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ admite un factor integrante que depende sólo de x, es decir $\mu=\mu(x)$, entonces $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$, luego $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}}$$ (El segundo miembro es una expresión que no depende de y).

- La ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ admite un factor integrante que depende sólo de y, es decir $\mu=\mu(y)$. Procediendo de manera análoga, se tiene que $\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$; luego, $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}}$$ (el segundo miembro es una expresión que no depende de x).

Ejercicios. Resolver las ecuaciones diferenciales:

a) $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$ *Solución*: $\boxed{x^4+2x^2y^2+y^4=C}$

b) $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$ $(\mu=\mu(x))$ *Solución*: $\boxed{x=Ce^{\frac{y^2}{x}}}$

c) $2xy\ln y\,dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$ $(\mu=\mu(y))$ *Solución*: $\boxed{x^2\ln y+\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}=C}$