ETSI de Topografía, Geodesia y Cartografía

Prueba de Evaluación Progresiva Grupo 2 13-abril-2022

MATRICES Y ESPACIO VECTORIAL

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Demostrar que las coordenadas de un vector respecto de una base B son <u>únicas</u>

(1 punto)

2.- Sean B y (B-I) matrices de orden cuatro *inversibles*. Resolver el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} BX + Y = 2B \\ B^3X + BY = 0 \end{cases}$$

(1 punto)

3.- Sean los subespacios vectoriales:

$E = \{ x=\lambda , y=\mu, z=\lambda +\mu ; \lambda ,\mu \in R\}$

$F = \{(x,y,z) \in R^3 / x - y + 2z = 0\}$

Se pide:

a) ***Dimensión de E y F, Bases* de E , F, E+F y $E \cap F$.**

***b)Ecuaciones implícitas y paramétricas* de $E \cap F$.**

(3 puntos)

4.- Comprobar que B= {(1,2,1), (1,1,0), (3,1,1)} y B'= {(1,3,1), (0,1,1), (2,1,0)} son bases de R^3 y calcular las ecuaciones matriciales de los *cambios de base siguientes:*

a) **de la base B a la *base canónica* Bc**
b) **de la base B' a Bc**
c) **de la base B a B'**
d) **de la base B' a B.**
e) **¿Existe algún vector con las mismas coordenadas en ambas bases?**
f) **Calcular las coordenadas del vector (1,1,1) dado en la base B, en la base B'**
g) **¿Cuál son las coordenadas de (2,1,0) en la base B'?**

(3 puntos)

2.-Solución:

$$\begin{cases} BX+Y=2B \Rightarrow Y=2B-BX & [1] \\ B^3X+BY=0 \underset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} B^2X+Y=0 & [2] \end{cases},$$ sustituyendo [1] en [2] se obtiene

$$B^3X+B(2B-BX)=0 \underset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} B^2X+2B-BX=0 \underset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} BX+2I-X=0 \Rightarrow (B-I)X=-2I \underset{\exists (B-I)^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{X=-2(B-I)^{-1}}$$

Sustituimos este resultado en la ecuación [1] y obtenemos

$$\boxed{Y=2B\left(I+(B-I)^{-1}\right)}$$

3.- Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=\lambda+\mu \end{array}} \right.$$ ecuaciones paramétricas de E. dimE=2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = -x-y+z=0$$ ecuación implícita, o bien $\boxed{\mathbf{x+y-z=0}}$.

dim E=2; **B_E={(1,0,1),(0,1,1)}** base de E.

Para F:

$\boxed{\mathbf{x-y+2z=0}}$ tenemos una ecuación cartesiana o implícita y dim (F)=2. Despejando x=y-2z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x=\lambda-2\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{array}} \right.$$ ecuaciones paramétricas de F.

dim F=2; **B_F={(1,1,0),(-2,0,1)}** base de F.

b) Ecuaciones implícitas o cartesianas de $E \cap F$**:**

Intersección E ∩ F

Para sacar las ecuaciones implícitas basta unir las de E y F

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right\}}$$ que, como se ve son independientes y forman las ecuaciones de E ∩ F

luego dim (E ∩ F) = dim (R^3) – nº ecuaciones = 3-2 = 1

Resolviendo el sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{B}_{E\cap F}=\{(1,-3,-2)\}}$ base de $E\cap F$, es cualquier solución particular del sistema.

dim (E+F) = dim E+ dim F - dim $E\cap F$ =2+2-1=3

E+F=R^3. La base canónica $\boxed{\mathbf{B_c=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}}}$ **es una base de E+F**.

4.-Solución

Solución:

B= {(1,2,1), (1,1,0), (3,1,1)} y B'= {(1,3,1), (0,1,1), (2,1,0)} son bases de $\mathbf{R^3}$ porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

a) Ecuación de **cambio de la base** B a la base canónica B_C $\boxed{\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$

b) Ecuación de **cambio de la base** B' a la base canónica B_C $\boxed{\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$

Luego $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Operando, tenemos que

c) Ecuación de **cambio de la base** B a B' $\equiv$ $\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$

Si llamamos P a la matriz del cambio de la base B a B'. La matriz P^{-1} será la correspondiente al cambio de la base B' a B

d) Ecuación de **cambio de la base** B' a B $\equiv$ $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$

e) Para obtener los vectores con las mismas coordenadas en ambas bases resolvemos:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

No hay vectores que lo verifiquen

f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$ **(-1/3, 7/3, 8/3)**

g) **(0,0,1)** es el tercer vector de la propia base.

MATRICES, SISTEMAS y ESPACIO VECTORIAL

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Demostrar que la expresión de cualquier vector de V respecto a una base de V es única.

(1 punto)

2.- Despejar X, simplificando lo más posible, en la siguiente ecuación matricial sabiendo que A y B son matrices cuadradas del mismo orden y que A es ortogonal:

$$(A^{-1} X^t)^t + (5A^t B)^{-1} = (A^{-1} B)^{-1}$$

(1 punto)

3.- En R^3 se consideran los subconjuntos:

$$F = \left\{(x, y, z) \in R^3 \text{ que cumplen las dos condiciones: } x - 3y + 2z = 0, \quad y - z = 0\right\}$$

$G = \langle (1,-1,0),(0,2,1),(1,1,1) \rangle$ **. Se pide:**

a) **Hallar unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión de F, G, $F \cap G$ y $F + G$.**

b) **¿Son F y G subespacios suplementarios?**

c) **Hallar un subespacio suplementario de F.**

(3 puntos)

4.- En el espacio vectorial R^3, se consideran las bases:

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ **y** $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$**, tales que,** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **es la matriz del cambio de base de B' a B. Se pide:**

a) La expresión analítica del vector $\vec{u}'$ respecto de la base B.

b) Si $\vec{a} =$ (1, 1, 1) respecto de B', hallar las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de B.

c) Si x+y+z=0 respecto de B, ¿cuál es su expresión respecto de B'.

(2,5 puntos)

5.- Hallar todos los cuadrados mágicos de 3x3 cuya suma sea cero. Cuando la suma de todos los elementos por filas, columnas y diagonales da cero se plantea un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. ¿Cuál es la dimensión del subespacio vectorial obtenido?

(0,5 puntos)

Fecha de **publicación de calificaciones: viernes, 21 de abril.**
Revisión de la prueba**: viernes, 28 de abril previa petición al correo: luis.sebastian@upm.es**

1.- Demostrar que la expresión de cualquier vector de V respecto a una base de V es única.

Demostración:

Sea $B=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ una base del espacio vectorial V. Por ser B base es libre y sistema generador, por tanto, $\forall\vec{v}\in V$ existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ tales que $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_n\vec{e}_n$. Ahora si los escalares $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, no son únicos existirán otros $\mu_1,\dots,\mu_n\in K$ tales que $\vec{v}=\mu_1\vec{e}_1+\dots+\mu_n\vec{e}_n$ restando las dos expresiones del vector $\vec{v}$ queda $\vec{v}-\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_n\vec{e}_n-\mu_1\vec{e}_1-\dots-\mu_n\vec{e}_n$ $\vec{0}=(\lambda_1-\mu_1)\vec{e}_1+\dots+(\lambda_n-\mu_n)\vec{e}_n$. Utilizando que los vectores de B son linealmente independientes resulta: $0=\lambda_1-\mu_1=\dots=\lambda_n-\mu_n\Rightarrow\lambda_1=\mu_1;\dots;\lambda_n=\mu_n$.

2.- Despejar X, simplificando lo más posible, en la siguiente ecuación matricial sabiendo que A y B son matrices cuadradas del mismo orden y que A es ortogonal:

$$\mathbf{(A^{-1}X^t)^t+(5A^tB)^{-1}=(A^{-1}B)^{-1}}$$

Solución:

Como A es ortogonal, se verifica que $A^{-1}=A^t$

$$(A^{-1}X^t)^t+(5A^tB)^{-1}=(A^{-1}B)^{-1}\Leftrightarrow(A^tX^t)^t+(5A^{-1}B)^{-1}=(A^{-1}B)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow XA+1/5\,B^{-1}A=B^{-1}A\Leftrightarrow XA=4/5\,B^{-1}A\Leftrightarrow X=(4/5\,B^{-1}A)A^{-1}\Leftrightarrow X=4/5\,B^{-1}$$

3.- En R^3 se consideran los subconjuntos:

$F=\left\{(x,y,z)\in R^3 \text{ que cumplen las dos condiciones: } x-3y+2z=0,\quad y-z=0\right\}$

$G=\langle(1,-1,0),(0,2,1),(1,1,1)\rangle$ **. Se pide:**

a) Hallar unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión de F, G, $F\cap G$ y $F+G$.

b) ¿Son F y G subespacios suplementarios?

c) Hallar un subespacio suplementario de F.

Solución:

a) Las ecuaciones cartesianas o implícitas de F son $\begin{cases}x-3y+2z=0\\ y-z=0\end{cases}$.

Resolviendo estas ecuaciones obtendremos unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases}x-3y+2z=0\\ y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha\quad\alpha\in R\\ z=\alpha\end{cases}$$

Por tanto, $(x,y,z)\in F\Leftrightarrow(x,y,z)=(\alpha,\alpha,\alpha)=\alpha(1,1,1)$.

Luego, una base de F es $B_F=\{(1,1,1)\}$ y dim F = 1, pues es un vector libre además de generador de F.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, los tres vectores que generan G son linealmente dependientes. Eliminamos uno de ellos y nos quedamos con dos linealmente independientes. De esta forma, una base de G es $B_G=\{(1,-1,0), (0,2,1)\}$ y dim G = 2.

$(x,y,z) \in G \Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda(1,-1,0) + \mu(0,2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2\mu \quad \lambda, \mu \in R \\ z = \mu \end{cases}$, que son unas ecuaciones paramétricas de G.

$(x,y,z) \in G \Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda(1,-1,0) + \mu(0,2,1) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & -1 & 2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x - y + 2z = 0$ que es la ecuación implícita o cartesiana de G.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de F y de G, se obtienen unas ecuaciones implícitas de $F \cap G$: $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

Resolvamos este sistema para obtener unas ecuaciones paramétricas de $F \cap G$.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 2z = z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 2z = z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \quad \lambda \in R. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Por tanto, $F \cap G = F$ y una base de $B_{F \cap G} = \{(1,1,1)\}$, y dim $F \cap G = 1$.

dim (F + G) = dim F + dim G - dim $F \cap G$ = 1 + 2 – 1 = 2 $\Rightarrow$ F + G es un plano.

De hecho F + G es el plano G que a su vez contiene a la recta F.

b) F y G no son subespacios suplementarios pues $F + G \neq R^3$.

c) Un subespacio suplementario de la recta F es cualquier plano vectorial que no la contenga. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ un subespacio suplementario de F es el plano vectorial generado por los vectores $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

4.- En el espacio vectorial R^3, se consideran las bases:

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ **y** $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$**, tales que,** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **es la matriz del cambio de base de B' a B. Se pide:**

a) La expresión analítica del vector $\vec{u}'$ respecto de la base B.
b) Si $\vec{a} =$ **(1, 1, 1) respecto de B', hallar las coordenadas de** $\vec{a}$ **respecto de B.**
c) Si x+y+z=0 respecto de B, ¿cuál es su expresión respecto de B'.

Solución:
Ecuaciones del cambio de base de B' a B.
Supongamos que un vector tiene por coordenadas (x, y, z) y (x', y', z') respecto de B y B' respectivamente, se verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_B = P.[X]_{B'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de B' a B, siendo P la matriz del cambio de la base $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ a la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B $\Rightarrow$

$$\vec{u}' = (1, -2, 1) = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$$

b) $\vec{a} =$ (1, 1, 1)=(x', y', z') y por el cambio definido por P:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = (1, -2, 2)$$

c)
Utilizando las ecuaciones del cambio de base de B' a B y sustituyendo x+y+z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + y' - z' \\ y = -2x' \\ z = x' + y' \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 2y' - z' = 0;$$

5.- Hallar todos los cuadrados mágicos de 3x3 cuya suma sea cero. Cuando la suma de todos los elementos por filas, columnas y diagonales da cero se plantea un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. ¿Cuál es la dimensión del subespacio vectorial obteido?

Solución:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Se plantea un sistema de 6 ecuaciones lineales homogéneas con 9 incógnitas

Ahora si incluimos las diagonales: se plantea un sistema de 8 ecuaciones lineales homogéneas con 9 incógnitas

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ d+e+f=0 \\ g+h+i=0 \\ a+d+g=0 \\ b+e+h=0 \\ c+f+i=0 \\ a+e+i=0 \\ c+e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=0 \\ d=-a \\ e=0 \\ f=a \\ g=0 \\ h=a \\ i=-a \end{cases} \Rightarrow$$

a	**-a**	**0**
-a	**0**	**a**
0	**a**	**-a**

Subespacio de dimensión 1