# Transformaciones geométricas

1.- Sean los *giros* $G$ y $G'$, de centros $O(0,0)$ y $O'(1,0)$ y ángulos respectivos 120° y $\alpha$. Hallar las ecuaciones de $GoG'$ y sus elementos característicos para:

a) $\alpha$=90°

b) $\alpha$=240°

**Solución**

2.- Clasificar las siguientes *transformaciones en el plano* y hallar sus elementos principales.

$$\text{a)}X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X;\ \text{b)}\ X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} X;\ \text{c)}\ X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

$$\text{d)}X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X;\quad \text{e)}X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + X;\qquad \text{f)}\ X' = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} X$$

**Solución**

3.- Clasificar las siguientes *transformaciones*

$$\text{a)}X' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X;\ \text{b)} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ \text{c)}X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

$$\text{d)}\ X' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix} X;\ \text{e)}\ X' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3X;\ \text{f)}X' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} X;\ \text{g)}\ X' = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} X$$

**Solución**

4.- Sea T la *transformación geométrica* de $\Re^3$ de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Obtener los valores de k para los cuales T es un *movimiento*

b) Clasificar T para aquellos valores de k para los que sea un *movimiento*

**Solución**

5.- Sean

$$T \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } T' \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

las ecuaciones correspondientes a dos *transformaciones* T y T' respectivamente. Se pide:

a) Clasificar las *transformaciones* T y T' obteniendo sus elementos característicos

b) Hallar las ecuaciones de la figura en que se transforma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ mediante las *transformaciones* T y T'.

**Solución**

6.- Determinar los elementos característicos de la *transformación geométrica* que transforma el punto A(1,1,2) en A'(2,-2,6) en los siguientes casos:

a) *traslación* b) *simetría central* c) *simetría especular* d) *homotecia* de razón 2

**Solución**

7.- Sea H la *homotecia* de centro (0,0) y razón 3. Sea A' el transformado del punto A(0,2). Determinar las ecuaciones de las siguientes *transformaciones*:

a) H(O,3)

b) H(A',1/3)

c) H(O,3)oH(A',1/3). ¿Qué tipo de *transformación* es?

d) H(A',2)oH(O,3). ¿Qué tipo de *transformación* es?

**Solución**

8.- Hallar la ecuación de la *semejanza* directa que transforma los puntos O(0,0) y P(1,2) en O'(15,-1) y P'(-7,-5) respectivamente.

**Solución**

9.- Escribir la ecuación matricial de la *semejanza* resultante de componer la *homotecia* de centro A(1,2) y razón k=10 y el *giro* de centro P(2,-1) y ángulo $\alpha$ tal que sen$\alpha$=3/5 y cos $\alpha$ = -4/5. Hallar los elementos de la *semejanza* resultante.

**Solución**

10.- Clasificar la siguiente *transformación geométrica* y obtener sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

11.- Se pide hallar, en el plano euclídeo:

a) La ecuación del *giro* de centro A (1,-1) y ángulo $\frac{\pi}{4}$.

b) La ecuación de la *homotecia* de centro B(1,1) y razón $-\sqrt{2}$.

c) La ecuación de la *semejanza* resultante de componer el giro con la homotecia anterior.

d) La *descomposición canónica* de la *semejanza* obtenida en el apartado c) indicando qué tipo de semejanza es.

Solución

12.- Dada la *transformación* $\Re^3$ de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Clasificarla y hallar sus elementos característicos.

b) Hallar el centro y radio de la esfera transformada de la esfera de centro (1,1,1) y radio 2, mediante la *transformación* anterior.

Solución

13.-En el plano vectorial $V_2$, con la base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ se consideran los vectores $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (-1,1)$ y las semirrectas vectoriales $D_{\vec{u}}$ y $D_{\vec{v}}$ que éstos determinan. Hallar en la *base* $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ las matrices de las *transformaciones ortogonales* tales que $f(D_{\vec{u}}) = D_{\vec{v}}$

Solución

14.- Sea $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ una *base ortonormal* de $V_2$.

a) Hallar la matriz que define la *simetría ortogonal* s, respecto de la recta vectorial engendrada por el vector $\vec{u} = (1,2)$.

b) Clasificar la *transformación ortogonal* f : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) Determinar la matriz que define la *simetría ortogonal* axial s' tal que f= sos' y la dirección del eje de s'-

Solución

15.- Estudiar las siguientes *transformaciones* indicando si son *ortogonales* y en caso de serlo, hallar su tipo y elementos geométricos.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\4&3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$$

**Solución**

16.- Dadas $H_1$, *homotecia* de centro $C_1(1,1,1)$ y razón $k_1=1/2$, y $H_2$ *homotecia* de centro $C_2(-1,1,-1)$ y razón $k_2=2$. Se pide:

a) Hallar las ecuaciones de $T=H_2 o H_1$, e identificar T.

b) Lo mismo para $T'=H_1 o H_2$.

c) Transformada mediante $H_1$ de la recta de ecuación: $x+1=-y=z$.

**Solución**

17.- Hallar la ecuación del *giro* de $R^3$ definidos por: la recta que pasa por A(1,1,0) y B(0,0,1), y transforma el punto P(0,1,0) en P'(1,1,1).

**Solución**

18.- Hallar las ecuaciones y los centros de las *semejanzas* que resultan de componer:

a) La *homotecia* $H_1$ del ejercicio 16 y el giro 17.

b) $H_1$ con la *simetría especular* de plano $\pi$: $x+y-z-1=0$.

**Solución**

19.- Clasificar los *movimientos* definidos por las siguientes ecuaciones y determinar sus elementos característicos:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&-1\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

**Solución**

20.- Indicar qué tipo de *transformación* corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones y hallar sus elementos característicos:

$$\text{a)}\ \begin{cases}x'=-x+2y+2z\\y'=-2x+y-2z\\z'=-2x-2y+z\end{cases};\quad \text{b)}\ \begin{cases}x'=-x-y+z-1\\y'=\sqrt{\frac{3}{2}}x-\sqrt{\frac{3}{2}}y\\z'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{2}z+\sqrt{2}\end{cases};\quad \text{c)}\ \begin{cases}x'=x+2y+2z\\y'=2x+y-2z\\z'=2x-2y+z\end{cases}$$

**Solución**

21.- Descomponer la *traslación* de vector (2,1,1) en producto de dos *simetrías* SoS', siendo el plano de S: $2x+y+z=1$.

Solución

22.- En un plano se consideran 4 *simetrías axiales* S1, S2, S3, S4, cuyos ejes respectivos son las rectas y=0; y=x; x=0; x=4. Se pide: a) Demostrar que el producto de esas simetrías, en el orden dado, es un *giro* del que se pide, el centro y el ángulo de giro. b) Hallar la ecuación de la figura C' transformada de la circunferencia $C=x^2+y^2=25$ por dicho giro. c) Si existe alguna *homotecia* que transforme C en C', halle su centro y su razón.

Solución

23.- a) Hallar las ecuaciones de la composición del *giro* de ángulo $\pi$ con respecto a la recta r: (0,0,1) + t (0,1,1) con la *traslación* de vector v = (1,1,0) y determinar de qué tipo de *movimiento* se trata.

b) Clasificar el *movimiento* dado por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

24.-

A) Calcular la ecuación matricial del *giro* $G_{e,\alpha}$ en el espacio cuyo eje es:

$e \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y ángulo de *giro* $\alpha = -\frac{\pi}{12}$.

B) Hallar la ecuación de la *homotecia* de centro C(2,2,-1) y razón k=3

C) Hallar la ecuación de la *transformación* $S = H_{C,k} \circ G_{e,\alpha}$.

D) Hallar la razón, el ángulo y el eje de la *semejanza* S del apartado anterior.

Solución

25.- A) Calcular la ecuación matricial del *giro* en el espacio cuyo

eje es: $\begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ ángulo es 180°.

B) Hallar la ecuación de la *homotecia* H de centro (2, 1, 2) y razón k = - 3.

C) Hallar la ecuación de la *transformación* ToH, siendo T el *movimiento* del apartado A).

D) ¿Es ToH una *semejanza* directa o inversa?

E) Hallar la razón, el ángulo y el eje de *semejanza*.

Solución

26.- Dada la *transformación geométrica* del espacio euclídeo $E^2$:

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{24}{25} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} X \quad \text{con } \alpha \neq 0, \alpha \in R\text{, se pide:}$$

Clasificar la *transformación*, según los valores de α.

Elementos característicos en cada caso.

*descomposición canónica* de la *transformación* para $\alpha = \frac{1}{25}$, indicando la matriz de la *homotecia* y la matriz del *movimiento*.

**Solución**

27.- Dada la *transformación geométrica* del espacio euclídeo $E^3$:

$$X' = N\,X, \text{ siendo } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{18}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} & 0 \\ -\frac{24}{25} & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\text{, se pide:}$$

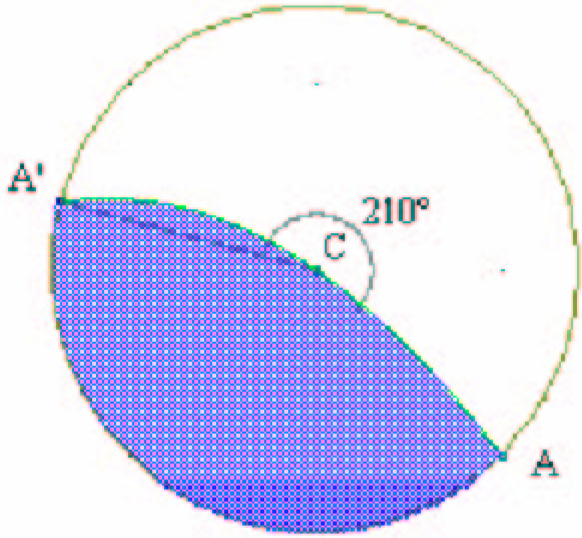
a) Clasificarla.

b) Elementos característicos.

c) Descomponer la *transformación* en el producto de 4 *simetría especulares*.

**Solución**

28.- La gráfica adjunta representa un jardín con lago Se piden las *coordenadas* de A' sabiendo que A(1,-3) y ambos puntos A y A' se encuentran en una circunferencia de centro C(0,-2) y que el arco AA' es de 210°.



Solución

29.- De las *transformaciones geométricas* dadas por las siguientes ecuaciones se pide decir qué tipo de transformación es, si es directa e inversa y, en su caso, dar la razón k.

1. $$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-132&-23&-24&-36\\-44&-24&41&-12\\-66&-36&-12&31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&0&0&-5\\0&0&-5&0\\8&5&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

30.- a) Clasificar la *transformación* $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}$ y hallar sus elementos característicos.

b) Clasificar la *transformación* $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&-2\\0&0&-2&1\\0&-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

Solución

31.- Se pide hallar, en el plano euclídeo:

a) La ecuación del *giro* de dentro A(1,-1) y ángulo 45°.

b) La ecuación de la *homotecia* de centro B(1,1) y razón $-\sqrt{2}$.

c) La ecuación de la *semejanza* resultante de componer el *giro* con la *homotecia* anterior.

d) La *descomposición canónica* de la semejanza obtenida en el apartado c) indicando qué tipo de *semejanza* es.

Solución

32.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la *transformación*:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\21&-4&-3\\-5&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

33.- a) Obtener la ecuación matricial de la *simetría deslizante* S de plano $x+y+1=0$ y de vector *traslación* (0,0,2).

b) Obtener la imagen de los puntos O=(0,0,0) y P=(-1,-3,2/3) mediante S.

Solución

34.- Se pide hallar en el plano euclídeo:

a) La ecuación del *giro*, G, de centro A (1,0) y ángulo $\pi$

b) La ecuación de la *homotecia*, H, de centro B (1,1) y razón k =-2

c) La ecuación de la *simetría axial*, S, de eje $3x + 4y = 0$

d) La ecuación de la *semejanza* resultante del producto S°H°G

e) Los elementos de la *semejanza* resultante

Solución

35.-

a) Calcular la ecuación matricial de un *giro* en el espacio cuyo eje es: $\vec{X} = (1,\ 2,\ 3) + (0, -1,\ 1)\ t$ y cuyo ángulo es: 180°.

b) Hallar la ecuación de la *homotecia* de centro ( 1, -1, 0 ) y razón k=2

c) Hallar la ecuación de la transformación H°T siendo T el *movimiento* del apartado a)

d) ¿Es H°T una *semejanza* directa o inversa?

e) Hallar la razón, el ángulo y el eje de *semejanza* de H°T.

Solución

36.- Clasificar las siguientes *transformaciones* y hallar sus elementos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&4\\6&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&\frac{1}{2}&0\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

Solución

37.- Dada la *transformación geométrica* $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&0&-3&0\\3&0&0&3\\-3&-3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Clasificar y hallar sus elementos característicos.

b) Dada la esfera de centro (1,1,1) y radio 2, hallar el centro y radio de su transformada mediante la *transformación* anterior.

Solución

38.- Dada la *transformación geométrica* T de $R^3$ de ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Clasificar y hallar sus elementos característicos.

b) Hallar la ecuación de la esfera transformada de la esfera de centro (1, 1, 1) y radio 2, mediante T.

c) Hallar la ecuación de la *transformación* inversa de T.

**Solución**

39.- a) Hallar la ecuación del *giro* G de centro A (1, -2) y ángulo $\alpha = 150^\circ$.

b) Hallar la ecuación de la curva L transformada de la elipse $E \equiv \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ mediante el *giro* G.

c) Sin realizar ningún cálculo, razonar porqué L es una *cónica* y de qué tipo es.

d) Dar la *excentricidad* y el *centro* de L.

**Solución**

40.- Sea S la *semejanza* de centro C y razón k que transforma los puntos $A(1,-1,\ 1)$, $B(-1,\ 0,\ 2)$, $C(2,\ 1,\ 1)$ y $D(-3,\ 1,\ 4)$ en los puntos $A'(15,-4,\ -12)$, $B'(20,\ 6,\ -7)$, $C'(15,\ -9,\ -2)$ y $D'(30,\ 16,\ -2)$, respectivamente.

a) Hallar la ecuación de S.

b) Hallar el centro C, la razón k y el ángulo de giro $\alpha$ de la *descomposición canónica* de S.

**Solución**

41.- a) Sean las *simetrías axiales*, $S_1$, $S_2$ de ejes $e_1$: y = x; $e_2$: x = 5. Calcular la ecuación matricial de $S_2 \circ S_1$ y sus elementos característicos.

b) Clasificar la *transformación* $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y hallar sus elementos característicos y *descomposición canónica*.

**Solución**

42.- Hallar una ecuación matricial de la *simetría axial* plana S de eje la recta $e \equiv x - y - 1 = 0$.

**Solución**

43.- Sea T una *transformación afín* definida por sus ecuaciones:

$x' = -2 - 2x$

$y' = \ 2 - 2\,y$

$z' = -\,2 - 2\,z$

a) Clasificar T y hallar sus elementos característicos.

b) Si un triángulo tiene como área 3 ($u^2$). ¿Cuál es el *área* de su triángulo transformado por T?

**Solución**

44.- A) Clasificar la siguiente *transformación geométrica*. Obtener sus elementos característicos y la descomposición canónica. $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -1 & 1\\1+2\sqrt{2} & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

B) Determinar los elementos característicos de la *transformación geométrica* que transforma el punto A(2, 2, 5) en A' (4, -4, 15) en los siguientes casos:

a) *Simetría especular*.

b) *Homotecia* de razón 2.

**Solución**

45.- Hallar la ecuación matricial del *giro* en $E_3$ cuyo eje es la recta determinada por el punto A(1,1,1) y el vector $\vec{u}(0,2,0)$ siendo el ángulo $\alpha = -45°$.

**Solución**

46.- Componer el *giro* G de centro A(1,2) y ángulo $\alpha$ = 60° con la *traslación* de vector $\vec{u}$=(3,5). Clasificar y hallar los elementos de la transformación obtenida.

**Solución**

47.- a) Hallar la ecuación matricial del *giro* G en el espacio, cuyo eje es la recta determinada por el punto A (1, 2, 3) y el vector $\vec{u} = (0,0,4)$ siendo el ángulo de *giro* $\alpha$ = - 30°.

b) Hallar la ecuación matricial de la *homotecia* H de centro A (1, 2, 3) y razón k=-3.

c) Calcular los elementos característicos del producto $G \circ H$.

**Solución**

48.- Dados el vector $\vec{u} = (3,4)$ y el punto $A(1,-1)$. Se pide:

a) Hallar la ecuación del movimiento que resulta de componer la *traslación* de vector $\vec{u}$ y el *giro* de centro A y ángulo $\alpha$ tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

b) Identificar los elementos característicos del *movimiento* resultante.

c) Razonar si el *movimiento* anterior es conmutativo.

d) Hallar las transformadas de la *elipse* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ y de la *parábola* $y = x^2$.

**Solución**

49.- Clasificar la *transformación* $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\12&0&0&-3\\0&0&3&0\\12&-3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$ y hallar sus elementos característicos.

Solución

50.- Se pide hallar, en el plano euclídeo:

a. La ecuación del *giro* de Centro A(1,2) y ángulo $\frac{\pi}{4}$

b. La ecuación de la *traslación* de vector $\vec{u}=(1,1)$

c. $G(A,\frac{\pi}{4})\circ T(\vec{u})$. ¿Qué tipo de *transformación* es? Razonar respuesta.

Solución

51.- Clasificar la *transformación* $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\-5&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ y hallar sus elementos característicos.

Solución

52.- Calcular la ecuación matricial del *giro* respecto la *base canónica*, sabiendo que le eje de giro es: (x,y,z) = (2,1,0) + t(0,-1,3) y el ángulo de giro es -30°.

Solución

53.- a) Hallar la ecuación matricial del *giro* G que tiene por eje de *giro* el eje Z de coordenadas y por ángulo de giro $\alpha$ = -60°

b) Hallar la ecuación de la *homotecia* H de centro C(0,0,10) y razón $k=-\frac{1}{3}$.

c) Clasificar y hallar tres elementos característicos de $H\circ G$.

d) Sea $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}$ la ecuación matricial de la *simetría* S y T la *traslación* de vector $\vec{u}=(1,-1)$, se pide hallar la ecuación del *movimiento* $T\circ S$.

e) Calcular los elementos característicos del *movimiento* $T\circ S$ hallado en d).

Solución

54.- Dada la *transformación geométrica* de ecuación: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8&-6\\6&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

a) Clasificarla.

b) Calcular sus elementos característicos.

Solución

55.- Estudiar si la siguiente ecuación corresponde a una *semejanza* del espacio. En caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&\sqrt{2}&1\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&1&-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Solución

56.- Hallar las ecuaciones de la *rotación* de eje $e\equiv\begin{cases}x=0\\z=2\end{cases}$ y ángulo $\alpha=-90^\circ$.

Solución

57.- Obtener las ecuaciones de la *transformación geométrica* siguiente:
*GIRO*: eje r ≡ (1,0,0)+(-1,-1,1)t y ángulo: 120°.
Y obtener los transformados de los siguientes elementos:
Plano: x+2y+3z=1; Punto: (3,2,1)

Solución

58.- Obtener las ecuaciones de la *transformación geométrica* siguiente:
GIRO: eje r ≡ (1,0,0)+(-1,-1,1)t y ángulo: 240°.
Y obtener los transformados de los siguientes elementos:
Plano: x+2y+3z=1; Punto: (3,2,1)

Solución

59.- Obtener la ecuación matricial de la *simetría especular* respecto del plano:

$$40x-60y-40\sqrt{3}z=1$$

Y obtener los transformados de los siguientes elementos:
Plano: x+2y+3z=1; Punto: (3,2,1)

Solución

60.- En el espacio euclídeo tridimensional, se pide:
a) Hallar las ecuaciones de la *semejanza* directa de razón k = 4, centro el punto C(1,1,1), ángulo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ y cuyo eje es la recta $e\equiv(x,y,z)=(1,1,1)+t(1,1,0)$.
b) Hallar las ecuaciones de la transformada de la recta e:
c) Hallar la ecuación del transformado del plano z = 0.

Solución

61.-

a) Analizar para qué valores de los parámetros a, b y c, la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

es un *movimiento*. En este caso, clasificarlo.

b) Hallar las ecuaciones de la *simetría axial* plana S de eje la recta $e \equiv x - y - 1 = 0$.

Solución

62.- a) Hallar la ecuación de la *semejanza* inversa que transforma los puntos P(0,0) y Q(0, $\sqrt{3}$) en P'(2,- $\sqrt{3}$) y Q'(5,0) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de la *semejanza* obtenida en a).

Solución

63. Obtener la ecuación matricial de la *simetría especular* del plano 4x + 3z = 1.

Solución

64.- Hallar la ecuación de la *rotación* $G_{(e,\alpha)}$ donde el eje es $e \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}$ y el ángulo $\alpha$ = $2\pi/3$.

Solución

65.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la *transformación geométrica* dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1-2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

66.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la *transformación geométrica* dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3-\sqrt{6} & 1 & \sqrt{6} & 3 \\ 3 & -\sqrt{6} & -2 & \sqrt{6} \\ 3+\sqrt{6} & 3 & -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

67.- a) Hallar la ecuación del *Giro* del plano $G_{(A,\alpha)}$ donde A(-1,2) y el ángulo $\alpha=3\pi/4$. b) Hallar la ecuación de la *Homotecia* $H_{(A,2)}$.

**Solución**

68.- Hallar la ecuación de la *rotación* $G_{(e,\alpha)}$ donde el eje es e≡ $\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1-\lambda\,, \\ z = 1 \end{cases}$ $\lambda \in R$ y el ángulo $\alpha=3\pi/4$.

**Solución**

69.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la *transformación geométrica* dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ 4\sqrt{2} & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

**Solución**

70.- Hallar la ecuación, el *centro* y la *razón de la semejanza* directa que transforma los puntos A(1,0) y B($\sqrt{2}$,-1) en A'(-8$\sqrt{2}$,-1) y B'(-8,7) respectivamente.

**Solución**

71.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la *transformación geométrica* dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Solución**

72.- a) Hallar la ecuación de la *transformación* resultante de componer el *giro* $G_{(A;\alpha)}$ con la *homotecia* $H_{(C;\,2)}$, donde A (-1,1), C (1,0) y $\alpha= -\pi/4$.

b) Razona qué *tipo de* transformación geométrica es la obtenida en el apartado a) y da los *elementos característicos* que se deducen sin hacer cálculos.

c) Calcula los *puntos invariantes* de la *transformación* obtenida en a).

**Solución**

73.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la *transformación geométrica* dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

**74.- Obtener la ecuación matricial del *giro* de 60º alrededor del punto (1,1) del plano euclídeo.**

Solución

**75.- Clasificar la siguiente *transformación* del espacio euclideo obteniendo sus elementos característicos.**

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

**76.- De un *giro* del plano Euclídeo se sabe que transforma el A en A' y el punto B en B'. Si las *coordenadas* de dichos puntos son las siguientes:**

**A=(100,120), B=(-100,-200), A'=(-561.525,68.376), B'=(-281.116,-184.154)**

**Se pide calcular el *ángulo de giro*, las *coordenadas* del *Centro* y el transformado del origen de *coordenadas*.**

Solución

**77.- Clasificar la siguiente *transformación* del espacio**

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 2 & -1\\ 3 & -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

**78.- Sean H la *homotecia* de centro A (1, 0) y razón k = 2, G el *giro* de centro B (1, 1) y ángulo $\alpha = 90°$ y S la *simetría axial* de eje $e \equiv y = x$.**
**Hallar la ecuación de la transformación producto: $H_{A,k=2} \circ G_{B,\alpha=90°} \circ S_e$.**

Solución

79.- Clasificar y calcular los elementos característicos de la *transformación* del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\1&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

80.- Dada la *transformación geométrica* que tiene por ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2.098076211&2&-3.464101614\\-2.366025403&3.464101614&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Probar que se trata de una *semejanza directa*.

b) Hallar la *razón*, *centro* y el ángulo

Solución

81.- Hallar la ecuación del *giro* en el espacio alrededor de la *recta* $x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ y de ángulo $\alpha=\pi/3$.

Solución

82.- Clasificar, *sin hallar los elementos característicos,* las siguientes *transformaciones geométricas*:

a) $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\10&-3&-4\\-8&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{1+\sqrt{3}}{2}&0&0&-1\\\frac{1-\sqrt{3}}{2}&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

Solución

83.- a) Hallar la ecuación de la transformación resultante de componer el giro alrededor de la recta paralela al eje z que pasa por A(1,1,0) y ángulo $\alpha=\pi/6$ con la *homotecia* de centro en A y k=3. b) Demuestra que la transformación obtenida es una *semejanza directa*.

Solución

PROBLEMAS PROPUESTOS:

P1.-En el espacio afín euclídeo $E_3$ se considera la transformación T dada por T(x,y,z) = (z,x,y)

a) Demostrar que T es una *isometría*

b) Hallar los *puntos dobles*

c) ¿Qué clase de *transformación geométrica* es?

P2.- Un *triángulo equilátero* tiene un vértice en el origen, y otro en el punto (1,0). Hallar las coordenadas del tercer vértice.

P3.- Clasificar las siguientes *transformaciones* en el plano y hallar sus elementos principales $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

P4.- Dados los puntos A(0,1) y B(-1,-1), calcular las coordenadas del punto C sabiendo que la longitud del segmento AC es la mitad de la del segmento AB y que el ángulo BAC mide 30°

P5.- A la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, de centro A, se le aplica un *giro* de centro el origen de coordenadas y amplitud 60°, transformándose en C'. Esta circunferencia, mediante la *homotecia* de centro A y razón 2, se transforma en C''. Hallar la ecuación de C'' las coordenadas del centro de la *homotecia* inversa que transforma C' en C''.

P6.- El cuadrado ABCD de vértices A(0,0), B(-5/2,2), C(-5/2,5/2), D(0,5/2) se transforma mediante una semejanza directa S de centro O(6,0) en A'B'C'D' siendo A'(6,3). Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las *semejanza*

b) Determinar un *giro* G y una *homotecia* H tal que S = HoG

c) La figura transformada del cuadrado

P7.- Escribir la ecuación de la *semejanza* resultante de componer la *homotecia* de centro A (1,2) y razón 10 y el *giro* de centro P(2,-1) y ángulo $\alpha$ tal que sen ($\alpha$)= 3/5 y cos($\alpha$) = -4/5

P8.- Hallar la ecuación de la *semejanza* directa que transforma los puntos O(0,0) y A(1,2) en O'(15,-1) y A'(-7,-5) respectivamente.

P9.- Un rayo luminoso parte del punto F(5,10) y después de reflejarse en la recta r: 3x+4y=30, pasa por el punto P(13,4). Determinar:

a) Coordenadas del punto de la recta r en el que el rayo luminoso cambia de dirección

b) Longitud del camino recorrido por el rayo desde F hasta P y explicar porqué esa longitud es mínima.

Solución

**SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS:**

P1.-En el espacio afín euclídeo $E_3$ se considera la transformación T dada por T(x,y,z) = (z,x,y)

a) Demostrar que T es una isometría
b) Hallar los puntos dobles
c) ¿Qué clase de transformación geométrica es?

**P1.- a) T es una isometría $\Leftrightarrow \forall A, B \in E, d(A,B) = d(T(A),T(B))$**

**b) X=Y=Z**

**c) Es una rotación alrededor del eje x=y=z de amplitud 120° ó -120° según la orientación del eje.**

P2.- Un triángulo equilátero tiene un vértice en el origen, y otro en el punto (1,0). Hallar las coordenadas del tercer vértice.

**P2.- Dos soluciones** $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P3.- Clasificar las siguientes transformaciones en el plano y hallar sus elementos principales $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

**P3.- a) Es una rotación de centro (1,1) y amplitud -30°**

**b) Es una simetría axial respecto del eje $(2-\sqrt{3})x + y = 0$**

P4.- Dados los puntos A(0,1) y B(-1,-1), calcular las coordenadas del punto C sabiendo que la longitud del segmento AC es la mitad de la del segmento AB y que el ángulo BAC mide 30°

**P4.- El punto C** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P5.- A la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, de centro A, se le aplica un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 60°, transformándose en C'. Esta circunferencia, mediante la homotecia de centro A y razón 2, se transforma en C''. Hallar la ecuación de C'' las coordenadas del centro de la homotecia inversa que transforma C' en C''.

**P5.-** $C' \equiv (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 4; C'' \equiv x^2 + (y-4\sqrt{3})^2 = 16; \text{Centro}\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

P6.- El cuadrado ABCD de vértices A(0,0), B(-5/2,2), C(-5/2,5/2), D(0,5/2) se transforma mediante una semejanza directa S de centro O(6,0) en A'B'C'D' siendo A'(6,3). Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las semejanza
b) Determinar un giro G y una homotecia H tal que S = HoG
c) La figura transformada del cuadrado

**P6.- a)** $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

**b) rotación de centro (6,0) y amplitud – 90° y la homotecia de centro (6,0) y razón ½**

**c) A'(6,3), B'(6,17/4), C'(29/4, 17/4), D'(29/3)**

P7.- Escribir la ecuación de la semejanza resultante de componer la homotecia de centro A (1,2) y razón 10 y el giro de centro P(2,-1) y ángulo $\alpha$ tal que sen ($\alpha$)= 3/5 y cos($\alpha$) = -4/5

**P7.-** $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 21 & -8 & -6 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

P8.- Hallar la ecuación de la semejanza directa que transforma los puntos O(0,0) y A(1,2) en O'(15,-1) y A'(-7,-5) respectivamente.

**P8.-** $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -8 & -6 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

P9.- Un rayo luminoso parte del punto F(5,10) y después de reflejarse en la recta r : 3x+4y=30, pasa por el punto (P(13,4). Determinar:

d) Coordenadas del punto de la recta r en el que el rayo luminoso cambia de dirección
e) Longitud del camino recorrido por el rayo desde F hasta P y explicar porqué esa longitud es mínima.

**P9.- a) R(6,3)**

**b) la distancia mínima es** $10\sqrt{2}$

**SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS:**

P1.-En el espacio afín euclídeo $E_3$ se considera la transformación T dada por T(x,y,z) = (z,x,y)

a) Demostrar que T es una isometría
b) Hallar los puntos dobles
c) ¿Qué clase de transformación geométrica es?

**P1.- a) T es una isometría $\Leftrightarrow \forall A, B \in E, d(A,B) = d(T(A), T(B))$**

**b) X=Y=Z**

**c) Es una rotación alrededor del eje x=y=z de amplitud 120° ó -120° según la orientación del eje.**

P2.- Un triángulo equilátero tiene un vértice en el origen, y otro en el punto (1,0). Hallar las coordenadas del tercer vértice.

**P2.- Dos soluciones $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$**

P3.- Clasificar las siguientes transformaciones en el plano y hallar sus elementos principales $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$

**P3.- a) Es una rotación de centro (1,1) y amplitud -30°**

**b) Es una simetría axial respecto del eje $(2-\sqrt{3})x + y = 0$**

P4.- Dados los puntos A(0,1) y B(-1,-1), calcular las coordenadas del punto C sabiendo que la longitud del segmento AC es la mitad de la del segmento AB y que el ángulo BAC mide 30°

**P4.- El punto $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$**

P5.- A la circunferencia $C \equiv x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, de centro A, se le aplica un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 60°, transformándose en C'. Esta circunferencia, mediante la homotecia de centro A y razón 2, se transforma en C''. Hallar la ecuación de C'' las coordenadas del centro de la homotecia inversa que transforma C' en C''.

**P5.-** $C' \equiv (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 4; C'' \equiv x^2 + (y-4\sqrt{3})^2 = 16; Centro\left(\frac{4}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

P6.- El cuadrado ABCD de vértices A(0,0), B(-5/2,2), C(-5/2,5/2), D(0,5/2) se transforma mediante una semejanza directa S de centro O(6,0) en A'B'C'D' siendo A'(6,3). Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las semejanza
b) Determinar un giro G y una homotecia H tal que S = HoG
c) La figura transformada del cuadrado

**P6.- a)** $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

**b) rotación de centro (6,0) y amplitud – 90° y la homotecia de centro (6,0) y razón $\frac{1}{2}$**

**c) A'(6,3), B'(6,17/4), C'(29/4, 17/4), D'(29/3)**

P7.- Escribir la ecuación de la semejanza resultante de componer la homotecia de centro A (1,2) y razón 10 y el giro de centro P(2,-1) y ángulo $\alpha$ tal que sen $(\alpha)$= 3/5 y cos$(\alpha)$ = -4/5

**P7.-** $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 21 & -8 & -6 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

P8.- Hallar la ecuación de la semejanza directa que transforma los puntos O(0,0) y A(1,2) en O'(15,-1) y A'(-7,-5) respectivamente.

**P8.-** $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -8 & -6 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

P9.- Un rayo luminoso parte del punto F(5,10) y después de reflejarse en la recta r : 3x+4y=30, pasa por el punto (P(13,4). Determinar:

c) Coordenadas del punto de la recta r en el que el rayo luminoso cambia de dirección
d) Longitud del camino recorrido por el rayo desde F hasta P y explicar porqué esa longitud es mínima.

**P9.- a) R(6,3)**

**b) la distancia mínima es** $10\sqrt{2}$

## Rotación o giro

Las transformaciones ortogonales directas de un espacio vectorial $V_2$ son **rotaciones o giros vectoriales de $V_2$** y su matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

**La ecuación de la rotación G (A,$\alpha$)** del espacio euclídeo $E_2$, de centro A=$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y ángulo $\alpha$, es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$.•

**Rotación vectorial de $V_3$**, es toda transformación ortogonal f de $V_3$, cuyo subespacio F de vectores invariantes sea una recta (dim F= 1). A la recta vectorial F se le denomina eje de la rotación y, el ángulo $\alpha$ de la rotación y su matriz asociada será $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ o una semejante a ella.

**La ecuación de la rotación G(e,α)**, considerando la referencia R=$\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal, tal que $\vec{u}_1$ sea paralelo al eje e y A=$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ es un punto cualquiera del eje, es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}.$$

## Transformación geométrica

Sea $E_n$ un espacio afín euclídeo de dimensión n. **Transformación geométrica** de $E_n$, es toda aplicación $T: E_n \to E_n$ biyectiva.

## Isometría

Sea V el R-espacio vectorial asociado al espacio afín euclídeo $E_n$. Denotando por d la métrica definida en E, la transformación geométrica $T: E_n \to E_n$ es una **isometría** o **movimiento** si verifica que para todo par de puntos A, B de $E_n$: d(T(A),T(B))=d(A,B).

Si M es la matriz ortogonal que define f (la aplicación vectorial asociada), respecto de cierta base ortonormal, podemos escribir $T(X) = T(O) + M\vec{u}$, o bien, $X' = O' + M\overrightarrow{OX}$, expresiones que constituyen las ecuaciones vectoriales de T.

## Traslación

**T es la traslación** de vector $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$. Se designa $T_{\vec{u}}$

En el plano:

**La ecuación de la traslación** $T_{\vec{u}}$, de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

En el espacio:

**La ecuación de la traslación** $T_{\vec{u}}$, de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$, respecto de cualquier referencia R, es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

## Simétrico

- **Simétrico:** que tiene simetría, puede ser respecto de un punto (central), de una recta (axial), de un plano (especular) o de otro elemento.

- **Elemento simétrico**: el que, operado con su **elemento** correspondiente, da como resultado el **elemento** neutro. En la suma se llama **opuesto** y en el producto **inverso**.

- Un endomorfismo f del espacio vectorial euclídeo V es **simétrico** cuando se verifica la siguiente igualdad entre productos escalares:

$$\vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right)=\vec{y}\cdot f\left(\vec{x}\right),\ \forall \vec{x},\vec{y}\in V.$$

## Simetría especular

Una transformación ortogonal de $V_3$ es una **simetría ortogonal** respecto de un plano, si y sólo si, el subespacio F de vectores invariantes tiene dimensión 2, F es el plano base de la simetría. La denotaremos por $S_F$ y se denomina **simetría especular de $V_3$** de base F.

**La ecuación de la simetría especular** $S_\pi$ de plano $\pi = A + F$ considerando la referencia R=$\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal, tal que los vectores $\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sean paralelos a $\pi$, es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$

Siendo $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un punto de $\pi$ respecto de R:

## Homotecia

Sea $V_n$ el R-espacio vectorial euclídeo asociado a $E_n$, **homotecia vectorial** de $V_n$ de razón $k \neq 0$ es toda transformación lineal:

$$\begin{aligned} V_n &\longrightarrow V_n \\ \vec{u} &\longrightarrow \vec{u}' = k\,\vec{u} \end{aligned}.$$ Se designa por $h_k$.

Sea En espacio afín euclídeo de dimensión n cuyo R-espacio vectorial asociado es $V_n$. **Homotecia afín** es toda transformación geométrica H de $E_n$ cuya transformación lineal de $V_n$ asociada sea una homotecia vectorial $h_k$ dónde $k \neq 0,1$. Fijada una referencia ortonormal de $V_n$, su matriz asociada es, por tanto, de la forma $k\, I_n$.

Si $k>0$ se dice que la homotecia es **directa**.

Si $k<0$ se dice que la homotecia es **inversa**.

# Semejanza

**Semejanza** de $E_n$ es toda transformación geométrica S de $E_n$ que cumpla la siguiente condición: Para cualesquiera A,B $\in$ $E_n$ se cumple que $d\left(S(A),S(B)\right) = kd\left(A,B\right)$ siendo $k \in R$ y k>0.

El número k se denomina **razón** de la semejanza.

## Semejanzas del espacio

Las semejanzas **directas** del espacio afín tridimensional quedan determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)}$ $= H_{(C,k)} \circ G_{(e,\alpha)} = = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left. \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{array} \right\rangle$

Las semejanzas **inversas** del espacio afín tridimensional quedan determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} =$ $H_{(C,-k)} \circ G_{(e,\alpha)} = = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,-k)}$

Su ecuación es $X' = C - kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left. \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{array} \right\rangle$

## Semejanzas del plano

Las semejanzas **directas** del plano afín quedan determinadas por el centro C, la razón k y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(C,\alpha)} = G_{(C,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left. \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(C,\alpha)} \end{array} \right\rangle$. Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Las semejanzas **inversas** del plano afín quedan determinadas por el centro C, la razón k y el eje e de la simetría que recibe el nombre de eje de la semejanza. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_e = S_e \circ H_{(C,k)}$

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left. \begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la simetría } S_e \end{array} \right\rangle$. Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

# Descomposición canónica

- **En el espacio**

Las **semejanzas directas** del espacio afín tridimensional quedan determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(e,\alpha)} = = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{matrix} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{matrix}\right\rangle$

Las **semejanzas inversas** del espacio afín tridimensional quedan determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,-k)} \circ G_{(e,\alpha)} = = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,-k)}$

Su ecuación es $X' = C - kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{matrix} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{matrix}\right\rangle$

- **En el plano**

Las **semejanzas directas** del plano afín quedan determinadas por el centro C, la razón k y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(C,\alpha)} = G_{(C,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{matrix} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(C,\alpha)} \end{matrix}\right\rangle$. Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Las **semejanzas inversas** del plano afín quedan determinadas por el centro C, la razón k y el eje e de la simetría que recibe el nombre de eje de la semejanza. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_e = S_e \circ H_{(C,k)}$

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{matrix} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la simetría } S_e \end{matrix}\right\rangle$. Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

## Base ortonormal o métrica

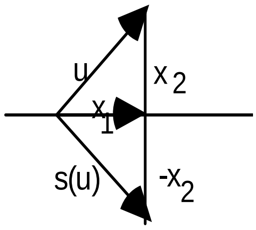
La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1,\ i=1,2,...,n$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

## Transformación ortogonal

Las aplicaciones $f: V \longrightarrow V$ biyectivas, lineales y que conservan el producto escalar son **transformaciones ortogonales**. La ecuación es de la forma X'=MX, donde es la matriz asociada a f y tiene por columnas las coordenadas de los transformados de los vectores de la base en cuyo caso M es una matriz ortogonal.

## Simetría ortogonal de $V_n$

Sea $S: V_n \longrightarrow V_n$ y $F \subset V_n$ un subespacio vectorial del espacio vectoria $V_n$ ; S es una **simetría ortogonal** respecto de F si S es una simetría respecto de F de dirección $F^{\perp}$.




$\forall\ \vec{u} \in V_n$ como $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in F,\ \ \vec{x}_2 \in F^{\perp}$ únicos entonces $S(\vec{u}) = S(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

# Semejanza

**Semejanza** de $E_n$ es toda transformación geométrica S de $E_n$ que cumpla la siguiente condición: Para cualesquiera A,B $\in$ $E_n$ se cumple que $d\left(S(A),S(B)\right) = kd\left(A,B\right)$ siendo $k \in$ R y k>0.

El número k se denomina **razón** de la semejanza.

## Semejanzas del espacio

Las semejanzas **directas** del espacio afín tridimensional quedan determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(e,\alpha)} = = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{array}\right\rangle$

Las semejanzas **inversas** del espacio afín tridimensional quedan determinadas por el centro C, la razón k, el eje e y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,-k)} \circ G_{(e,\alpha)} = = G_{(e,\alpha)} \circ H_{(C,-k)}$

Su ecuación es $X' = C - kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(e,\alpha)} \end{array}\right\rangle$

## Semejanzas del plano

Las semejanzas **directas** del plano afín quedan determinadas por el centro C, la razón k y el ángulo $\alpha$ de la rotación. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ G_{(C,\alpha)} = G_{(C,\alpha)} \circ H_{(C,k)}$.

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la rotación } G_{(C,\alpha)} \end{array}\right\rangle$. Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Las semejanzas **inversas** del plano afín quedan determinadas por el centro C, la razón k y el eje e de la simetría que recibe el nombre de eje de la semejanza. $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_e = S_e \circ H_{(C,k)}$

Su ecuación es $X' = C + kQ\overrightarrow{CX}$ donde $\left.\begin{array}{l} k = \text{razón de la semejanza} \\ Q = \text{matriz de la simetría } S_e \end{array}\right\rangle$. Respecto de la referencia canónica $R = \left\{O; \vec{i}, \vec{j}\right\}$ la ecuación sería:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\operatorname{sen}\alpha \\ k\operatorname{sen}\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

## Simetría axial

Las transformaciones ortogonales inversas de un espacio vectorial $V_2$ son **simetrías axiales vectoriales de $V_2$** y su matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

**La ecuación de la simetría axial** $S_e$ del espacio euclídeo $E_2$, de eje e (que pasa por A=$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y tiene de inclinación α/2) es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

**La ecuación de la simetría axial** $S_e$ del espacio euclídeo $E_3$ es la ecuación de la rotación G(e,α=180º), considerando la referencia $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal, tal que $\vec{u}_1$ sea paralelo al eje e y A=$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ es un punto cualquiera del eje, es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}.$

## Coordenadas cartesianas rectangulares

Si $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}_1, \overrightarrow{OB}=\vec{u}_2, \overrightarrow{OC}=\vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.

## Simetría deslizante

Es el producto de una traslación por una simetría cuya transformación resultante no es una simetría.
Puede ser en el plano o en el espacio:

**La ecuación de una simetría deslizante** $T_{\vec{u}} \circ S_e$, de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ y eje e (que pasa por A y tiene de inclinación α/2), es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

**La ecuación de la simetría deslizante** $T_{\vec{u}} \circ S_\pi$, considerando la referencia $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ortonormal, tal que los vectores $\vec{u}_2,\vec{u}_3$ sean paralelos a $\pi$, es.

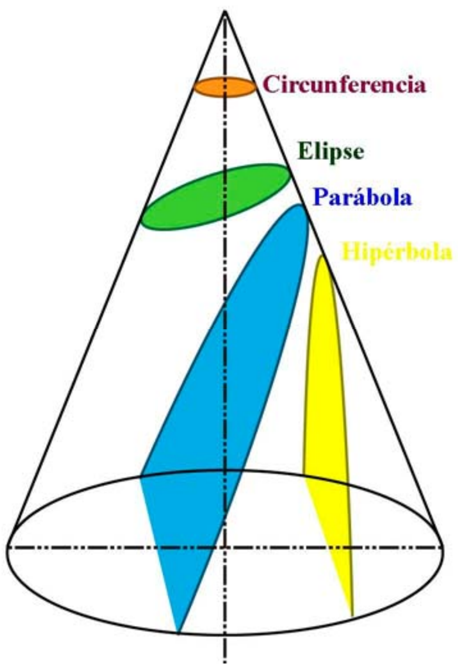
Si $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un punto cualquiera de $\pi$ y $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$, respecto de R, ($\vec{u}$ paralelo a $\pi$)

entonces: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

## Cónica

- Es la sección producida en una superficie cónica de revolución por un plano que no pase por el vértice.
- Es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo (que llamaremos **foco**) y a una recta fija (que llamaremos **directriz**) es constante.
- Es el lugar geométrico de los puntos del plano que verifiquen la ecuación general de segundo grado: $a_{00} + 2\,a_{01}x + 2\,a_{02}y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2\,a_{12}xy = 0$ donde $a_{11}$, $a_{12}$ y $a_{22}$ no son simultáneamente nulos y con respecto a una referencia ortonormal del plano.

Ecuación de la cónica en forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$



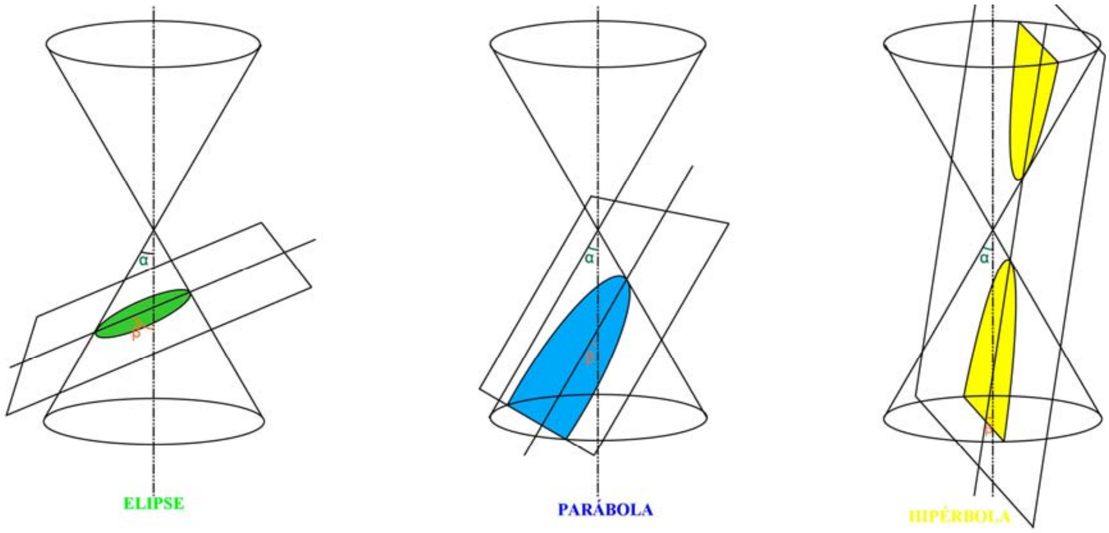
## Centro

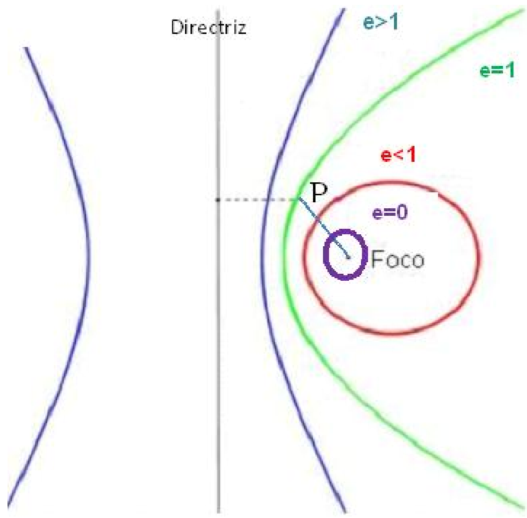
- Punto alrededor del cual la figura es simétrica (centro de la elipse o de la hipérbola).
- Las transformaciones geométricas que tienen un único punto invariante se denomina **centro**. Así tenemos el centro del giro en el plano, el centro de homotecia y el centro de semejanza cuando la razón es $k \neq 1$.
- **Centro radical** de tres circunferencias es un punto del plano que tienen la misma potencia respecto de las tres circunferencias.

## Excentricidad

Valor constante del cociente de la distancia de los puntos de la cónica al foco y a la directriz. En el caso de la **elipse** es menor que 1, igual a 1 para la **parábola** y mayor que 1 en la **hipérbola**.

$e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \dfrac{c}{a}$; siendo c la semidistancia focal y a el semieje real



## Base canónica

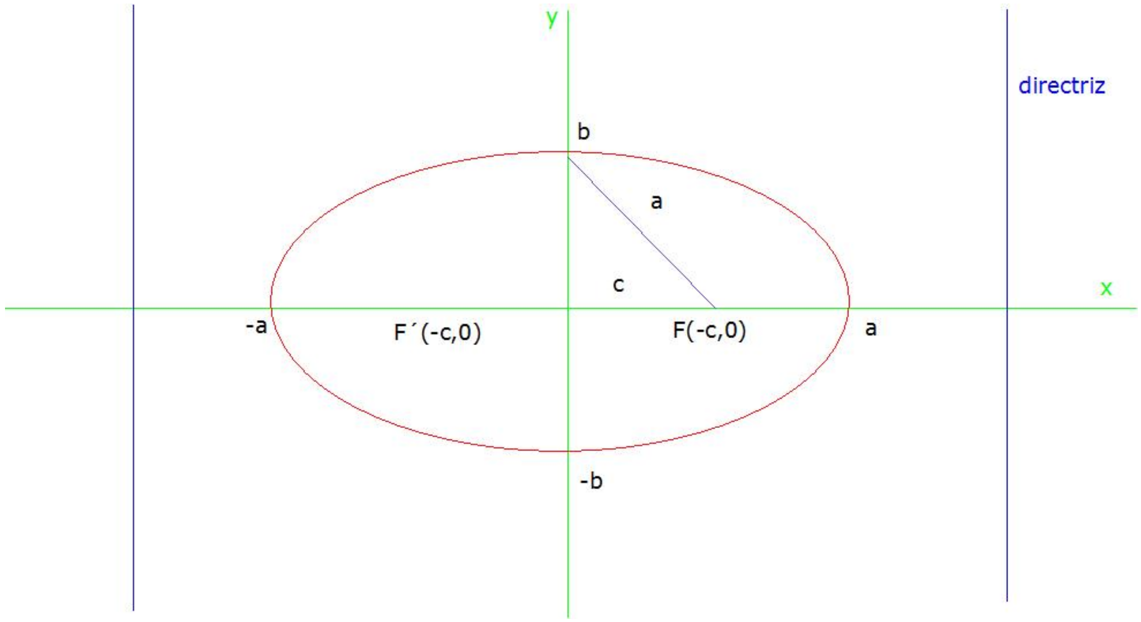
**Base canónica**, $B_c$, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \vec{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

# Elipse

**La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual al doble de su semieje mayor.**

Sea la **elipse** de ecuación reducida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, entonces:

- **Excentricidad:** $e=\frac{c}{a}<1$
- **Vértices:** A(a,0); A´(-a,0); B(0,b); B´(0,-b).
- **Semieje mayor**: a; **semieje menor**: b.
- **Focos**: F(c,0); F'(-c,0).
- **Directrices**: $x=\pm\frac{a^2}{c}$
- **Ejes de simetría**: x=0; y=0; eje focal o eje mayor: y=0.
- **Centro**: O(0,0) punto de intersección de los ejes de simetría.
- **Distancia focal**: d(F,F´)=2c.
- **Parámetro focal**: $p=b^2/a$

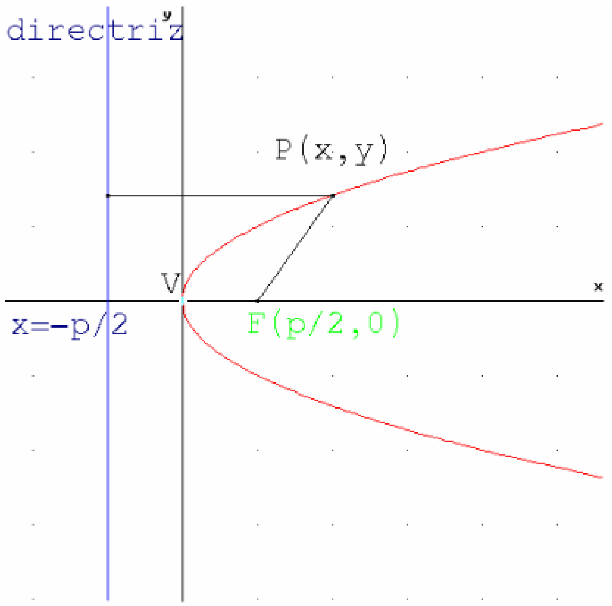


## Parábola

**Parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado **foco**, y una recta fija r, llamada **directriz**.

Sea la parábola de ecuación reducida $\mathbf{y^2 = 2px}$ , entonces:

- **Foco**: F (p/2,0).
- **Directriz**: x= - p/2.
- **Eje de simetría**: es la perpendicular del foco a la directriz y=0
- **Vértice**: O(0,0) punto de intersección de la curva con el eje de simetría.
- **Parámetro**: es la distancia del foco a la directriz p.
- **Excentricidad**: e=1

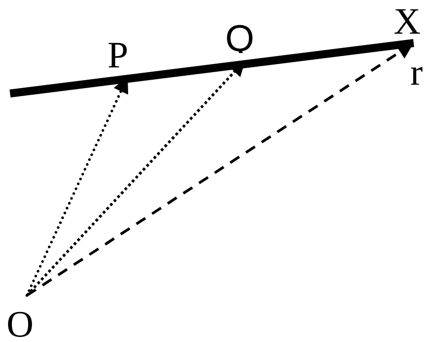


## Razón

**Razón** de una homotecia o una semejanza, dada la matriz cuadrada M que define la transformación geométrica, la razón k es igual a $\pm\sqrt{M \cdot M^t}$ siendo positiva si se trata de la homotecia directa y la semejanza y negativa para la homotecia inversa.

## La recta en el Espacio

Una recta queda determinada por dos puntos P y Q distintos. Si X es un punto cualquiera de la recta y $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín, la ecuación vectorial de la recta es:




$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ y sus ecuaciones paramétricas para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, y $X = (x_1, x_2, x_3)$ respecto de R,

son: $\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) \end{cases}$

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un **vector director** de la recta, entonces la ecuación vectorial es $X = P + t\vec{v}$ y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$. De donde en forma continua: $\dfrac{x_1 - p_1}{v_1} = \dfrac{x_2 - p_2}{v_2} = \dfrac{x_3 - p_3}{v_3}$.

## La recta en el Plano

Siendo m la pendiente; n la ordenada en el origen; $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector director.

- Ecuación de la recta en forma explícita: $y=mx+n$
- Ecuación de la recta en forma punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$
- Ecuación general de la recta en el plano: $ax+by+c=0$
- Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$
- Ecuación de la recta en forma continua: $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$

## Punto doble o invariante

Dada T, transformación geométrica de E, si $T(A) = A$, A es un **punto doble o invariante.** Análogamente**,** sea $F \subset E$ si $T(F) = F$, el subconjunto F es **invariante** por T.

## Triángulo Equilátero

**Equilátero** si tiene los tres lados iguales.