ÍNDICE

Versión 4.0. Octubre de 2005

EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS CON DERIVE

La resolución de problemas de Matemáticas ha sufrido un importante cambio en los últimos tiempos. La posibilidad de utilizar un sistema informático con capacidades de cálculo simbólico, cálculo numérico y representaciones gráficas ha permitido abordar problemas más complejos con un importante ahorro de tiempo y exentos de errores de cálculo. Además las posibilidades gráficas permiten una visualización imposible de realizar sobre una pizarra. Obviamente, la enseñanza de las Matemáticas no debe ser ajena a esta realidad, y por ello nos hemos planteado la incorporación de “Prácticas de Matemáticas con DERIVE”.

Esta quiere ser una nueva forma de trabajar, basada en un enfoque experimental de las matemáticas, aprovechando las capacidades de los actuales sistemas informáticos, y dirigiendo el trabajo del alumno hacia objetivos docentes.

Utilizamos el programa de cálculo simbólico DERIVE, cuyas principales ventajas son su agilidad y rapidez, así como su facilidad de uso y requerimientos mínimos de hardware.

El objetivo fundamental no es, por supuesto, enseñar a usar el programa DERIVE, sino mostrar cómo se puede usar dicho programa para facilitar el aprendizaje de las Matemáticas.

La filosofía que ha guiado la elaboración de estas prácticas ha sido la de aprovechar las posibilidades de experimentación con dos finalidades: por un lado ayudar a la comprensión de diversos conceptos difíciles, y por otra parte utilizar las herramientas disponibles para resolver problemas matemáticos de distinta complejidad, incidiendo de especial manera en aquellos cuyos cálculos suponen un extraordinario ahorro de tiempo.

Por último, la metodología desarrollada en las prácticas permite a cada alumno su realización y la comprobación de los conocimientos adquiridos, es decir una autoevaluación de sus progresos.

FÓRMULA DE TAYLOR

Brook TAYLOR
1685-1731

1. Conceptos sobre el orden del Polinomio de Taylor.

Objetivos: Observar cómo, a medida que aumenta "n",

- si x es fijo, la aproximación $f(x) \approx T_n[f(x), a]$ va siendo cada vez mejor
- si x varía, la aproximación anterior es buena cada vez para más valores de x.

a) Calcular los Polinomios de MacLaurin de grado 1,3,4, de la función ln(1+x) y sus restos correspondientes.

Indicación: Utilizar la función **vector(Taylor(ln(1+x),x,0,n),n,1,4)** para calcular conjuntamente los polinomios de Taylor de grados 1 a 4 .

Con la función:

vector(dif(ln(1+x),x,n),n,2,5) = $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

obtener conjuntamente las derivadas de órdenes 2 a 5 de f(x) y, a partir de ellas, los restos de Lagrange: $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ 0 < c < x$.

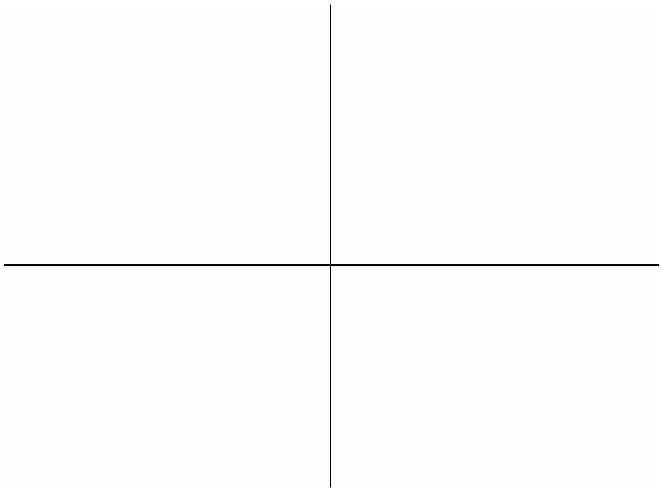
Nota: En lugar de la función **vector** puede usarse **table** (con sintaxis similar) y DERIVE ofrece el resultado en forma de columna en vez de fila, numeradas las filas de dicha columna.

Grado	Polinomio de MacLaurin	Resto de Lagrange
1		
3		
4		

b) Representar la función ln(1+x) y sucesivamente, los polinomios hallados, observando las gráficas. ¿Cuáles de los polinomios calculados pueden dar un valor fiable de ln(1.5), (x =   )?

Nota: Trabajando gráficamente, se considera que el polinomio de Taylor T_n da una **aproximación fiable de f(x_0)** si las gráficas de f y T_n se superponen en x_0 . Este concepto no es riguroso pues depende de la resolución de la pantalla y la escala con la que se trabaje. Para este apartado se sugiere la escala x=0.5 , y=0.5

Grado	1	3	4
Si/No			



c) ¿Cual es el menor grado del Polinomio de Taylor de ln(1+ x) en a=0 para obtener una aproximación fiable de ln(1.5) a escala x = 0.5, y = 0.5?

d) Dibujando de nuevo, una a una y borrando las anteriores, las gráficas de los polinomios de Taylor hallados, indicar para cada grado, el intervalo donde es fiable la aproximación por el correspondiente polinomio de Taylor.

orden n	1	3	4
Intervalo	( )	( )	( )

e) Utilizando la función **table(dif(ln(1+x),x,n),n,1,5)**, obtener la derivada

$f^{n)}(x) =$

Luego, el valor absoluto del resto de Lagrange de la Fórmula de MacLaurin es:

¿Para qué grado se obtiene una aproximación de ln 1.5 con un error menor que 0.005? n = $\boxed{}$, ya que:

$\left|R_n(0.5)\right| \leq$ < 0.005 y, escribiendo un vector cuyas coordenadas sean las cotas del error para varios valores de n, se obtiene:

table(,n,1,6) =

Aproximación: ln1.5 ≈ $P_n(0.5)$ ≈

Luego, -0.005 ≤ ln(1.5) ≤ +0.005

Es decir, ≤ ln(1.5) ≤

f) Calcular con DERIVE ln1.5 - P_n (0.5) ≈

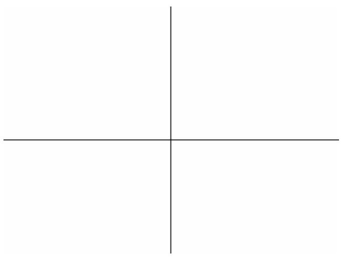
¿Está este error dentro de los límites permitidos en el apartado **e)** para la cota del error?

2. Conceptos sobre la proximidad al punto del desarrollo.

Objetivo: Observar cómo, cuanto más próximo está el valor de x al punto a, mejor es la aproximación $f(x) \approx T_n\,[f(x)\ ,\ a]$

a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 2, en a=0, de la función $\sqrt[3]{1+x}$: y representar gráficamente ambas funciones.

$T_2\left[\sqrt[3]{1+x},0\right] =$



Observar gráficamente la fiabilidad de la aproximación $f(x) \approx T_2\left[\sqrt[3]{1+x},0\right]$ para los valores:

$\sqrt[3]{5}$ (x =), $\sqrt[3]{0.1}$ (x =), $\sqrt[3]{0.5}$ (x =), $\sqrt[3]{1.5}$ (x =). Ordenarlos de mayor a menor fiabilidad utilizando la escala x=0.5, y=0.5.

Más fiable	Menos fiable

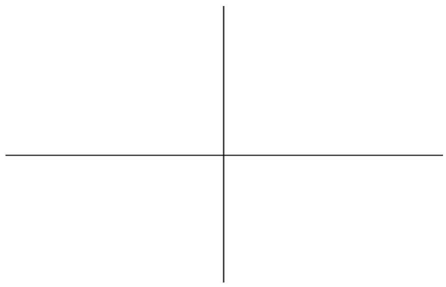
b) ¿Cómo influye el valor de x en la fiabilidad de una aproximación?

c) Estimar los valores y los errores cometidos al aproximar el valor de $\sqrt[3]{1.5}$ (x =   ) y $\sqrt[3]{0.5}$ (x =   ) con el polinomio de grado dos obtenido en el apartado a).

Aproximar el valor de	Valor aproximado	Error estimado, menor que:
$\sqrt[3]{1.5}$		
$\sqrt[3]{0.5}$		

Sustituimos x por $\boxed{}$ en $T_2\left[\sqrt[3]{1+x},0\right]$, obteniéndose $\boxed{}$

$f^{3)}(x) = \boxed{}$ y su gráfica es



$\max\limits_{[0,0.5]} \left| f^{3)}(x) \right| = f^{3)}(\quad) = \boxed{}$

$\left| R_3(x) \right| = \left| \dfrac{x^3}{3!} f^{3)}(c) \right| \le \dfrac{x^3}{3!} \max\limits_{[0,0.5]} \left| f^{3)}(x) \right|$; así: $\left| R_3(0.5) \right| \le \qquad \approx \boxed{}$

Análogamente para el segundo caso:

d) Aproximar los valores de $\sqrt[3]{1.5}$ (x =) y de $\sqrt[3]{0.5}$ (x =) con un error menor que 0.001, mediante el polinomio de MacLaurin de grado adecuado de $\sqrt[3]{1+x}$.

Valor exacto	Orden del polinomio utilizado	Valor aproximado
$\sqrt[3]{1.5}$		
$\sqrt[3]{0.5}$		

En efecto:

- Para el primero de los valores:

Primer método: El utilizado en el apartado 1.-e)

$f^{n)}(x) =$ $\boxed{}$

$\Rightarrow f^{n+1)}(x) =$ $\boxed{}$

$$\left| R_n(0.5) \right| \leq \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[0,0.5]} \left| f^{n+1)}(x) \right| \leq \boxed{} \leq \frac{1}{10^3}$$

Escribiendo un vector cuyas coordenadas sean las cotas del error para varios valores de n, se obtiene:

table(, n, 1, 4) =

(, , ,)

Luego n = $\boxed{}$.

<u>Segundo método</u>: Utilizando la función

table(Taylor($\sqrt[3]{1+x}$, x, 0, n), n, 1,6) y sustituyendo x por 0.5 se obtiene:

(, , , , ,)

Luego n = $\boxed{}$.

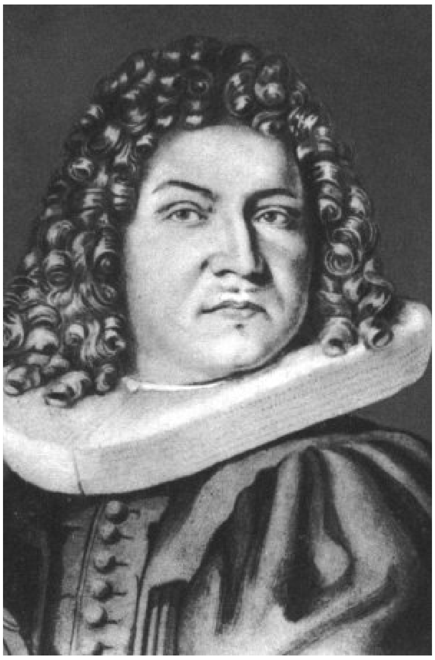
- Análogamente para $\sqrt[3]{0.5}$ (x =) :

e) Calcular, aplicando Taylor, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2tgx} - e^{x} + x^{2}}{arcsenx - senx}$.

- Primer polinomio no nulo de $\sqrt{1+2tgx} - e^{x} + x^{2} = \boxed{} = p(x)$
- Primer polinomio no nulo de arcsen x – sen x = $\boxed{}$ = q(x)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2tgx} - e^{x} + x^{2}}{arcsenx - senx} = \lim_{x \to 0} \frac{}{} =$$

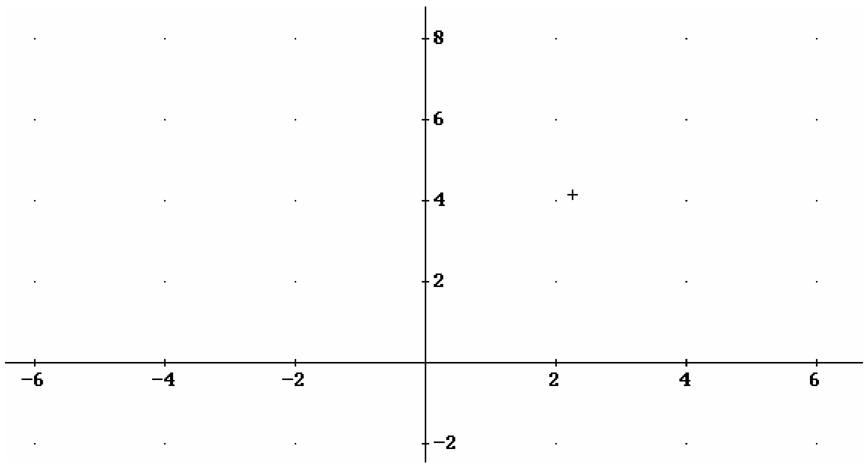
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES



Jacob BERNOUILLI
1654 – 1705

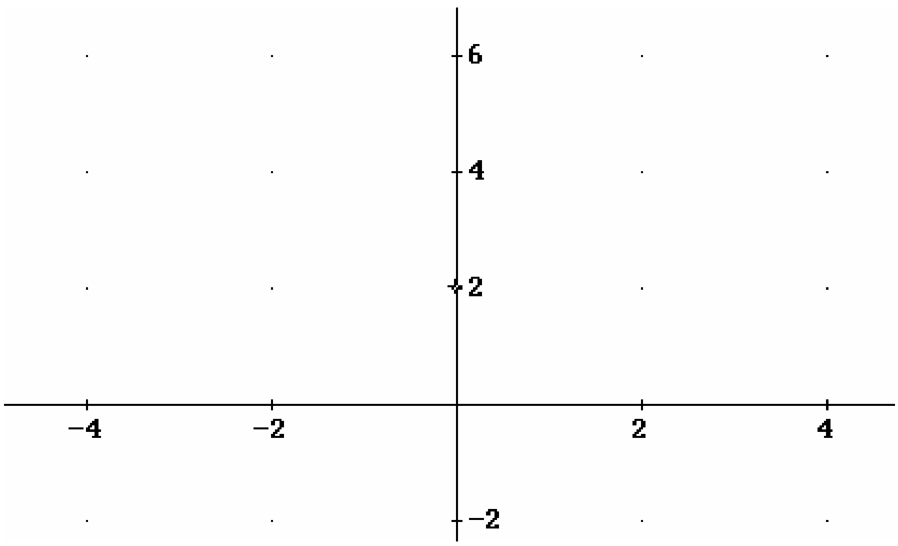
1. Sea la función $f(x) = x^2 e^{1/x}$. Se pide completar el siguiente cuadro y representar dicha función.

Dominio y Simetrías	
Asíntotas verticales	
Asíntotas horizontales	
Asíntotas oblicuas	
Crecimiento y Decrecimiento	
Máximos y Mínimos relativos	
Concavidad y convexidad	
Puntos de inflexión	



2. Para la función $g(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$ completar el siguiente cuadro y representar dicha función.

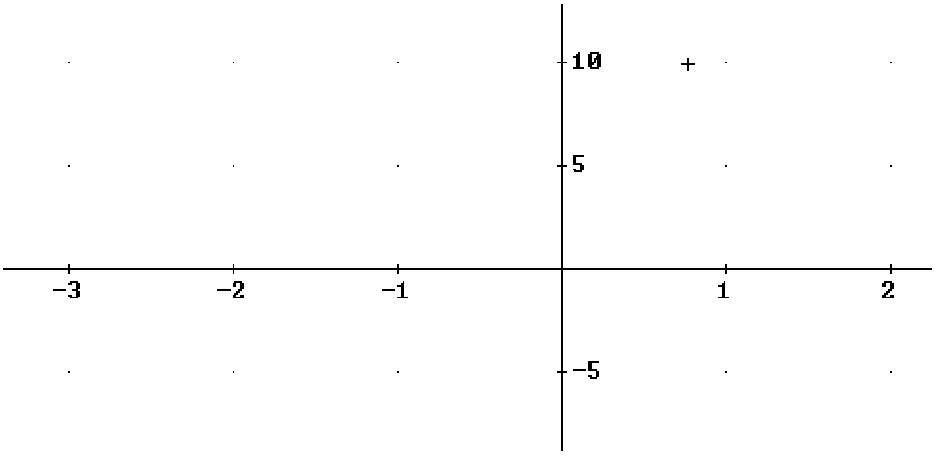
Dominio y Simetrías	
Asíntotas Verticales	
Asíntotas horizontales	
Asíntotas oblicuas	
Máximos y Mínimos relativos	
Crecimiento y Decrecimiento	
Puntos de inflexión	
Concavidad y convexidad	



3. Se trata de resolver la ecuación $x - 2\cos(3x) + e^{x} = 0$

- ¿Proporciona el comando **Resolver** alguna de sus raíces?

- Entonces, representamos la función $y = x - 2\cos(3x) + e^{x}$



- ¿Cuántas raíces reales existen?

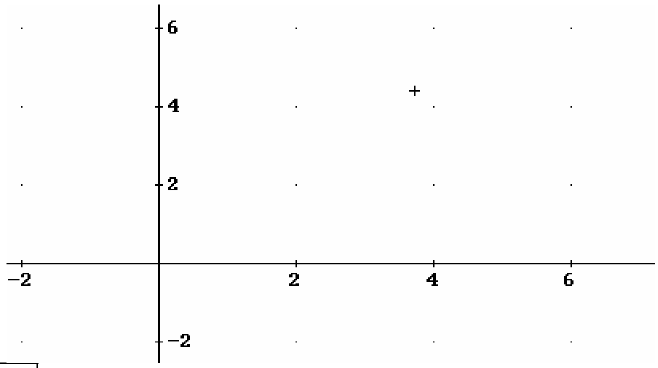
- ¿En qué intervalos se encuentran?

- Dar una solución aproximada de cada una de ellas, utilizando en el menú de la ventana **Algebra**, los comandos: **Resolver Expresión, Numérico, Intervalo**.

Intervalo			
Solución			

4. Sea $f'(x) = e^{-x}(5x^2 - 1)$ la función derivada de una cierta función y=f(x).

a) Representar gráficamente f'(x)



b) Hallar los valores en donde f'(x) = 0.

A partir de ellos y del signo de f'(x):

c) Señalar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x) observando la gráfica.

f es creciente en
f es decreciente en

d) Indicar los extremos relativos de f(x).

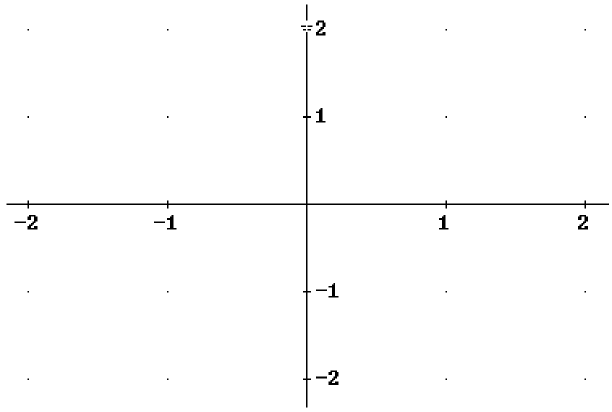
Máximos relativos
Mínimos relativos

e) Razonar si la función f puede estar acotada superior o inferiormente.

f) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x).

f es convexa en	f es cóncava en

g) Esbozar una de las posibles gráficas de f(x) considerando que pase por el punto (0,0).



h) Verificar si es correcta. Para ello integrar la función f'(x) y representar gráficamente el resultado obtenido.

¿Pasa por (0,0)?

Razona si es única la solución para f(x)	

- Hallar k para que f(x) pase por (0,0)

- Represéntala ¿En qué se parece a la gráfica esbozada?

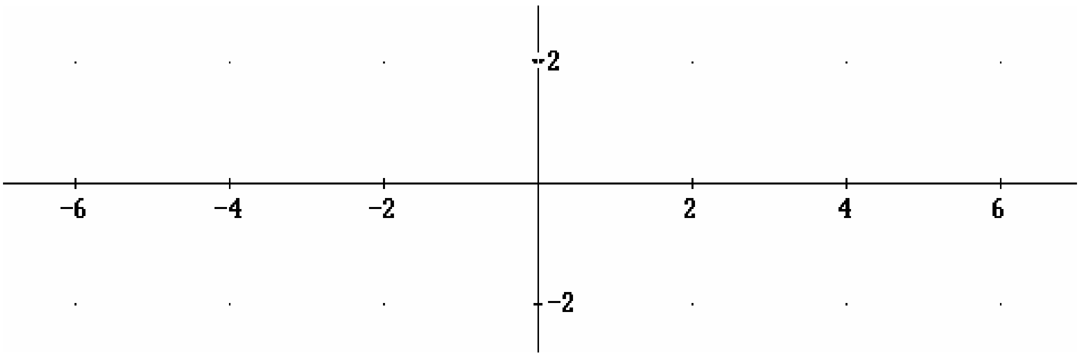
5. Completar el cuadro siguiente para la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \cos t \end{cases}$

Campo de variación de t	
Simetrías	
Periodicidad	
Asíntotas verticales	
Asíntotas horizontales	
Asíntotas oblicuas	
Intersección con las asíntotas	
Puntos críticos	
Puntos de tangencia horizontal	
Puntos de tangencia vertical	

Refleja el estudio por ramas de la variación de la curva en el siguiente cuadro

Variación en t	Variación en x	Variación en y	Variación en (x,y)	Signo de x'(t)	Signo de y'(t)	Signo de $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

Representar por ramas la curva dada

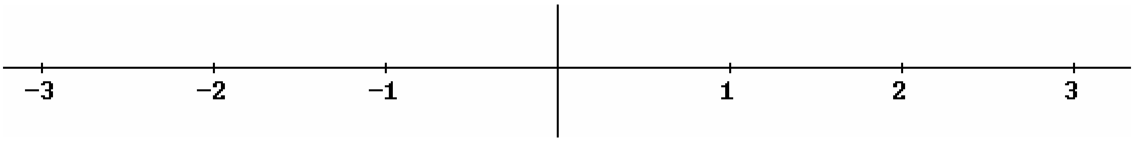


6. Completar el cuadro siguiente para la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^3} \\ y = \dfrac{1+t}{t^3} \end{cases}$$

Campo de variación de t	
Simetrías	
Periodicidad	
Asíntotas verticales	
Asíntotas horizontales	
Asíntotas oblicuas	
Intersección con las asíntotas	
Puntos críticos	
Puntos de tangencia horizontal	
Puntos de tangencia vertical	

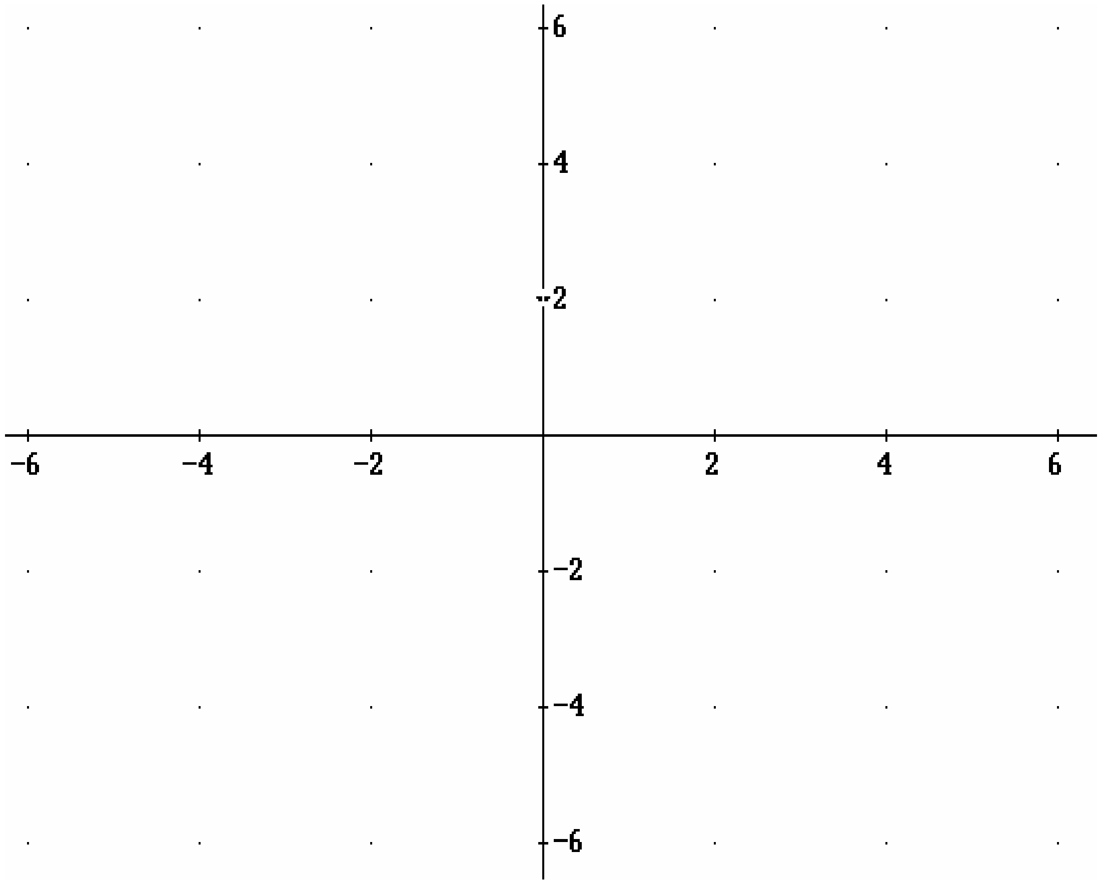
- Señala en **R** las ramas de la curva según los valores de t



- Refleja el estudio por ramas de la variación de la curva en el siguiente cuadro

Variación en t	Variación en x	Variación en y	Variación en (x,y)	Signo de x'(t)	Signo de y'(t)	Signo de $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

- Representar por ramas la curva dada



.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS E INTEGRAL DEFINIDA

Georg Friedrich Bernhard RIEMANN
1826-1866

1. ¿Qué funciones son primitivas de la función cosx? Tachar lo que no proceda

2sen(x)	2+sen(x)	sen(x+2)	sen(x)
SI NO	SI NO	SI NO	SI NO

2. Hallar $\int \cos(x)dx =$

3. Sean $f(x) = \begin{cases} 2 + sen(x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Calcular una primitiva continua de:

f(x)	g(x)	f(x)+g(x)	f(x)g(x)

4. Hallar usando DERIVE una primitiva de x^n $\forall n \in \Re$-{0}.¿Cómo considera DERIVE el resto de las variables que no son propiamente la variable de integración?

Observe que DERIVE devuelve como primitiva $\frac{x^{n+1} - 1}{n+1}$ en vez de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

¿Tiene alguna ventaja la primera opción frente a la segunda?

¿Podríamos indicarle algo a DERIVE acerca de la variable n para que la primitiva sea $\frac{x^{n+1}}{n+1}$?

Nota: Cuando DERIVE al simplificar una integral, responde con la misma expresión, la mayoría de las veces, es debido a que no existe una función primitiva, o aún existiendo, no es expresable mediante un número finito de operaciones entre funciones elementales, por ejemplo, $\int \frac{dx}{\ln x}$

5. Mediante el método de descomposición en fracciones simples, calcula en cada caso ,A, B, C, y D. Calcula la primitiva.

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{A}{(\qquad)} dx + \int \frac{B}{(\qquad)} dx =$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 4} dx = \int \frac{A}{(\qquad)} dx + \int \frac{B}{(\qquad)} \quad dx =$$

$$\int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x + 13} dx = \int (\qquad\qquad) dx + \int \frac{Ax + B}{(\qquad\qquad)} dx =$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int \frac{Ax + B}{(\qquad)} dx + \int \frac{Cx + D}{(\qquad)} dx =$$

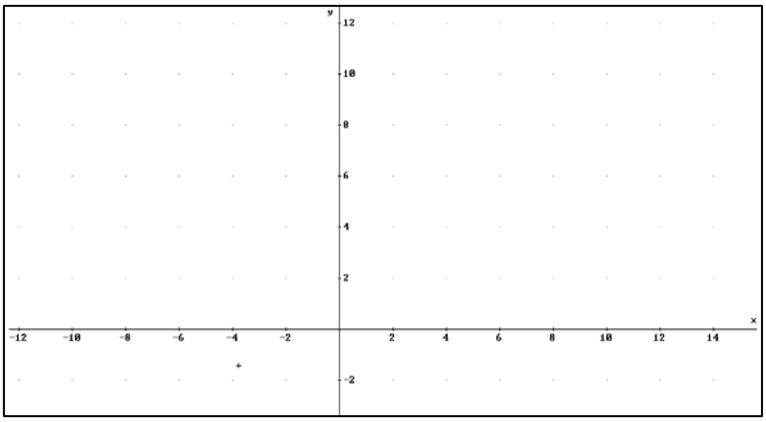
6. Para cada una de las integrales siguientes, hallar:

	Primitiva	Valor de la integral	Área del recinto limitado por la curva y el eje OX para los valores de x correspondientes.
$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}$			
$\int_{-1}^1 x\ln(x+3)dx$			
$\int_0^{\pi} x\cos(3x)dx$			
$\int_0^1 \frac{1}{(x-0.5)}dx$			
$\int_{-1}^1 \operatorname{tg}x dx$			

7. Calcular el área encerrada por :

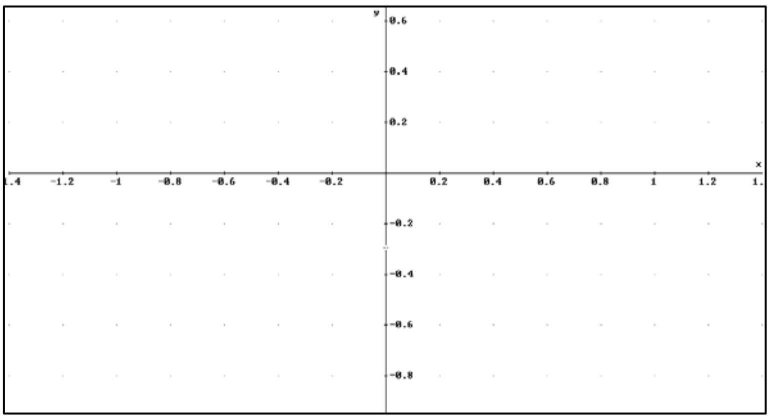
a) $y = 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x$

Representación Gráfica:



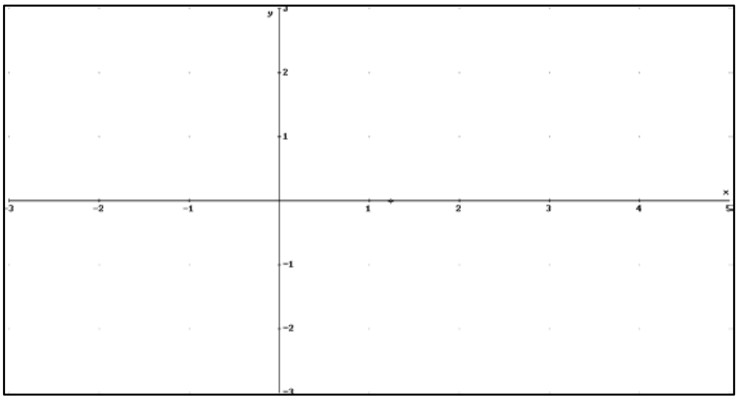
b) $y^2 = x^2 - x^4$

Representación Gráfica:



c) Común a los círculos $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4x$

Representación Gráfica:



.

INTEGRALES IMPROPIAS Y CÁLCULO DE ÁREAS

Leonhard EULER.
1707-1783

1. Calcula $\int_0^1 \frac{1}{x-0.5}dx =$ .Dibuja la gráfica

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{x-0.5}>0$ para x>0.5 y $\frac{1}{x-0.5}<0$ para x<0.5

¿Encuentras sorprendente el resultado?

¿Se ha equivocado DERIVE? ¿Porqué?

¿Qué le ocurre a esta integral?

¿Cuál sería el valor del área?:

2.

a) Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{e^{px}}dx$ con DERIVE.¿Qué se obtiene?

¿Porqué?

b) Con **Introducir, Dominio de una Variable, p, Reales,** considerar sucesivamente p<0, p=0 y p>0 y determinar si es convergente o divergente, en cada caso, la integral $\int_0^\infty \frac{1}{e^{px}}dx$

	p<0	p=0	p>0
Carácter			
Valor			

3. Al ser $\int_0^\infty \cos x\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\, dx = \lim_{b\to\infty}(\text{sen} b)$ y no existir dicho límite, pues la función senx oscila indefinidamente entre -1 y 1, decimos que $\int_0^\infty \cos x\, dx$ no existe o diverge por oscilación ¿ Qué dice DERIVE acerca de $\int_0^\infty \cos x\, dx$?

4. ¿Es impropia la integral $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}dx$? $\boxed{}$ ¿Porqué?

5. Analizar el carácter de las siguientes integrales utilizando el criterio de comparación con ayuda de sus gráficas:

Integral dada	≤ ó ≥	Integral de referencia	Carácter	Gráficas
$\int_1^{\infty} \frac{\text{senx}}{x^3}dx$				
$\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}dx$				
$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx$				
$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$				

6. Analizar el carácter de las siguientes integrales utilizando el criterio de comparación en el límite y/o con ayuda de sus gráficas:

Integral dada	Integral de referencia	Límite del cociente de funciones.	Gráficas	Carácter
$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 2^x}\,dx$				
$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,dx$				
$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx$				

7. Aplicando la definición de integral impropia y con ayuda de la gráfica, calcular el área del recinto limitado por la función y el eje x en el intervalo propuesto

f(x)	$[a,b]$	Gráfica	Integral I que da S	Cálculo mediante límite	Carácter de I. Valor de S
$\frac{1}{(x-0.5)^2}$	[0,1]				
$\frac{1}{x^2+2x+2}$	$\Re$				
$\operatorname{sen}^2 x$	$[0,\infty)$				
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$				
$\ln x$	(0,1]				

8. Si la función $y=\frac{1}{x}$ gira alrededor del eje x para $x \geq 1$, engendra un sólido de revolución, llamado a veces Horno de Gabriel, cuyo volumen V nos lo proporciona la integral impropia $\int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

La superficie de revolución de dicho sólido viene dada por

$S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx =$

$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$. Calcula con DERIVE. $\boxed{\begin{cases} V = \\ S = \end{cases}}$

¿Cuánta pintura cabe en el Horno de Gabriel, si la unidad de longitud en la recta real es el dm?

¿Qué cantidad de pintura se necesita para pintar el exterior del Horno?

Una vez repuesto/a de la sorpresa intenta dar una explicación.

.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Gottfried LEIBNIZ

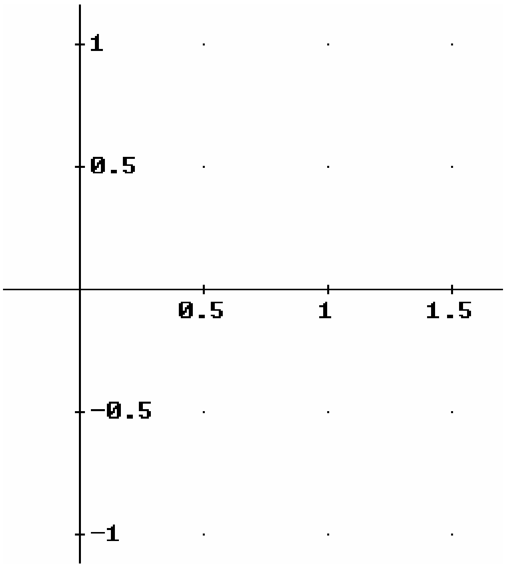
1646 –1716

Objetivo: Aplicar correctamente las fórmulas de aplicaciones de la integral definida, utilizando la capacidad gráfica de DERIVE para calcular los límites de integración, así como las funciones de DERIVE previamente definidas sobre el tema.

1. Funciones dadas por su ecuación cartesiana

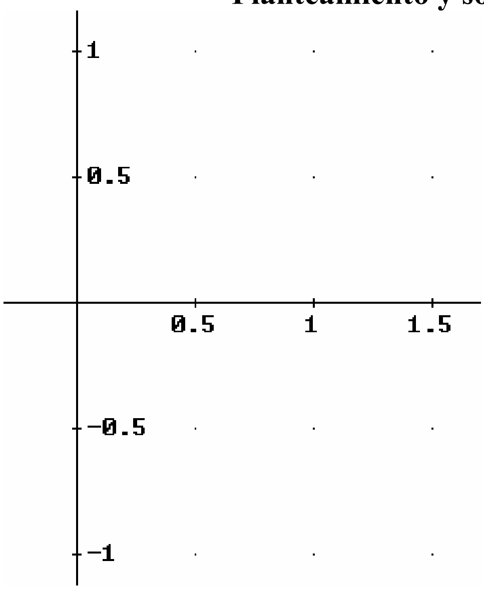
a) Longitud del arco de la curva $\mathbf{y = ln(1\text{-}x^2)}$, desde x = 0 hasta x = $\frac{1}{2}$.

Planteamiento y solución:



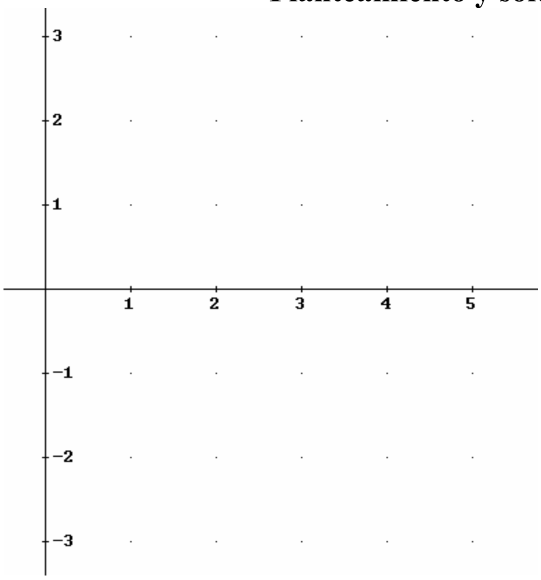
b) Superficie de revolución, engendrada por la función **y = coshx,** al girar alrededor del eje de abscisas, en [0,1].

Planteamiento y solución:



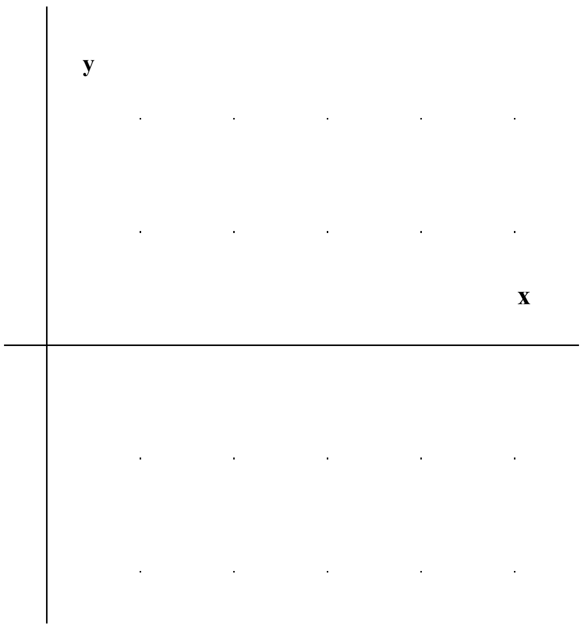
c) Área del triángulo curvilíneo determinado por los puntos V(3,0), $P\left(4, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ y Q(4,0) de la hipérbola $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{9}} - \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{5}} = \mathbf{1}$.

Planteamiento y solución:



d) Volumen del sólido de revolución, engendrado al girar la curva $\mathbf{y^2 = 2xe^{-2x}}$ alrededor de su asíntota.

Planteamiento y solución:



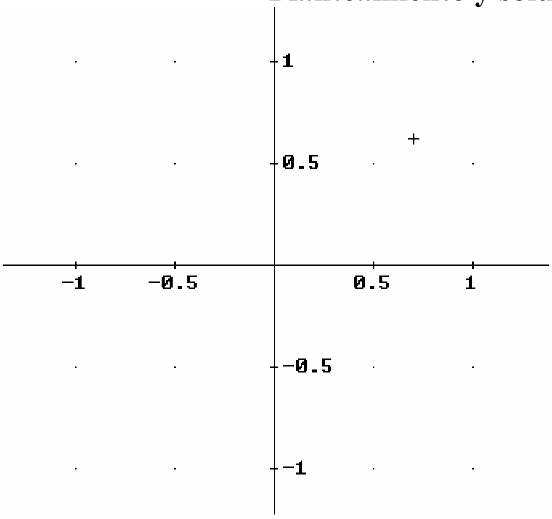
2. Funciones dadas por unas ecuaciones paramétricas

NOTA: Para representar una curva dada por unas ecuaciones paramétricas:

- Se escriben sus ecuaciones entre corchetes: $[x(t), y(t)]$
- Se pulsa el icono de **Representar en 2D** dos veces, la segunda vez, DERIVE pide el intervalo en que se desea representar.

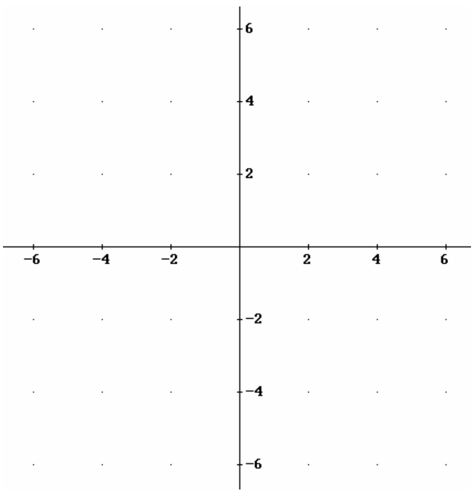
a) Hallar el área encerrada por la curva $\begin{cases} \mathbf{x = cos^3 t} \\ \mathbf{y = sen^3 t} \end{cases}$

Planteamiento y solución:



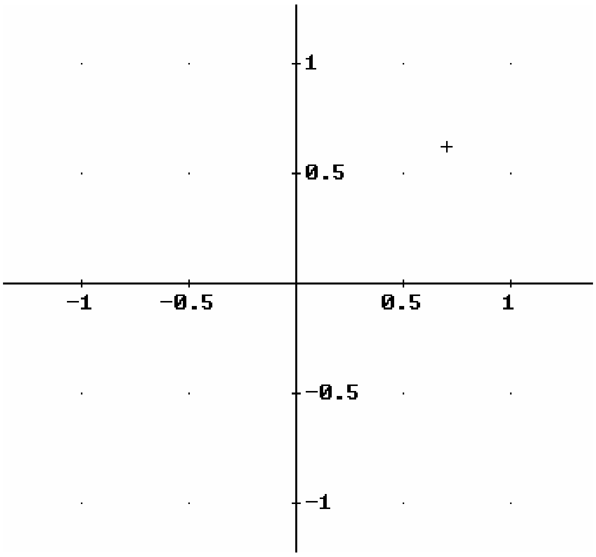
b) Calcular el volumen de revolución, engendrado por la rotación del área encerrada por un arco de la cicloide $\begin{cases} \mathbf{x = t - sent} \\ \mathbf{y = 1 - cost} \end{cases}$ y el eje x, alrededor del eje y.

Planteamiento y solución:



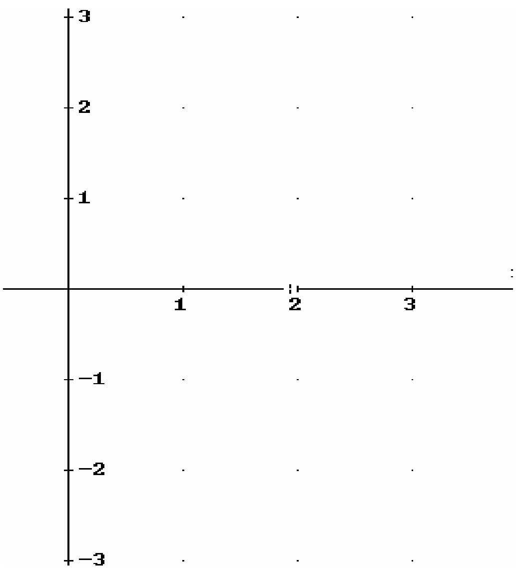
c) Hallar el perímetro de la curva $\begin{cases} \mathbf{x = \cos^3 t} \\ \mathbf{y = sen^3 t} \end{cases}$

Planteamiento y solución:



d) Calcular la superficie de revolución engendrada por la rotación de la región determinada por la curva $\begin{cases} \mathbf{x = e^t cost} \\ \mathbf{y = e^t sent} \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y el eje y alrededor del eje de abscisas.

Planteamiento y solución:



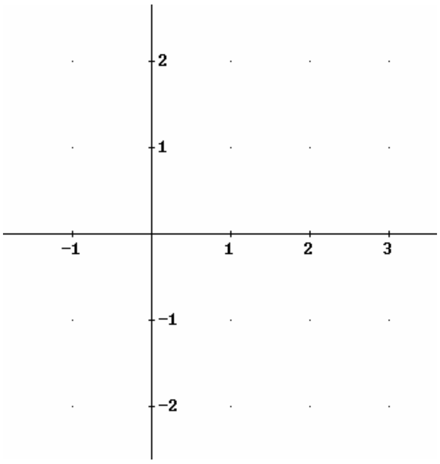
3. Funciones dadas en forma polar.

NOTA: Para representar una curva dada por su ecuación polar se dan los siguientes pasos:

- Se escribe la ecuación polar r(α)
- Se pulsa el icono de **Representar en 2D** y en Seleccionar elegimos Sistema de Coordenadas Polares
- Al pulsar de nuevo **Representar en 2D**, DERIVE pide el intervalo de α que se quiere dibujar.

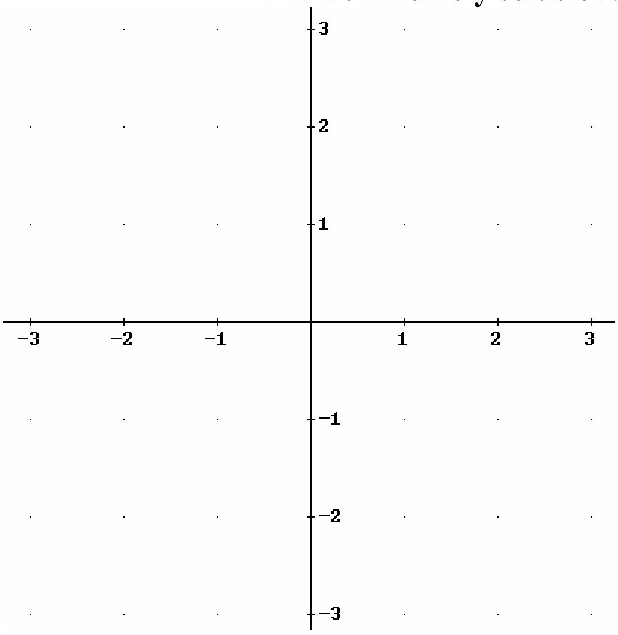
a) Hallar el área común a las curvas $\begin{cases} \mathbf{r} = 3\cos\alpha \\ \mathbf{r} = 1 + \cos\alpha \end{cases}$

Planteamiento y solución:



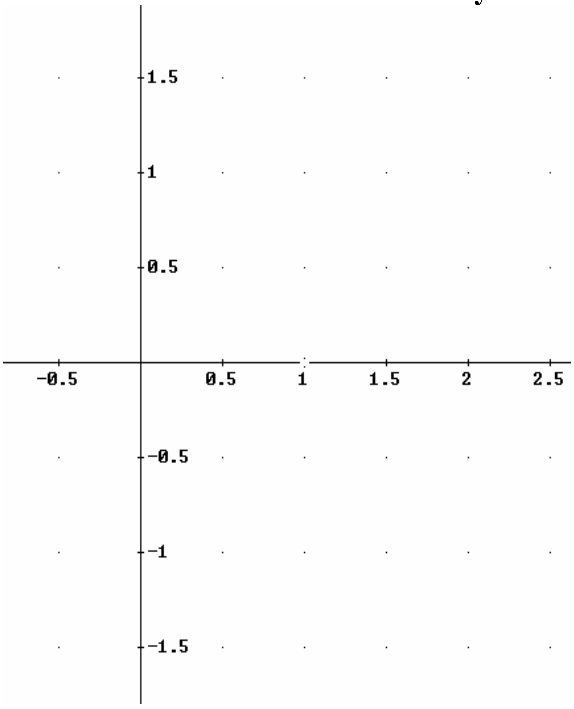
b) Calcular el volumen de sólido de revolución engendrado por la rotación, alrededor del eje polar, de la curva **r = 3 sen(2α).**

Planteamiento y solución:



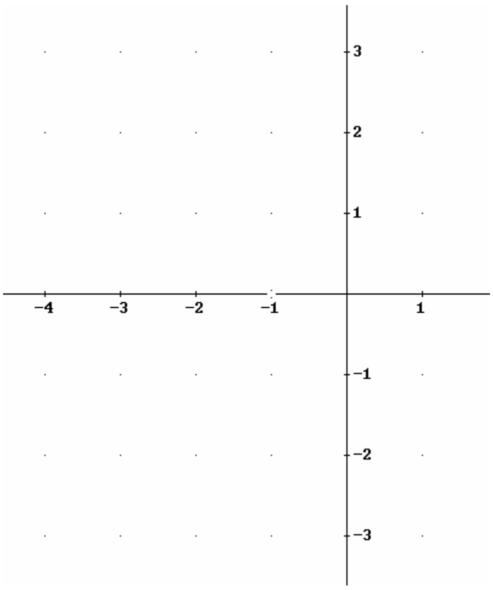
c) Hallar la longitud de la curva **$r = 1+\cos\alpha$.**

Planteamiento y solución:



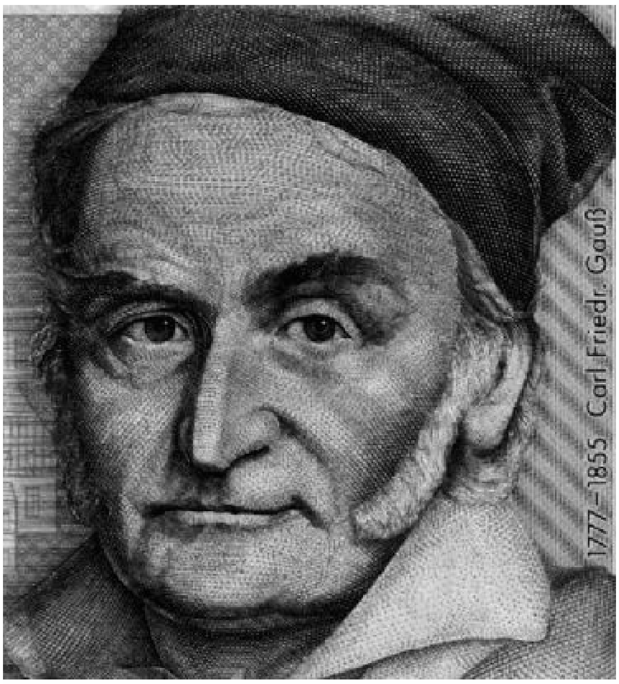
d) Calcular la superficie de revolución que engendra la curva $r = 2(1-\cos\alpha)$, al girar alrededor del eje polar.

Planteamiento y solución:



.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



Karl Friedrich GAUSS
1777-1855

1. Estudiar la existencia de solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

Sistema	$\begin{cases} x+3y+z=10 \\ 2x-y+5z=15 \\ 4x+2y-3z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-11y+9z=4 \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x-5y+3z=0 \\ -x+6y-z=2 \\ x-4y+5z=4 \end{cases}$
Aplicando **Resolver**			
Aplicando **SOLUTIONS**			
Matriz ampliada A*			
Aplicando **ROW_REDUCE** a la matriz A*			
Tipo de sistema			
Solución			

Sistema	$\begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ 2x+y-z+t=-2 \\ 2y+z-3t=1 \\ 3x+z=-1 \\ 3x+2y+2z-3t=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ 6x+2y-2z=8 \\ 2x+4y-4z=-2 \\ 4x+3y-3z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y-z+5t=1 \\ 3x-t=0 \end{cases}$
Aplicando **Resolver**			
Aplicando **SOLUTIONS**			
Matriz ampliada A*			
Aplicando **ROW_REDUCE** a la matriz A*			
Tipo de sistema			
Solución			

2. Resolver el sistema $\begin{cases} x+2y+3z+4t=a \\ x+2y+4z+5t=b \\ 2x+4y+5z+7t=c \end{cases}$ según los valores de a, b y c.

Matriz ampliada A*=

a) Con la función **ROW_REDUCE** este sistema es equivalente a otro cuya matriz ampliada es $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$, que es un sistema

b) Con **Resolver** DERIVE dice:

c) Con **SOLUTIONS**

¿Es correcto el resultado?

d) Utilizando la función **PÍVOT** (A*,1,1), obtenemos

$A_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Con **PIVOT**(A_1,2,3), queda: $A_2 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Por tanto, **ROW_REDUCE**, **Resolver y SOLUTIONS** no dan una respuesta correcta ya que el sistema es compatible si y solo si

y, en este caso, la solución es:

x = , y = , z = , t =

3. Resolver los siguientes sistemas, dados en forma matricial, utilizando **ROW_REDUCE,** y siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Sistema	AX=0	AX=X	AX=B
A*			
ROW_REDUCE(A*)			
Solución			
Tipo de sistema			

4. Hallar el rango de las matrices siguientes utilizando la función **ROW_REDUCE**.

Deducir además, para cada matriz, si es inversible y calcular su inversa:

A	**ROW_REDUCE (A)**	rango(A)	A^{-1}
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$			

¿Qué significa el que aparezca una fila de ceros al aplicar **ROW_REDUCE** a una matriz ?

5. Hallar por bloques la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Si llamamos $A^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, entonces $AA^{-1}=I_4 \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=I_2 \\ A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=0 \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=0 \\ A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=I_2 \end{cases}$

Como A_{11}, A_{22} son inversibles comenzamos a resolver el sistema despejando B_{12} en la 2ª y sustituyendo en la 4ª y se obtiene:

$$B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1},$$

luego sustituyendo en la 2ª

$$B_{12}=A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}.$$

Ahora en la 3º despejamos

$$B_{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

y sustituyendo en la 1ª

$$B_{11}=(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}.$$

Si tomamos como bloques:

$A_{11}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$A_{12}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
$A_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$A_{22}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Obtenemos:

B_{11}= $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$	**B_{12}=** $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$
B_{21}= $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$	**B_{22}=** $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

6. Hallar la inversa utilizando el método de Gauss :

Escribiremos previamente la matriz identidad de igual orden que la matriz A, **In:=IDENTITY_MATRIX(n)**

A	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
APPEND_COLUMNS(A,In)=B		
ROW_REDUCE (B)		
A^{-1}		

7. Resolver $\begin{pmatrix} b-1 & b+1 \\ b-1 & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-1)^2 \\ b^2-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ AX=K siendo A=$\begin{pmatrix} b-1 & b+1 \\ b-1 & 3b \end{pmatrix}$ y K=$\begin{pmatrix} (b-1)^2 \\ b^2-1 \end{pmatrix}$.

Calculamos det(A)= $\boxed{}$ =0

a) Si b≠ $\boxed{}$ y b ≠ $\boxed{}$ entonces |A | ≠ 0, luego el sistema es de Cramer, por tanto X=A^{-1}K, obteniéndose la solución general

C = {

b) Si b= $\boxed{}$ sustituimos en A^* y efectuamos **ROW_REDUCE(A^*)** = $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, el sistema es y por tanto

C = {

c) Si b= $\boxed{}$ sustituimos en A^* y efectuamos **ROW_REDUCE(A^*)** = $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, el sistema es $\boxed{}$ y por tanto

C = {

8. Hallar $\mathbf{A^n}$, $n \in N$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aplicando el Principio de Inducción.

Utilizaremos como ayuda para el cálculo de las primeras potencias **VECTOR($\mathbf{A^n}$,n,2,4)**.

$A^2 =$	$A^3 =$	$A^4 =$

$A^n =$

Demostración de que la matriz A^n es la correcta:

1.- Para n=1 la expresión A^n es cierta

$A^1 =$

2.- Suponemos que es cierta para n y se demuestra para n+1; es decir, demostramos que:

$A^{n+1} =$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

.

ESPACIO VECTORIAL

Joseph Louis LAGRANGE
1736-1813

1. Contestar a las cuestiones que se plantean en los siguientes apartados:

a) Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -1 & 6 \\ 6 & 17 & -7 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea H el sistema de vectores de $\Re^4$ formado por los vectores fila de la matriz A; rango(H). Indicar los vectores linealmente independientes de H

c) Sea F el subespacio vectorial de $\Re^4$ generado por los vectores fila de la matriz A.

Hallar dos bases diferentes de F.

d) Hallar una ecuación vectorial de F

e) Hallar unas ecuaciones paramétricas de F

f) Hallar unas ecuaciones implícitas de F

g) Sea C el subespacio vectorial de $\Re^4$ generado por los vectores columna de la matriz A

Hallar una base de C.

h) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.

i) Hallar la ecuación vectorial de C

j) Hallar unas ecuaciones paramétricas de C

k) Hallar unas ecuaciones implícitas de C

l) ¿F y C son hiperplanos distintos?

m) Calcular una base y unas ecuaciones paramétricas de $F \cap C$

n) ¿$F+C = \Re^4$?

o) ¿F+C es suma directa?

p) Hallar un subespacio suplementario del subespacio F:

2. Estudiar, para cada uno de los conjuntos de vectores que se indican, si son libres y/o sistemas de generadores y/o base de $\Re^n$, utilizando la función **rank**:

Vectores	A	Rango	Sist. libre	Sist. generador	Base	Justificación
$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-2,0) \\ \vec{u}_2 = (3,0,1) \\ \vec{u}_3 = (-1,1,1) \end{cases}$						
$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-2) \\ \vec{u}_2 = (3,0) \\ \vec{u}_3 = (-1,1) \end{cases}$						
$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-2,0,0) \\ \vec{u}_2 = (3,0,1,1) \\ \vec{u}_3 = (-1,1,1,2) \end{cases}$						

3. Unas ecuaciones paramétricas de un cierto subespacio vectorial F de $\Re^5$ son:

$$
\textbf{(I)}\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta \\ y = \beta + \gamma + 2\delta \\ z = \alpha + 2\beta + 2\gamma + 5\delta \\ t = \alpha + 3\gamma + 4\delta \\ v = \alpha + \beta + 4\gamma + 6\delta \end{cases}
$$

con α, β, γ,$\delta \in \Re$.Se pide hallar una base y unas ecuaciones cartesianas de F.

SOLUCIÓN:

4.

a) Estudiar si el conjunto de vectores $B_1 = \{ \vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (-1,1,0), \vec{u}_3 = (-1,-1,2)\}$ constituye una base de $\Re^3$.

b) Hallar una base B_S del subespacio de $\Re^3$: $S = \{ (x, y, z) \in \Re^3 / x - 2y + z = 0 \}$.

c) Hallar un vector $\vec{u} \notin S$. Razonar porqué $\{ \vec{u} \} \cup B_s = B_2$ constituye una base de $\Re^3$.

d) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_2 en forma matricial.

5. Consideremos las bases de $\Re^3$:

$$B_1 = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\} \text{ y}$$

$$B_2 = \left\{\vec{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}), \vec{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \vec{u}_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})\right\}.$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_2.

b) Hallar el conjunto F de vectores que tienen las mismas coordenadas respecto de B_1 y B_2.

c) Demostrar que F es un subespacio de $\Re^3$ y hallar una base de F.

.

APLICACIONES LINEALES. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES.

David HILBERT
1821 - 1895

ALGUNAS FUNCIONES DE DERIVE SOBRE EL TEMA:

CHARPOLY(A) calcula el polinomio característico de la matriz A.

EIGENVALUES(A) calcula los valores propios de la matriz A, tiene el problema de no decir el grado de multiplicidad de cada valor propio**.**

Usar <u>S</u>implificar, <u>F</u>actorizar, <u>R</u>acional, <u>Factorizar</u>, para calcular los valores propios y su grado de multiplicidad factorizando el polinomio característico.

EXACT_EIGENVECTOR (A, valor propio) calcula el subespacio de vectores propios de una matriz A correspondiente a un determinado valor propio.

1. Sea $f:\ \Re^3 \to \Re^3$ definida por
$f(x,y,z) := [x+2y-3z,\ \ 2x+y-4z,\ \ x-y-z]$

a) Hallar una ecuación matricial de la aplicación lineal f

b) Calcular las imágenes de los vectores (5,2,3) y (0,0,0).

Podemos afirmar:	Si/No
¿ Es f inyectiva?	
¿El vector (5,2,3)∈N(f)?	

c) Hallar una base, la dimensión y unas ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial N(f).

B_N={(,   ,   )}   dim N(f) =_____ $N(f) = \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$

¿Es f un endomorfismo? ___   ¿Porqué? ____________________________________
____

Por ser $f:\ \Re^3 \to \Re^3$ un endomorfismo se verifica:

dim N(f) = ____ ⇔ dim Im(f) = ____ ⇔ rg(A) = ____ ⇔ una base de Im(f) está formada por ___ columnas linealmente ____________________ de A.

Justificar porqué f no es inyectiva. ____

d) Hallar una base y unas ecuaciones paramétricas de Im(f).

$B_{Im(f)}=\{(\quad,\quad,\quad),(\quad,\quad,\quad)\}$ $\qquad \mathrm{Im}(f)=\begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases}$

¿Es el vector (1, 6, 5) un vector propio de f? En caso afirmativo quién es su valor propio asociado.

e) Hallar el polinomio característico de la matriz A, asociada al endomorfismo T

f) Los valores propios de A son: $\lambda_1=$ ___ , $\lambda_2=$ ___ , $\lambda_3=$____

g) ¿ Es A diagonalizable? ¿porqué?________________________________
____

h) Hallar el conjunto de vectores propios (subespacio propio) asociado al valor propio λi

Valor propio	Subespacio propio	Base del subespacio
$\lambda_1=$ ____	$V\lambda_1=<(\quad,\quad,\quad)>$	(, ,)
$\lambda_2=$ ____	$V\lambda_2=<(\quad,\quad,\quad)>$	(, ,)
$\lambda_3=$ ____	$V\lambda_3=<(\quad,\quad,\quad)>$	(, ,)

i) Hallar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal

$$P=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2. Para cada una de las matrices siguientes hallar:

Matriz	$\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Polinomio característico.		
Valores propios.		
Subespacio de vectores propios asociado a cada valor propio.		
Base formada por vectores propios.		
Es diagonalizable? ¿Porqué?		
Matriz de cambio de base o que permite la diagonalización.		
Matriz semejante diagonal.		
Subespacio de vectores invariantes		
Subespacios invariantes		
¿Es f biyectiva?		

3. Para cada una de las matrices siguientes hallar:

Matriz	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Polinomio característico.		
Valores propios.		
Subespacio de vectores propios asociado a cada valor propio.		
Base formada por vectores propios.		
¿Es diagonalizable? ¿Porqué?		
Matriz de cambio de base o que permite la diagonalización.		
Matriz semejante diagonal.		
Subespacio de vectores invariantes		
Subespacios invariantes		
¿Es f biyectiva?		

4. Sea f el endomorfismo de $\Re^3$ definido por las ecuaciones $f(x, y, z) = (x - z, -4y + az, -x + ay)$, siendo $a \in \Re$

a) Obtener la matriz de f.

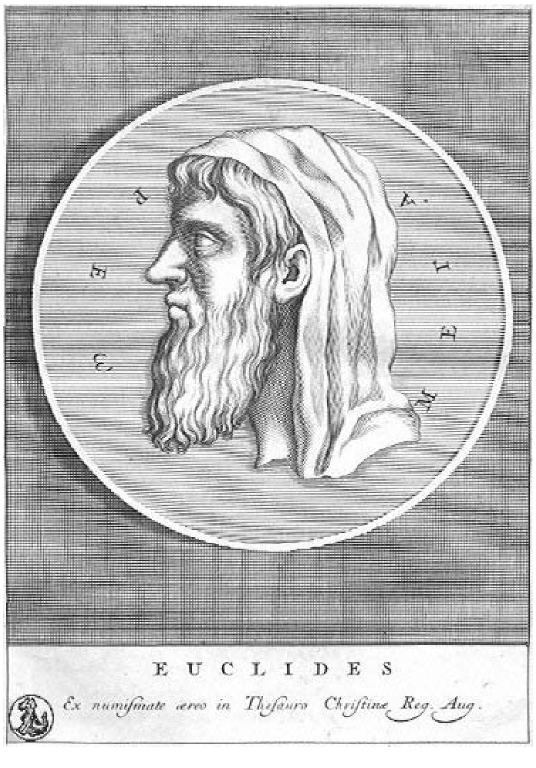
b) Hallar los valores del parámetro a para los cuales f no es isomorfismo.

c) Para a=2, obtener una base del N(f).

d) Para a=2, las ecuaciones de Im(f).

SOLUCIÓN:

ESPACIO EUCLÍDEO



EUCLIDES
~año 300 a.C.

1. Sean ($\Re^3$, $\Re^3$,f) el espacio afín usual tridimensional real, R ={P_0, P_1, P_2, P_3} y R' ={Q_0, Q_1, Q_2, Q_3} dos referencias afines de ($\Re^3$, $\Re^3$,f) de bases asociadas B={$\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, $\overrightarrow{P_0P_3}$} y B'={$\overrightarrow{Q_0Q_1}$, $\overrightarrow{Q_0Q_2}$, $\overrightarrow{Q_0Q_3}$} siendo P_0=(1,3,-1), P_1=(2,3,-2), P_2=(2,4,-1) y P_3=(2,5,-1), Q_0=(1,0,1), Q_1=(1,1,0), Q_2=(0,1,1) y Q_3=(0,0,1).

a) Probar que R= {P_0, P_1, P_2, P_3} es una referencia afín de ($\Re^3$, $\Re^3$, f).

b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{v}$=(0, -3,2) respecto de la base B={$\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, $\overrightarrow{P_0P_3}$} de $\Re^3$(R).

c) Calcular las coordenadas de Q_0=(1,0,1) respecto R.

d) Calcular las ecuaciones del cambio de la referencia afín R y R'.

e) Si un punto tiene por coordenadas (1,1,1) respecto de R. ¿Cuáles son sus coordenadas respecto de R'?

f) Si un plano tiene por ecuación x+y+z=0 respecto de R. ¿Cuál es su ecuación respecto de R'?

SOLUCIÓN:

2. Determinar la posición relativa de las dos rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 8x - 2y - 2z = -2 \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} bx - 2z = b - 6 \\ 3x - 2y = 3 - 2a \end{cases}$$

según los valores de los parámetros a y b.

SOLUCIÓN:

3. Dadas las rectas $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-k}{-1}$ y $\frac{x+1}{3}=y-2=z$, hallar: a) El valor de k para que sean secantes. b) Para el valor obtenido, la ecuación del plano que las contiene. c) Proyección de la recta 6x=3y=-2z sobre el plano anterior.

SOLUCIÓN:

4. Encontrar las ecuaciones de una recta que se apoya en dos rectas r y s y pasa por el punto P(1,0,1).

$$r \equiv \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{-1};\ s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

5. Hallar los planos bisectores de los planos concurrentes: x -3 y + 2 z - 5 = 0 y 3 x - 2 y - z + 3 = 0 e indicar cuál corresponde al ángulo agudo y cuál al obtuso.

SOLUCIÓN:

6. Dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -2t + 4; \\ z = 3t + 4 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 9 \\ z = -s - 12 \end{cases}$$

Hallar: a) las ecuaciones paramétricas de la perpendicular común. b) el valor de la mínima distancia entre ellas.

SOLUCIÓN:

7. Encontrar el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación $2x+3y+3z=6$ con los ejes coordenados.

SOLUCIÓN:

8. Dadas las rectas r: $2x + y = 0$, $x - z - 3 = 0$; y s: $x = 2 + t$, $y = -t$, $z = t$, se pide: a) Hallar la ecuación de una recta que sea paralela al eje OX y corte a r y a s. b) Hallar k para que la recta obtenida y el plano $2kx + y - kz + 2k = 0$ formen un ángulo de 30°.

SOLUCIÓN:

.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DEL ESPACIO EUCLÍDEO

Felix KLEIN
1849-1925

Se trata, en primer lugar, de clasificar una transformación geométrica a partir de su ecuación matricial. A continuación se calcularían sus elementos característicos, en los casos estudiados en teoría.

Se sugiere el siguiente método:

Sea la ecuación $\overline{\mathbf{X'}} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{X}}$ donde $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0...0} \\ \mathbf{T(O)} & \mathbf{M} \end{pmatrix}$, y **M** la matriz que define la transformación lineal asociada.

1. Si $M \cdot M^t = p \cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k = \sqrt{p}$ y la matriz $Q = \frac{1}{k} \cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento que aparece en la descomposición de la semejanza (nota: dicho movimiento no es único y, por tanto, la matriz Q tampoco). Si p=1, T es un **movimiento.**

- **Si** $|M| = |kQ|$ **> 0, la semejanza es directa** y tomamos $Q = \frac{1}{k} \cdot M$

- **Si** $|M| = |kQ|$ **< 0, la semejanza es inversa** y tomamos:

$$\begin{cases} Q = \dfrac{1}{k} \cdot M, \text{ si es en el plano euclídeo } E_2 \\ Q = \dfrac{1}{-k} \cdot M, \text{ si es en el espacio euclídeo } E_3 \end{cases}$$

2. Calculamos los puntos dobles: definimos la matriz columna $\overline{\mathbf{X}}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y resolvemos $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{X}}$.

3. Calculamos los elementos de la transformación (si es una de las estudiadas en teoría) siguiendo el método usual en cada caso.

Las homotecias y traslaciones se identifican de inmediato y no hace falta aplicar este método general

Sugerencia:

Usar la orden **minor** para escribir M: **M:=minor(N,1,1)** ↵ **=.**

Nota : En el plano euclídeo E_2 los movimientos y las semejanzas tienen como matriz M asociada, una matriz de una de las dos formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \text{, o bien, } \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

1. Clasificación de transformaciones de $\Re^2$

a) Clasificar las siguientes transformaciones $\overline{\mathbf{X'}} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{X}}$ de $\Re^2$ y hallar sus elementos característicos:

N	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
M		
¿Es $MM^t = pI_n$?		
k		
$\lvert M \rvert$		
$Q = \frac{1}{k}M$ (si procede)		
Puntos dobles		
Tipo de transformación		
Elementos característicos		
Descomposición canónica (si procede)		

b) Clasificar las siguientes transformaciones $\overline{\mathbf{X'}} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{X}}$ de $\mathfrak{R}^2$ y hallar sus elementos característicos:

N	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & -1 \\ -2 & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$
M		
¿Es $MM^t=pI_n$?		
k		
$\lvert M \rvert$		
$Q = \frac{1}{k} M$ (si procede)		
Puntos dobles		
Tipo de transformación		
Elementos característicos		
Descomposición canónica (si procede)		

2. Clasificación de transformaciones de $\Re^3$

a) Clasificar las siguientes transformaciones $\overline{\mathbf{X'}} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{X}}$ de $\Re^3$ y hallar sus elementos característicos:

N	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
M		
¿Es $MM^t=pI_n$?		
k		
$\lvert M \rvert$		
$Q=\frac{1}{k}M$ (si procede)		
Puntos dobles		
Tipo de transformación		
Elementos característicos		
Descomposición canónica (si procede)		

b) Clasificar las siguientes transformaciones $\overline{\mathbf{X'}} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{X}}$ de $\Re^3$ y hallar sus elementos característicos:

N	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -12 & 0 & 5 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
M		
¿Es $MM^t=pI_n$?		
k		
$\lvert M \rvert$		
$Q = \frac{1}{k}M$ (si procede)		
Puntos dobles		
Tipo de transformación		
Elementos característicos		
Descomposición canónica (si procede)		

3. Estudiar la semejanza T , tal que los puntos A=(1,2,3), B=(1,1,1), C=(-1,2,3) y D=(1,0,2) se transforman en A'=(-3,8,7), B'=(-3,2,4), C'=(3,8,7), y D'=(-3,5,1) respectivamente.

Solución:

4. Hallar las ecuaciones de los siguientes **movimientos** de E_3:

Se recuerda que los pasos a seguir son:

i) Hallar una base ortonormal B de E_3 adecuada para cada caso.
ii) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.
iii) Hallar la matriz M_{BC} asociada al movimiento respecto de la base canónica.
iv) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

a) Giro de ángulo α = - 45° alrededor de la recta que pasa por el punto A(1,1,1) y es paralela al vector $\vec{u} = (0,2,0)$

b) Simetría especular respecto del plano $\pi \equiv x + z + 2 = 0$.

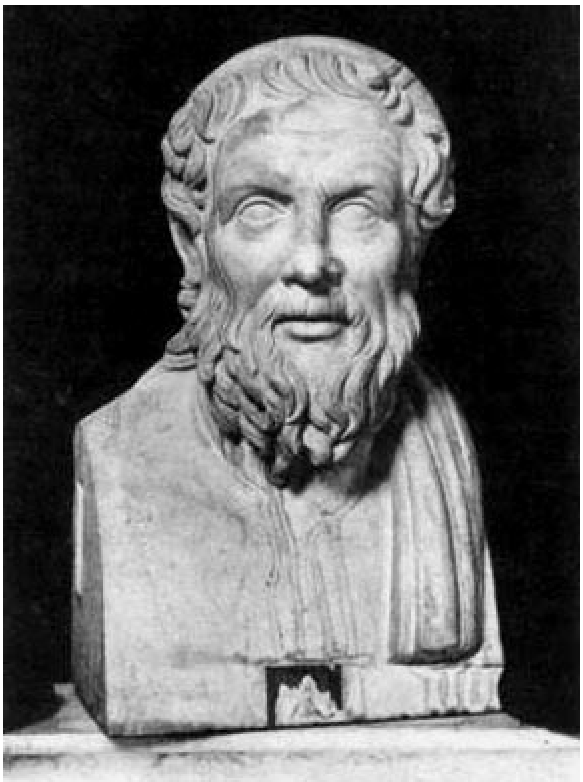
c) Simetría rotacional de plano $\pi \equiv y - 1 = 0$, eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ y ángulo α = -90°.

d) Simetría deslizante de plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y vector $\vec{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

e) Movimiento helicoidal de eje $e \equiv x = y + \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{2}{3}}{-1}$ ángulo α =-120° y vector $\vec{u} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

.

CÓNICAS



Apolonio de Perga
262 ? a.C. - 90 ? a.C.

Indicaciones

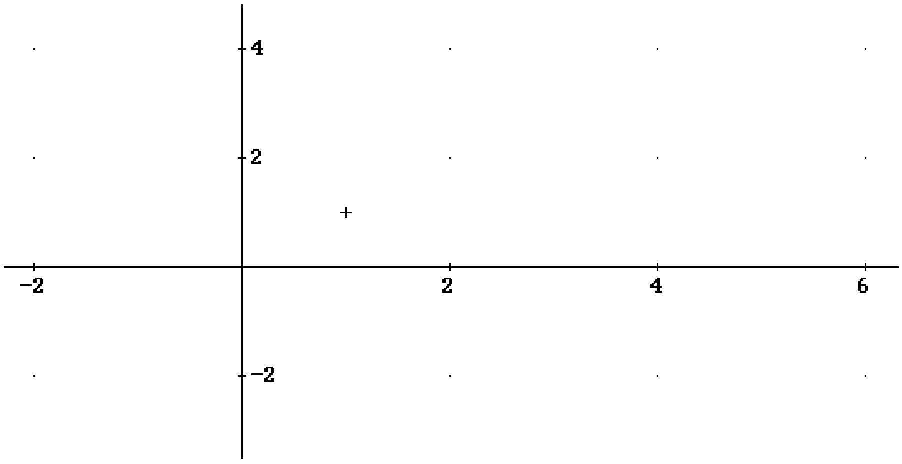
Llamando $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ a la matriz asociada a una cónica en un determinado sistema de referencia y $A_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ a la matriz de su forma cuadrática, ciertas funciones de DERIVE permiten calcular algunos invariantes y expresiones asociados a la ecuación de dicha cónica necesarios para su estudio:

Expresión	Función de DERIVE
A_c	**MINOR (A,1,1)**
$\lvert A \rvert$	**DET(A)**
$a_{11} + a_{22}$	**TRACE (A_c)**
$A_{11} + A_{22}$	**DET (MINOR(A, 2,2)) + DET(MINOR(A, 3, 3))**
Valores propios de A_c	**EIGENVALUES (A_C)**
Vectores propios de A_c	**EXACT_EIGENVECTOR (A_c, valor propio)**
$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	**DELETE_ELEMENT(A,1)**

1. Estudiar las siguientes cónicas:

a) $x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 2y + 1 = 0$

- Gráfica de la cónica



- Ecuación matricial

- Clasificación

- Ecuación reducida

- Excentricidad y parámetro de la cónica

- Eje y vértice. Dibujarlos

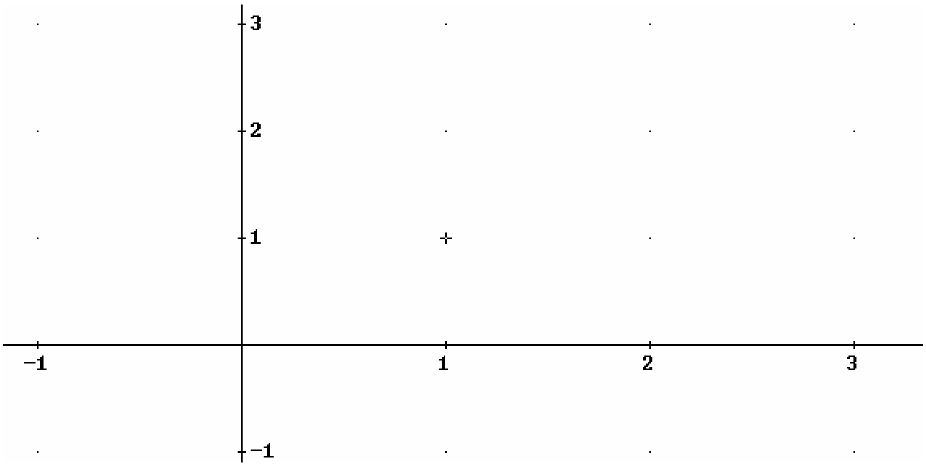
  Nota: Interseccionar la cónica con una recta genérica perpendicular al eje focal, obligando a que haya un único punto de corte (que será el vértice). El eje de la cónica se determina conociendo su dirección y sabiendo que pasa por el vértice.

- Foco y directriz. Dibujarlos.

$$\begin{cases} \text{Eje focal} \equiv \\ \text{circunf. de centro V y radio } \dfrac{p}{2} \equiv \end{cases}$$

b) $16x^2 + 19y^2 - 4xy - 48x - 44y + 61 = 0$

- Gráfica de la cónica



- Ecuación matricial

- Clasificación

- Ecuación reducida

- Semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica

- Centro C. Dibujarlo

- Ejes (indicando cuál es el focal). Dibujarlos

- Focos, vértices y directrices. Dibujarlos

Nota: Resolver el sistema

$$\begin{cases} \text{Eje focal} \equiv \\ \text{circunf. de centro C} = (\quad , \quad) \text{ y radio k} \equiv \end{cases}$$

Focos (Sustituir "k" por "c"=)

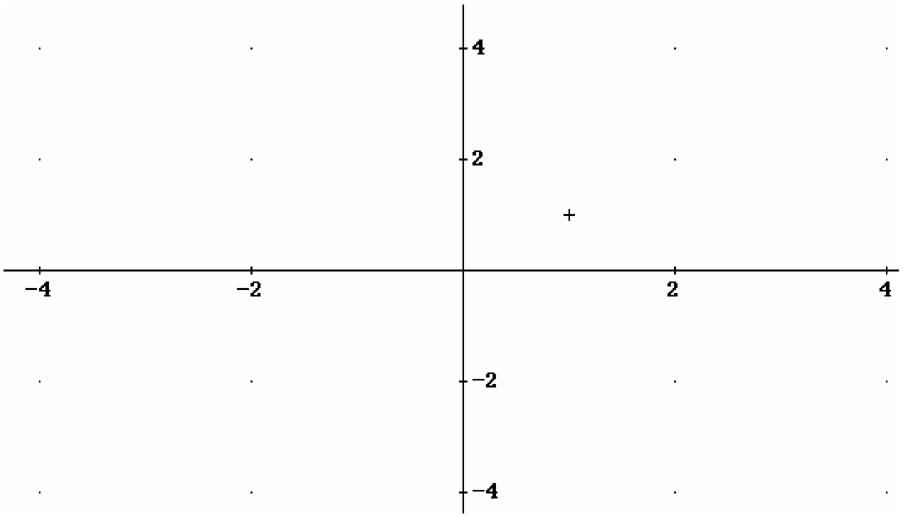
Vértices principales (Sustituir "k" por "a"=)

Vértices secundarios (Sustituir "k" por "b"= . Intersección con el eje no focal).

Directrices (Sustituir “k” por “a^2/c”=)

c) $2 + x^2 + 2xy = 0$

- Gráfica de la cónica



- Ecuación matricial

- Clasificación

- Ecuación reducida

- Semiejes, excentricidad y parámetro de la cónica

- Centro C. Dibujarlo

- Ejes (indicando cuál es el focal). Dibujarlos

- Focos, vértices y directrices. Dibujarlos

Nota: Resolver el sistema

$$\begin{cases} \text{Eje focal} \equiv \\ \\ \text{circunf. de centro } C = (\quad , \quad) \text{ y radio } k \equiv \end{cases}$$

Focos (Sustituir “k” por “c”=)

Vértices (Sustituir “k” por “a”=)

Directrices (Sustituir “k” por “a^2/c”=)

- Asíntotas. Dibujarlas

2. Clasificar y hallar la ecuación reducida de las siguientes cónicas:

a) $49x^2 + 25y^2 - 70xy + 35x - 25y + 6 = 0$

b) $7x^2 - 5y^2 + 2xy + 9x - 3y + 2 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$

3. Hallar las rectas tangentes a la cónica $x^2 + y^2 - xy + x + y = 0$, que sean paralelas al eje focal.

4. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(3,4), (-3,9), (-3,-1),\ (-9,4)$ **y** $(\frac{3}{5},0)$.