Espacio afín euclídeo

1.- En el *espacio afín* real A^3 respecto de una *referencia* cartesiana $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, se consideran los puntos O'= (1, 2, 1), A=(2, 3, 1), B =(2, 2, 2) y C=(4, 3, 1). Sea $R' = \{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ una *referencia* cuyos ejes son las rectas O'A, O'B, O'C. Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de *coordenadas* $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ en la *referencia* R y (1, 1, 1) en R'. Hallar las ecuaciones del *cambio de coordenadas*.

Solución

2.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$, donde $\vec{OO'} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}' = -\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}' = \vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}' = \vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

Solución

3.- Si A, B, C, D son cuatro puntos cualesquiera demostrar que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{AC}\cdot\vec{DB} + \vec{AD}\cdot\vec{BC} = 0.$$

Solución

4.- Hallar: a) La ecuación de la *recta* r que pasa por el punto (1,0,0) y es perpendicular al *plano* $x - y - z + 2 = 0$.

b) El *plano* π que pasa por los puntos (0,1,2), (1,0,3), (2,-1,0).

c) La ecuación del *plano* σ que pasa por el punto (1,1,1) y es perpendicular a la recta x=t, y=0, z=t.

d) La recta s definida por la intersección de los planos π y σ.

e) Posición relativa de r y s.

f) *Distancia entre las rectas* r y s.

Solución

5.- Hallar la *distancia entre el punto* (1,2,5) *y el plano* x+y+z=5. Encontrar el punto del *plano* que está a la mínima *distancia*.

Solución

6.- Sean las rectas $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

Se pide:

Hallar k para que r y s sean *coplanarias*, hallar la *ecuación del plano* que contiene a ambas rectas y la *perpendicular común* a ambas.

Solución

7.- Dada la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ y el punto P(1,2,1)

Calcular:

1°) *Ecuaciones de la recta* s que pasa por P y corta perpendicularmente a r

2°) Hallar el punto de intersección de r y s.

3°) Hallar las *coordenadas* del punto *simétrico* de P respecto de r.

Solución

8.- Hallar el punto *simétrico* del punto (1,4,5) respecto a la recta $\dfrac{x-1}{2} = y-3 = \dfrac{z-1}{5}$.

Solución

9.- Hallar el punto *simétrico* de (1,2,3) respecto del *plano* x-3y-2z+4=0.

Solución

10.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}'=\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{w}'=\vec{u}+\vec{v}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R'.

b) Análogamente, de R' a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R'.

e) Indicar las *coordenadas* del punto O en R'.

Solución

11.- Las *coordenadas* de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son: M(1,0,-1), N(0,2,0) y P(0,1,1). Determinar las *coordenadas* de los vértices A, B y C.

Solución

12.- Dadas las rectas representadas por las ecuaciones:

$r \equiv x-1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que las rectas r y s son *coplanarias*.

b) Hallar la *ecuación del plano* que determinan.

Solución

13.- Hallar la posición relativa de los dos planos siguientes según los valores de a.

$$\pi_1 \equiv x - 3y + 2z = 1,\ \pi_2 \equiv 2x - 6y + a^2 z = -a$$

Solución

14.- Determinar la posición relativa de las rectas r y s en función del valor que se tome para a:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases},\quad s \equiv \frac{x-a}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Solución

15.- ¿Pertenece el plano x+y+z+2=0 al haz determinado por la recta $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$?

Solución

16.- Hallar las ecuaciones de la *recta* tal que: sea incidente con P(1,1,0), *coplanaria* con la *recta* x=y-1=z y sea paralela al *plano* x+2y-5=0.

Solución

17.- Dada la *recta* 2x+3y-4z=6; 3x-y+z=1 y el *plano* 2x+ay-z=4. Hallar el valor de a para que el *plano* sea paralelo a la *recta*.

Solución

18.- Determinar la ecuación de un *plano* que contiene a la *recta* $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - 3z = 2 \end{cases}$ y es paralelo al *plano* $\pi \equiv 6x+8y+3z=1$.

Solución

19.- Encontrar las ecuaciones de una *recta* que se apoya en dos rectas r y s dadas y pasa por el punto P(1,0,-1).

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución

20.- Hallar las *coordenadas* de los restantes vértices de un *paralelepípedo*, siendo:

A=(1,-7,4), B=(2,-1,9), C=(3,-7,5) y D=(4,-5,8) (aristas $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$).

Solución

21.- Sean A_1, A_2,…,A_8 los vértices de un *paralelepípedo*. Sabiendo que los vectores diagonales de las caras que concurren en A_1 son $\overrightarrow{A_1A_3} = (2,-2,2)$, $\overrightarrow{A_1A_6} = (4,2,2)$ y $\overrightarrow{A_1A_8} = (2,2,4)$. Se pide:

a) Calcular las *coordenadas* de los vectores $\overrightarrow{A_1A_i}$, i=2,4,5,7.

b) Hallar los ángulos $\widehat{A_4A_1A_3}$, $\widehat{A_1A_3A_5}$ y $\widehat{A_6A_8A_7}$

Solución

22.- Sean A, B, C y D cuatro puntos no alineados. Demostrar que los puntos medios de los segmentos que forman los lados del cuadrilátero son los vértices de un *paralelogramo*.

Solución

23.- Conocidas las *coordenadas* A, B y C de los vértices de un triángulo, determinar las *coordenadas* de su *baricentro*.

Solución

24.- Calcular las *coordenadas* del *baricentro*, *ortocentro* y *circuncentro* del triángulo A B C, siendo A (2, 0, 1), B (0, 1, 1), C (0, 0, 4) y comprobar que están alineados.

Solución

25.- Calcular $\vec{x} \times \vec{y}$, $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$, $\vec{x}(\vec{y} \times \vec{z})$, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$, siendo

$\vec{x}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3$, $\vec{y}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$, $\vec{z}=-\vec{u}_1+5\vec{u}_2+7\vec{u}_3$ y B $=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una *base ortonormal*.

Solución

26.- Dados dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ se buscan los vectores $\vec{x}$ tales que $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{x}$, obtener la relación que deben satisfacer $\vec{a}$, $\vec{b}$ para que la ecuación $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{x}$ tenga alguna solución. Cuando se cumple dicha condición, describir geométricamente, las soluciones $\vec{x}$ de la ecuación.

Solución

27.- Hallar el valor de λ para que los vectores

$\vec{x}=\vec{u}_1+\lambda\vec{u}_2-3\vec{u}_3$, $\vec{y}=2\vec{u}_1-3\lambda\vec{u}_2+\vec{u}_3$, $\vec{z}=\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3$

sean *coplanarios*.

Solución

28.- Dados los puntos A=(3,2,0), B=(1,0,1), C=(2,-2,3), y D(-1,1,2). Se pide:

a) El *área del triángulo* ABC.

b) El *volumen del tetraedro* ABDC.

c) El *ángulo* determinado por el *plano* ABC y la *recta* CD.

d) El *ángulo* determinado por los planos ABC y BCD.

e) Ecuación de la *perpendicular común* a las rectas AB y CD.

f) *Distancia* entre las rectas AB y CD.

Solución

29.- Consideremos los puntos P = (1,2,0) , Q = (1,0,1) y R(1,0,0). Se pide:

a) Demostrar que son los vértices de un triángulo rectángulo y calcula la longitud de cada cateto y el *área del triángulo*.

b) La *ecuación del plano* que los contiene.

c) Un punto T de manera que los puntos P, Q, R y T sean los vértices de un rectángulo.

Solución

30.- Hallar la *distancia* del punto P=(1,4,5) a la *recta* $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3}$.

Solución

31.- Sea el punto P(1,4,5) donde está situado un semáforo en el borde de la calzada de una calle cuyo eje sigue una línea *recta* de ecuación $\frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z-1}{5}$. Hallar el punto P' *simétrico* del P respecto del eje de la calle donde colocar el otro semáforo. ¿Cuál es la anchura de la calle?

Solución

32.- La base de un árbol está situada en el punto P(1,2,3) próxima a un muro de ecuación x-3y-2z+4=0. Hallar las *coordenadas* del punto P' en el cual se desea colocar otro árbol *simétrico* al del punto P respecto del muro.

Solución

33.- Considérese el *tetraedro* de vértices O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1). Hallar un *plano* que contenga al lado AB y que divida al *tetraedro* en dos partes de igual volumen.

Solución

34.- Dos caras de un cubo están en los planos x+2y+2z=1, x+2y+2z=7. Calcular el volumen del cubo.

Solución

35.- Se considera una diagonal D de un cubo y una diagonal d de una de sus caras de tal forma que las *rectas* que contienen D y d se cruzan. Hallar la *distancia* entre ambas *rectas*.

Solución

36.- Expresar $\vec{v}$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{u}$ y otro $\vec{v}_2$ perpendicular a $\vec{u}$ para un vector $\vec{u}$ cualquiera.

En particular, para $\vec{v}=(1,-1,0)$ y $\vec{u}=(1,3,0)$.

Solución

37.- Hallar la ecuación de la *recta* que pasa por el punto (0,1,-3) y que forma con la parte positiva de cada *eje* coordenado los siguientes ángulos: $\alpha=90°$, $\beta=30°$, $\gamma=60°$.

Solución

38. Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$; s: $x=y=\frac{z-1}{2}$. Se pide:

a) Estudiar si se cortan o cruzan.

b) *Ecuación del plano* en forma implícita que contiene a s y es paralelo a r.

c) *Ecuaciones paramétricas* de todas las *rectas* que se apoyan en r y s.

d) Entre todas las *rectas* del apartado anterior, encontrar una que sea paralela al *plano* x + y + z - 3 = 0. Dar la solución en paramétricas.

e) *Distancia* entre r y s.

Solución

39.- Se quiere construir un tendedero con una cuerda desde el punto P (0,1,1) hasta la *recta* r: $\begin{cases}2x+3y+z-5=0\\-5y-z-10=0\end{cases}$ de modo que la longitud de la cuerda sea la menor posible. Determinar el punto de la *recta* r donde debe ir la cuerda y la longitud de dicha cuerda.

Solución

40.- Hallar en el *eje* OX un punto equidistante de los dos planos:

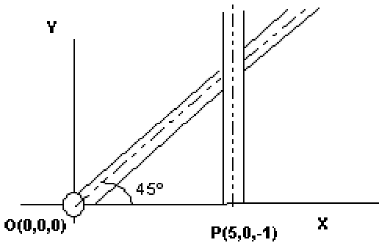
$$2x+2y+z=0;\ -x+2y+2z=6.$$

Solución

41.- Hallar los *ángulos* que la *recta* de ecuaciones x+y+z=1, 2x-y+z=0, forma con los *planos coordenados*.

Solución

42.- Se necesita colocar una tubería *recta* que tenga la menor inclinación posible para poder ir por debajo de una conducción de gas y debe estar a una *distancia* no menor de 1 metro. El *eje* de la conducción de gas es horizontal y está a una profundidad constante de 1 metro.



Determinar la inclinación mínima para colocar la tubería. Una vez colocada la tubería se desea conectarla con la conducción de gas empleando un tubo de 1 metro de longitud, ¿dónde se realiza la conexión?

Solución

43.- Dadas las rectas que delimitan un campo de balonmano:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} ; r_2 \equiv \begin{cases} x = -49 + 3t \\ y = 4t \\ z = 1 \end{cases} ; s_1 \equiv \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 \end{cases} ; s_2 \equiv \begin{cases} x = -11 - 4t \\ y = -16 + 3t \\ z = 1 \end{cases}$$

y sabiendo que la escuadra de la portería está situada en el punto $\left(-\frac{41}{10}, -\frac{34}{5}, 3\right)$. Se pide:

a) La ecuación del *plano* del campo.
b) Los vértices que forman el campo.
c) Las dimensiones del campo.
d) La situación del portero cuando se lanza un penalti.
e) La altura de la portería.
f) La anchura de la portería.
g) Las ecuaciones de las *rectas* de los postes de la portería.

Solución

44.- Determinar la longitud de un rayo de luz que parte del foco F=(1,0,2) es reflejado por un espejo *plano* de ecuación 3x+y-z=0 y acaba en el punto P=(2,3,0).

Solución

45.- En el *espacio afín* real A_3 respecto de una *referencia* canónica $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideran los puntos:

O'= (1, 2, 0), A=(-2, 0, 1), B =(-1, 3, 1) y C=(2, 3, 0).

Sea $R' = \{O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una *referencia* cuyos ejes son las *rectas* O'A, O'B, O'C.

a) Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de *coordenadas* (1,1/3,1/4), en la *referencia* R y (1, 2, 3) en R'.

b) Hallar las ecuaciones del cambio de *coordenadas* de R en R'.

Solución

46.-Dados los puntos A=(3,2,0), B=(1,0,1), C=(2,-2,3), y D(-1,1,2). Se pide:
a) Demostrar que R={A,B,C,D} es un sistema de *referencia* afín del espacio.
b) Escribir las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a la canónica.
c) Escribir las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R'={A'(1,1,1), B'(1,0,0), C'(2,2,2),D'(0,1,0)}.
d) Si P =(1,1,1), hallar sus *coordenadas* en R y en R'.
e) Escribir las ecuaciones del *plano* π: x+2y+3z-6 =0 en R y en R'.
f) Escribir las ecuaciones de la *recta* normal al *plano* π que pasa por P, tanto en la *referencia* canónica y como en R.

Solución

47.- Consideremos los puntos P = (-1, 1, 1), Q = (7, 1, 7) y R(-4, 1, 5). Se pide:

a) Demuestra que son los vértices de un *triángulo rectángulo* y calcula la longitud de cada cateto y el *área del triángulo*.
b) Obtén la *ecuación del plano* que los contiene.
c) Obtén un punto T de manera que los puntos P, Q, R y T sean los vértices de un rectángulo.

Solución

48.- Sean las rectas $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z+1}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$

a) Hallar k para que r y s sean *coplanarias*.
b) Para el valor anterior de k, hallar la *ecuación del plano* que contiene a ambas rectas.
c) Para ese mismo valor de k, hallar la ecuación de la recta *perpendicular común* a las rectas dadas.

Solución

49.- Sean los puntos A(0,0,1), B(5,-4,3), C(4,-1,-2) y D(10,-5,-2) referidos al sistema de *referencia* R de un *espacio euclídeo* tridimensional. Se pide:
a) Las ecuaciones del cambio de sistema de *referencia* de R'={A,B,C,D} a R.
b) Indicar si la base $B = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ es una *base ortonormal*.
c) Si x + y + z =0 es la ecuación de un *plano* respecto de R, ¿cuál es la ecuación de dicho plano respecto de la *referencia* R'?
d) El triángulo cuyos vértices son A, B y C se proyecta ortogonalmente sobre el plano x-y=3. Encontrar los vértices y el área del nuevo triángulo.

Solución

50.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R=\{A;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{B;\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde:

$$\begin{cases} A=(5,6,7) \\ \vec{u}=(1,2,3) \\ \vec{v}=(1,0,1) \\ \vec{w}=(1,0,0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} B=(-1,0,0) \\ \vec{u}'=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{v}'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \vec{w}'=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a la canónica y de R´ a la canónica.

b) Análogamente, de R´ a R y de R a R'.

c) Hallar las *coordenadas* del punto B en R y en R'.

d) Hallar la *ecuación del plano* $\pi\equiv x+y+z-18=0$ en R.

Solución

51.-En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias* s:

$R=\{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O';\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=\vec{u}+2\vec{v}$, $\vec{v}'=-3\vec{u}-7\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}'=-2\vec{v}+\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución

52.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias*:

$R=\{O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O';\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}'=-4\vec{u}+5\vec{v}-8\vec{w}$, $\vec{w}'=-2\vec{v}+2\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de R a R´.

b) Análogamente, de R´ a R.

c) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´.

e) Si Q=(1,1,1) en R' hallar las *coordenadas* de Q en R.

Solución

53.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran la *referencia*:

$R = \{A, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\}$, donde *A* es el punto de *coordenadas* A = (1, 2, 3) y los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tienen por *coordenadas* $\vec{u} = (1,2,0)$, $\vec{v} = (-3,-7,1)$ y $\vec{w} = (-2,0,1)$. Se pide:

a) Hallar las ecuaciones del cambio de *referencia* de la canónica a R.

b) Comprobar si existen puntos del espacio que tienen las mismas *coordenadas* respecto de la *referencia* canónica y de R.

c) Ecuación, en la *referencia* R, del *plano* cuya ecuación en la *referencia* canónica es z = 0.

Solución

54.- a) Sean los *subespacios vectoriales* E y F de R^4, definidos por las siguientes *ecuaciones implícitas*: $E \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -9x + 3y - z + 7t = 0 \end{cases}$, $F \equiv 3x + z - t = 0$

Hallar una *base* de la *suma* E+F y de la *intersección* E∩F. ¿Es *suma directa*?

b) Respecto de la *base canónica*, la *transformación lineal* f tiene por matriz asociada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & -4 \\ -3 & a & 3 \\ 3 & a+1 & -3 \end{pmatrix}$.

Estudiar para qué valores de *a* es *diagonalizable* la transformación *f*.

c) Hallar la *distancia* euclídea entre la *recta* afín *r* que pasa por el origen *O* y su dirección es la del vector $\vec{u} = (1,2,-1)$ y la *recta* *s* que pasa por *A* (1,1,1) y su dirección es $f(\vec{u})$, siendo f la transformación lineal del apartado anterior particularizada para *a* = 0.

Solución

55.- En el *espacio afín* real A^3, sea:

$$R \equiv \left\{O = (1,-1,1), \vec{u}_1 = (1,2,3), \vec{u}_2 = (0,0,1), \vec{u}_3 = (2,a,b)\right\}.$$

a) ¿Para qué valores de a y b es R un sistema de *referencia* afín del espacio?

b) A partir de ahora, se toman a = 5 y b = 4. Sea R' otro sistema de *referencia*: $R' \equiv \left\{O' = (0,2,1), \vec{v}_1 = (3,5,2), \vec{v}_2 = (1,1,1), \vec{v}_3 = (2,4,3)\right\}$

Hallar las ecuaciones de cambio de sistema de *referencia* de R a R'.

c) Si un punto P tiene de *coordenadas* $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ en el sistema de *referencia* R', ¿cuáles son las *coordenadas* de P respecto del sistema de *referencia* R? Comenta el resultado obtenido.

d) Sea $x - y + z + 2 = 0$ la ecuación de un *plano* en el sistema de *referencia* R. Hallar su ecuación respecto de R'.

Solución

56.- En el *espacio vectorial euclídeo* tridimensional V^3, se pide:

a) Hallar una *base ortonormal* del *plano* vectorial F engendrado por los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$ y $\vec{v} = (1,-1,-1)$.

b) Hallar $F^{\perp}$ (*subespacio ortogonal* de F).

c) Ampliar la base encontrada en el apartado a) para obtener una *base ortonormal* de V^3.

Solución

57.- I. En R^3 se consideran los siguientes elementos:

- El *plano* $\pi : 2x + y - z = 2$.
- La *recta* $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$.
- El punto P: (1, 2, 1).

a) Expresar la ecuación de r en forma continua.

b) *Distancia* de P a π y de *P a r*.

c) Ecuación implícita del plano que pasa por P, es paralelo a r y perpendicular a π.

d) Hallar el punto P' *simétrico* de P respecto de π.

II. En el *espacio euclídeo* E_3 se considera el sistema de referencia *ortonormal* $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Sea $R' = \{O'; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ otro sistema de referencia donde las *coordenadas* de O' con respecto a R son (1, 1, 0) y $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* R al sistema de referencia R'.

Solución

58.- Dados los puntos A=(1,1,0), B=(4/3, 1/3, - 2/3), C=(1/3, 4/3, - 2/3), y D=(1/3, 1/3, 1/3). Se pide:

a) Las *coordenadas* de los restantes vértices del *paralelepípedo* de aristas $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

b) Las ecuaciones del cambio de *referencia* de R $= \{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ en R'={A,B,C,D}.

c) El *área del triángulo* ABC.

d) El *volumen del tetraedro* ABDC.

e) El *ángulo* determinado por el *plano* ABC y la *recta* CD.

f) El *ángulo* determinado por los planos ABC y BCD.

g) Ecuación de la *perpendicular común* a las rectas AB y CD.

h) *Distancia* entre las rectas AB y CD.

i) El punto D' *simétrico* de D respecto del plano ABC.

Solución

59.- En el *espacio afín euclídeo* ordinario R^3 se consideran las *referencias* $R=\{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $R'=\{O',\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$. Las ecuaciones del *cambio de referencia* de R' a R son: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

a) Indicar las *coordenadas* de los vectores de la *base* B=$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$respecto a la *base* B'=$\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$.

b) Demostrar que no existe ningún punto del espacio que tenga las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

c) Si x+y+z=0 es la ecuación de un *plano* en la *referencia* R, hallar la ecuación en R´.

Solución

60.- En el espacio afín R^3 respecto de la *referencia canónica* $R=\{0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ se consideran los puntos P(1,2,1), A(2,3,1), B(1,1,2), C(4,-1,1). Sea $R'=\{P,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ otra referencia cuyos ejes son las rectas PA, PB, PC. Determinar R' sabiendo que el punto D tiene de *coordenadas* $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ en la referencia R y (2, -1, -1) en la referencia R'. Hallar:

a) La *distancia* entre los orígenes de los sistemas de referencia.

b) Las ecuaciones del cambio de *coordenadas* de R' a R.

c) ¿Es R' un *sistema de referencia ortonormal*?

d) Ecuación implícita del *subespacio vectorial* F engendrado por los vectores $\vec{v}_1=(1,1,0)$ y $\vec{v}_2=(0,-1,1)$.

e) El *subespacio ortogonal* de F.

f) Un *subespacio suplementario* de $\langle \vec{v}_1 \rangle$

Solución

61.- En el Espacio Euclídeo:

a) Definición de *subespacio ortogonal* a un subespacio dado y definición de *sistema de referencia ortonormal*.

b) En A_3 se consideran los puntos siguientes: O(1,1,1), A(2,1,1), B(2,2,2), C(1,3,1) y O'(1,0,1), A'(1,1,1), B'(-1,1,1), C'(2,-1,2)

I) Probar que R={O, A, B, C} y R'={O', A', B', C'} son dos referencias de A_3.

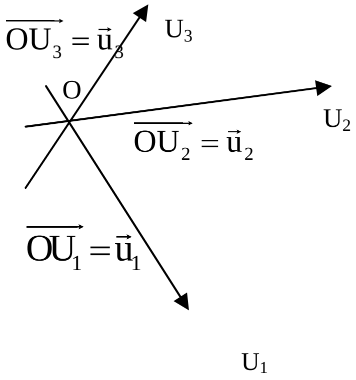
II) Hallar las *ecuaciones del cambio de la referencia* R a R'.

Solución

Sistema de referencia

Sea $\boldsymbol{A}^{3}$ un espacio afín y $\Re = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos, se dice que R constituye un **sistema de referencia** del espacio afín $\boldsymbol{A}^{3}$ cuando los vectores $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3}$ forman una base de $V^3(R)$. O es el **origen** del sistema de referencia.

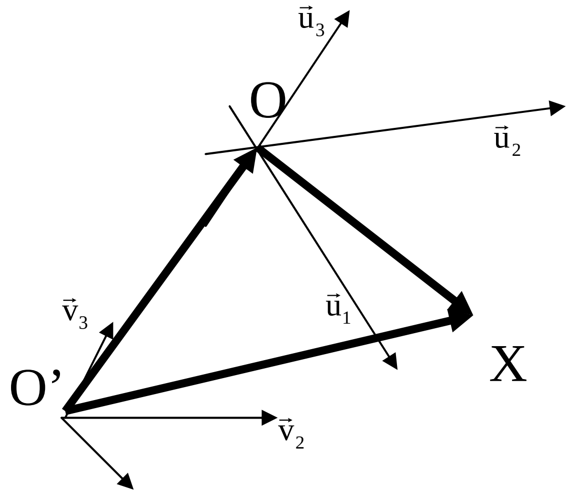
Si $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OU_3} = \vec{u}_3$ entonces se tiene $\Re = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia.



Cambio de sistema de referencia

Sean $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $R'=\{O';\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ dos sistemas de referencia del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ tales que:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3\\
\vec{u}_2 &= a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3\\
\vec{u}_3 &= a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3\\
\overrightarrow{O'O} &= a\ \vec{v}_1 + b\ \vec{v}_2 + c\vec{v}_3
\end{aligned}$$



Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX}=(x,y,z)$ y $\overrightarrow{O'X}=(x',y',z')$ respecto de R y R' respectivamente, luego $\overrightarrow{O'X}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OX}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow [x]_{R'} = A.[x]_R$ que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R'.

Base ortonormal o métrica

La base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\|=1,\ i=1,2,...,n$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Subespacios suplementarios

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Subespacio ortogonal

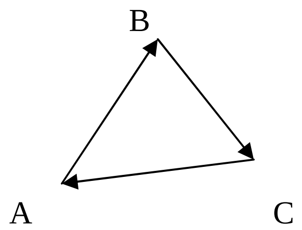
Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

Espacio afín

Sean **E** el conjunto de puntos del espacio, V^3(R) el espacio vectorial real de los vectores libres del espacio, y $\begin{array}{l}\varphi : \mathbf{ExE} \to \mathbf{V}^3(\mathrm{R}) \\ (\mathrm{A,B}) \to \varphi(\mathrm{A,B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{array}$ una aplicación que verifica:

I) "Relación de Chasles"

Si A, B, y $\mathrm{C} \in \mathbf{E}$ $\varphi(\mathrm{A,B}) + \varphi(\mathrm{B,C}) + \varphi(\mathrm{C,A}) = \vec{0}$ o también $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$



II) $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{E}, \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}$, existe un único punto $\mathrm{B} \in \mathbf{E}$ tal que $\varphi(\mathrm{A,B}) = \vec{\mathrm{v}}$.

Entonces a la terna (**E**, V^3(R), φ) se le denomina **espacio afín** y se escribe $\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}}$.

Espacio euclídeo

Se llama espacio **afín euclídeo** o **espacio euclídeo** al espacio afín cuando el espacio vectorial real asociado V^3 es un espacio vectorial euclídeo. Lo representamos por $\mathbf{E^3}$**.**

Coordenadas cartesianas rectangulares

Si $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}_1,\overrightarrow{OB}=\vec{u}_2,\overrightarrow{OC}=\vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

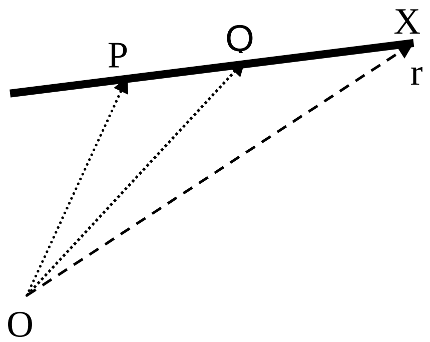
Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.

La recta en el Espacio

Una recta queda determinada por dos puntos P y Q distintos. Si X es un punto cualquiera de la recta y $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín, la ecuación vectorial de la recta es:

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$ y sus ecuaciones paramétricas para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, y $X = (x_1, x_2, x_3)$ respecto de R, son:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) \end{cases}$$



Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un **vector director** de la recta, entonces la ecuación vectorial es $X = P + t\vec{v}$ y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$. De donde en forma continua: $\dfrac{x_1 - p_1}{v_1} = \dfrac{x_2 - p_2}{v_2} = \dfrac{x_3 - p_3}{v_3}$.

La recta en el Plano

Siendo m la pendiente; n la ordenada en el origen; $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector director.

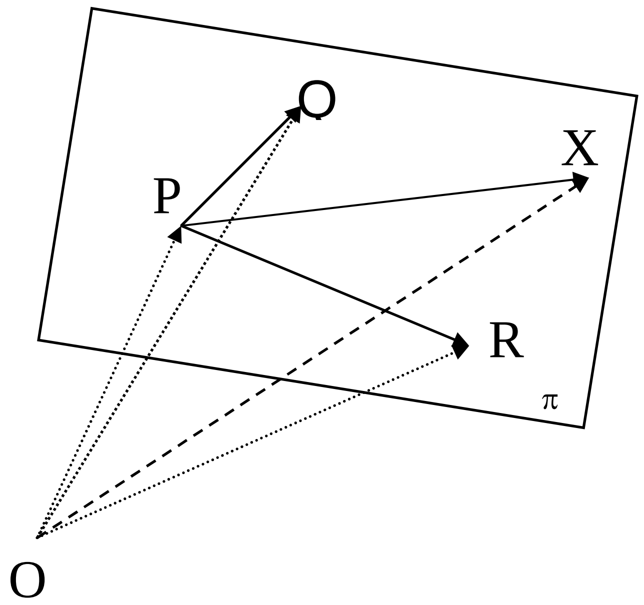
- Ecuación de la recta en forma explícita: y=mx+n
- Ecuación de la recta en forma punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$
- Ecuación general de la recta en el plano: ax+by+c=0
- Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$
- Ecuación de la recta en forma continua: $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$

El Plano en el Espacio

Sea el sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ Un plano queda determinado por tres puntos P, Q y R no alineados, cualquier punto coplanario con ellos verifica $X = P + t\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{PR}$.

De la ecuación vectorial, para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(r_3 - p_3) \end{cases}$$



Si consideramos un punto P y dos vectores linealmente independientes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el plano queda determinado de forma vectorial por $X = P + t\vec{v} + s\vec{w}$ y por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$ de donde eliminando los parámetros t y s queda: $\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$, la ecuación general, cartesiana o implícita del plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$

Distancia entre dos rectas

- Si las **rectas son paralelas**, r//r’, se construye un plano π perpendicular a ambas. Sean $P = r \cap \pi$ y $Q = r' \cap \pi$. Entonces d(r,r’)=d(P,Q).

- Si las **rectas se cruzan**:

1. $d(r, r') = \dfrac{\left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}' \right] \right|}{\left| \vec{v} \wedge \vec{v}' \right|}$, siendo $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ los vectores directores de r y r’, respectivamente, P y Q sendos puntos de r y r’.
2. Sea s la recta perpendicular común a r y a r’. Sean $P = r \cap s$ y $Q = r' \cap s$.. Entonces d(r,r’)=d(P,Q).

DISTANCIA entre dos puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

DISTANCIA entre dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Perpendicular común

Se considera la recta **perpendicular común** a dos rectas dadas cuando dicha perpendicular es secante a ambas rectas dadas.

Cálculo de la recta s perpendicular común a r y a r':

$s = \pi \cap \pi'$; siendo $\pi \equiv$ plano que contiene a la recta r y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ y $\pi' \equiv$ plano que contiene a la recta r' y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}'$ y $\vec{v} \wedge \vec{v}'$.

Simétrico

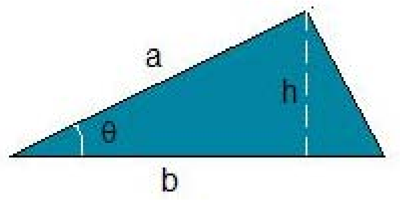
- **Simétrico:** que tiene simetría, puede ser respecto de un punto (central), de una recta (axial), de un plano (especular) o de otro elemento.

- **Elemento simétrico**: el que, operado con su **elemento** correspondiente, da como resultado el **elemento** neutro. En la suma se llama **opuesto** y en el producto **inverso**.

- Un endomorfismo f del espacio vectorial euclídeo V es **simétrico** cuando se verifica la siguiente igualdad entre productos escalares:

$$\vec{x}\cdot f\left(\vec{y}\right)=\vec{y}\cdot f\left(\vec{x}\right),\ \forall \vec{x},\vec{y}\in V.$$

Área del triángulo



$$Área = \frac{1}{2}bh$$

$$Área = \frac{1}{2}absen\theta$$

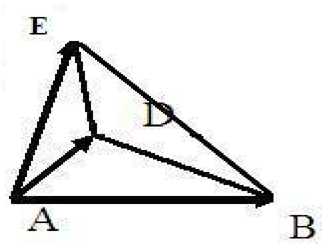
El **área** de un triángulo de vértices $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ y $C(c_1,c_2)$ es:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

El área del triángulo ABC es ½ del área del paralelogramo ABCD, luego:

Área del triángulo $ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$.

Volumen del tetraedro



El **volumen del tetraedro** ABDE es un 1/6 del volumen del paralelepípedo viene dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

siendo $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, y $E = (e_1, e_2, e_3)$

Ángulo

Ángulo figura geométrica constituida por dos semirrectas que tienen en común el origen.

Ángulo de dos vectores

Ángulo de dos vectores: si los vectores $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ e $y = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$ están referidos a una base ortonormal, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V^3 entonces:

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Ángulo entre dos planos

Ángulo entre dos planos es el menor de los ángulos diedros que dichos planos forman al cortarse. Sean los planos $\begin{cases} \pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi' \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$. Se verifica, entonces, que:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Ángulo entre dos rectas

Ángulo entre dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus paralelas por un punto cualquiera. Es el ángulo entre sus vectores directores.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y $r' \equiv \frac{x_1 - p'_1}{v'_1} = \frac{x_2 - p'_2}{v'_2} = \frac{x_3 - p'_3}{v'_3}$. Se verifica, entonces, que: $\cos(r, r') = \frac{|v_1v_1' + v_2v_2' + v_3v_3'|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}}$

Ángulo entre recta y plano

Ángulo entre recta y plano es el ángulo entre dicha recta y su proyección ortogonal sobre el plano.

Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Se verifica, entonces, que: $\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{|v_1a + v_2b + v_3c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Base

Lado o cara horizontal a partir del cual se mide la altura de una figura plana o de un sólido.

Base de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Subespacio vectorial

Sea (V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial.

Sea F una parte no vacía del K-espacio vectorial V. F es un **subespacio vectorial** de V con las operaciones + y · inducidas por V si y sólo si se verifica:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{K}, \forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{F} \Rightarrow \lambda \vec{\mathbf{a}} + \mu \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{F}$$

Distancia de un punto a una recta

En el plano: Distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta $ax+by+c=0$:

$$d(P,r) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

En el espacio: Distancia de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a la recta $r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$ (un punto cualquiera $A(x_0, y_0, z_0)$ y el vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de la recta):

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \left| \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} p_2 - y_0 & p_3 - z_0 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_3 - z_0 & p_2 - y_0 \\ v_3 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 - x_0 & p_2 - y_0 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right|$$

Nota: En vez de aplicar la fórmula anterior, si se traza por P un plano π perpendicular a r, la distancia buscada es d=d(P,Q), siendo Q el punto en el que el plano π corta a r.

Espacio vectorial euclídeo

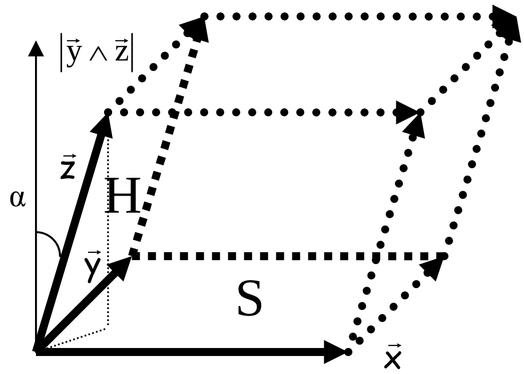
Un espacio vectorial V^3 en el que se ha definido el producto escalar se dice que es un **espacio vectorial euclídeo.**

Paralelepípedo

Poliedro cuyas caras son todas paralelogramos.

El **volumen del paralelepípedo** se obtiene mediante el producto mixto: sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3. Sean $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3$ tales que $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3$; $\vec{y}=y_1\vec{u}_1+y_2\vec{u}_2+y_3\vec{u}_3$ y $\vec{z}=z_1\vec{u}_1+z_2\vec{u}_2+z_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$\text{Volumen} = [\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\vec{x}\cdot(\vec{y}\wedge\vec{z})=\left(x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3\right)\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$



$$V=S.H=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Ecuaciones cuyas incógnitas son coordenadas. Relativo a las ecuaciones de un subespacio vectorial las ecuaciones cartesianas forman el sistema homogéneo que define dicho subespacio.

Base canónica

Base canónica, $B_{c,}$ es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Suma de subespacios vectoriales

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos ***suma de E_1 y E_2*** al subespacio vectorial generado por $E_1 \cup E_2$.

$$E_1 + E_2 = < E_1 \cup E_2 >$$

Suma directa

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos **suma directa de E_1 y E_2** a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Intersección de subespacios vectoriales

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces $E_1 \cap E_2$ (E_1 **intersección** E_2) es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

Endomorfismo o **transformación lineal**

Endomorfismo o **transformación lineal** es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

Diagonalizable

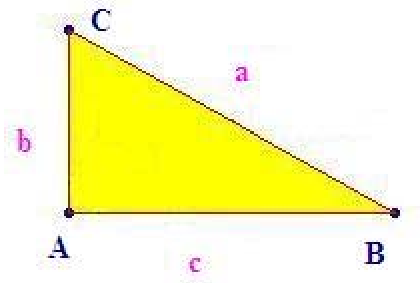
Una matriz $A \in M_n(K)$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella.
Una transformación lineal de V es **diagonalizable** si su matriz asociada es diagonalizable.

Coplanarias

Pertenecientes a un mismo plano.

Triángulo Rectángulo

Rectángulo si tiene un ángulo recto.



Eje

Eje es la recta del plano o del espacio que sirve de referencia a los puntos de ese plano o de ese espacio o bien a una figura o a una transformación**.**
La elipse y la hipérbola tienen dos **ejes de simetría**; la parábola solamente uno que pasa por su vértice.

Eje de coordenadas: cada una de las rectas mediante las que se define un sistema de coordenadas cartesianas en el plano o en el espacio.
Eje de abscisas: eje de coordenadas, generalmente horizontal, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina X.
Eje de ordenadas: eje de coordenadas, generalmente vertical, en un sistema de coordenadas cartesianas del plano y que se denomina Y.

Eje focal: en una cónica es el eje de simetría que contiene a los focos.

- **Eje mayor** en la elipse corresponde al eje focal
- **Eje menor** en la elipse corresponde al eje no focal

Eje polar en coordenadas cartesianas polares es la semirrecta que parte del polo.

Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias.

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

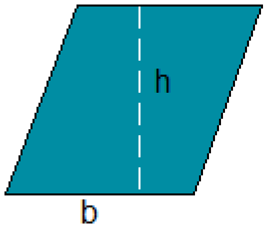
En el **plano**: siendo $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector director.

Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$

En el **espacio**: Siendo $P=(p_1,p_2,p_3)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un vector director de la recta.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$.

Área del paralelogramo



Paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos entre sí.

$$\text{Área} = b \cdot h$$

El área del paralelogramo cuyos vértices son $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ y $D = (d_1, d_2, d_3)$, puede calcularse mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3 - a_3 & b_1 - a_1 \\ d_3 - a_3 & d_1 - a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 \end{vmatrix}^2}$$

Baricentro

Baricentro o lugar donde se cortan las medianas de un triángulo, corresponde al centro de gravedad.

Ortocentro

Ortocentro o lugar donde se cortan las alturas de un triángulo.

Circuncentro

Circuncentro o lugar donde se cortan las mediatrices de un triángulo o centro de la circunferencia circunscrita.