Espacio Vectorial

1.- Se considera R^3 con la suma habitual y con el producto por un escalar que se indica en los casos siguientes. Prueba que en ninguno de ellos, $(R^3,+,\cdot)$ es *espacio vectorial* señalando alguna propiedad del producto que no se cumpla:

a) $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, z)$

b) $\lambda(x,y,z) = (0,0,0)$

c) $\lambda(x,y,z) = (3\lambda x, 3\lambda y, 3\lambda z)$

Solución

2.- Definimos en R^2 las operaciones siguientes:

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y'+1)$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y + \lambda - 1)$$

Determinar, para la suma, el elemento neutro y el elemento opuesto de (x, y)

Probar que R^2 con dichas operaciones es un *espacio vectorial*.

Solución

3.- En cada caso, determinar si F es un *subespacio vectorial* de R^3. En caso afirmativo, buscar una *base* y unas *ecuaciones implícitas* y *paramétricas* de F.

a) $F = \{ (1,\alpha,\beta) \in R^3 / \alpha,\beta \in R\}$

b) $F = \{ (0,\alpha,\beta) \in R^3 / \alpha,\beta \in R\}$

c) $F = \{ (x,y,z) \in R^3 / -x+3y+2z = 0\}$

d) $F = \{ (2\alpha, -\beta^2, \gamma) \in R^3 / \alpha,\beta,\gamma \in R\}$

e) $F = \{(x,y,z)\in R^3 / x+2y+z = 0,\ z = y-x \}$

f) $F = \{(x,y,z)\in R^3 / x,\ y,\ z\geq 0\}$

g) $F= \{(x,y,z)\in R^3 / \text{máx}(x,y,z)<1\}$

Solución

4.- Sea A={(2,1,3), (-1,2,3), (-3,1,0), (5,0,3)}. Indicar si son correctas o falsas las siguientes cuestiones:

a) A es *libre*.

b) A es *sistema generador* de un *subespacio vectorial*.

c) A es una *base* de R^3.

d) *rango*(A)=4.

e) El vector (2,1,3) es *combinación lineal* de los vectores de A.

f) El vector $(1,1,1)\in< A >$.

Solución

5.- ¿Qué valores deben tener m y n para que el *vector*

$(-3,m,n,2m-n)\in<\{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}>$?

Solución

6.- Sea $P_n(x)$ el *espacio vectorial* de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que n. Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas forman una *base* de $P_n(x)$ e indicar las *coordenadas* del polinomio $1+x+x^2$ en esta base.

Solución

7.- Determinar si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* de R^3 o subespacios distintos $G_1=\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ y $G_2 = \{(1,1,-2), (2,1,-3), (0,1,-1)\}$

Solución

8.- Sea el *subespacio vectorial* E formado por el conjunto de matrices cuadradas que *permutan* con la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Y sea el *subespacio vectorial* F= $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} / a, b, c \in R \right\}$ Se pide:

a) Demostrar que E es un *subespacio vectorial*.

b) Una *base* de E.

c) Los *subespacios vectoriales* $E \cap F$ y E+F.

Solución

9.- a) ¿Para qué valores de x los siguientes sistemas de vectores son *bases* de R^3? $B_1 = \{(1,-1,0), (x,1,0), (0,2,3)\}$; $B_2 = \{(2,x,1), (1,0,1), (0,1,3)\}$

b) Para x = 0, escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B_1 a la *canónica*, de la *canónica* a B_1, de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1.

Solución

10.- Hallar las coordenadas del vector $\vec{u} = (x, y, z)$ en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (-3,-7,1)$ y $\vec{v}_3 = (0,2,-1)$. ¿Cuál es la matriz de *cambio de la base* B' a la *canónica*?

Solución

11.-a) Probar que los sistemas de vectores G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* F de R^4.

$G_1= \{(1,2,-1,0), (4,8,-4,-3), (0,1,3,4), (2,5,1,4)\}$

$G_2= \{(1,-2,-13,-1), (1,1,-4,-5), (2,3,-5,-2), (1,1,-4,-1)\}$

b) Hallar la *dimensión*, una *base* "escalonada", unas *ecuaciones paramétricas* y las *ecuaciones cartesianas* de F.(Vamos a llamar bases "escalonadas" de F a aquellas cuyos vectores se pueden disponer como las filas de una matriz escalonada)

c) Sea H = {(x, y, z, t) ∈ R^4 tales que x + y + z = 0, x + z -3 t = 0}. Se pide:

1. Hallar la *dimensión* y una *base* de H, de F + H y de F ∩ H respectivamente.
2. Unas *ecuaciones cartesianas* de F + H y de F∩H.

d) ¿Es H un *subespacio suplementario* de F? En caso contrario halla un *subespacio suplementario* de F.

Solución

12.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ de *cambio de base* de B a B', siendo $B = \left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_4\right\}$ y $B' = \left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4\right\}$. Escribir $\vec{u}_2$ en función de los vectores de la *base* B'. Hallar la *matriz de cambio de base* de B' a B.

Solución

13.- Comprobar que B= {(1,2,1), (1,1,0), (3,1,1)} y B'= {(1,3,1), (0,1,1), (2,1,0)} son *bases* de R^3 y calcular las ecuaciones matriciales de *cambio*

a) de la base B a la *base canónica* B_C
b) de la base B' a B_C
c) de la base B a B'
d) de la base B' a B.

Solución

14.- Se consideran los tres subespacios de R^4 siguientes:

$F_1 = \{\ (\alpha, \beta, 0, 0) \quad / \ \alpha, \beta \in R\}$

$F_2 = <(0,1,0,0),\ (0,0,1,0)>$

$F_3 = <(1,0,0,0)>$

a) Hallar $F_1 + F_2$

b) Hallar $F_3 + F_2$

c) Las sumas anteriores ¿son *sumas directas*? Cuando así ocurra, escribir la descomposición única de cada vector de la suma en suma de dos vectores uno de cada subespacio.

Solución

15.- Dados los *subespacios vectoriales* F determinado por las *ecuaciones cartesianas* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ y G por las *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_5 = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$ del espacio vectorial R^5, se pide: *bases* de F, G, F+G y $F \cap G$.

Solución

16.- Determinar, en cada caso, si los vectores dados generan y/o *libre* de R^4.

a) $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$

b) $\{(1,3,-5,0),(-2,1,0,0),(0,2,1,-1),(1,-4,5,0)\}$

c) $\{(1,0,-2,5),(2,1,0,-1),(1,1,2,1)\}$

Solución

17.- Escribir cada uno de los siguientes polinomios como *combinación lineal* de $x+1$, x^2+x, x^2+2.

a) x^2+3x+2

b) $2x^2-3x+1$

c) x^2+1

d) x

Solución

18.- Determinar si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan el mismo *subespacio vectorial* de R^3 o subespacios distintos

a. $G_1=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $G_2 = \{(2,1,-1), (1,2,1)\}$

b. $G_1=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $G_2 = \{(2,1,-1), (1,-1,0)\}$

Solución

19.- Si $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{z}\}$ es *libre*, ¿cuáles de los siguientes conjuntos también lo son?

a) $\{\vec{u}-\vec{v},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\}$

b) $\{\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}\}$

c) $\{\vec{u}-\vec{v},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{z},\vec{z}-\vec{u}\}$

d) $\{\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{z},\vec{z}+\vec{u}\}$

Solución

20.- En $V = R^3$, sea $F = \{ (x,y,z) \ / \ 2x+y+z=0\}$. Buscar un *subespacio suplementario* de F.

Solución

21.- Sean F_1 y F_2 los siguientes *subespacios vectoriales* de R^5:

$$F_1 = \left\{ \vec{x} \ / x_1 + \ldots + x_5 = 0 \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \vec{x} \ / x_1 = \ldots = x_5 \right\}$$

Analizar si F_1 y F_2 son *subespacios suplementarios* de R^5 obteniendo la descomposición de cualquier vector $\vec{u} \in R^5$ en suma $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, donde $\vec{u_1} \in F_1$ y $\vec{u_2} \in F_2$.

Solución

22.- En cada caso, encontrar una *base* de V que contenga a $\vec{v}$ y/ó $\vec{w}$:

a) $V = R^3$, $\vec{v} = (0,\ 1,\ 0)$

b) $V = R^4$, $\vec{v} = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{w} = (0, 1, 0, 1)$

c) $V = P_3$, $\vec{v} = x^2 + 1$, $\vec{w} = x^2 + x$

Solución

23.- Sea el subespacio vectorial F generado por los siguientes vectores de espacio vectorial R^4: $\vec{u}_1 = (2, 3, 1, 0); \vec{u}_2 = (1, 0, 1, 0); \vec{u}_3 = (0, 3, -1, 0)$. Se pide:

a) *Rango* de $H = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$. ¿Qué clase de sistema es H? ¿Existe alguna relación de dependencia entre los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$?

b) *Dimensión* y una *base* de F.

c) Las *coordenadas* de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ respecto de la base obtenida en el apartado anterior.

d) Unas *ecuaciones paramétricas* de F.

e) Unas *ecuaciones cartesianas* o *implícitas* de F.

f) A partir de las *ecuaciones cartesianas* otras *ecuaciones paramétricas* distintas del apartado d).

g) ¿El vector (1,0,0,0) pertenece o no a F?

h) Una *base* B* del espacio vectorial R^4 que contenga a los vectores de una base de F.

i) Las ecuaciones del *cambio de base* de la base B* (del apartado anterior) a la *base canónica* B_c de R^4.

j) Las ecuaciones del *cambio de la base* B_c a la base B*

k) La expresión analítica del vector $\vec{e}_2$ de la *base canónica* respecto de la base B*.

Solución

24.- Si F y G son *subespacios* de V, demostrar que $F \cup G$ es subespacio de V si y solo si $F \subset G$ ó $G \subset F$.

Solución

25.- Sea V el *espacio vectorial* de las funciones reales de variable real. Sea $F_1 = \{f \in V / f \text{ es par}\}$ y $F_2 = \{g \in V / g \text{ es impar}\}$. Demostrar:

a) F_1 y F_2 son *subespacios vectoriales* de V.

b) $V = F_1 \oplus F_2$ (Nota: $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$).

Solución

26.- Consideremos el conjunto R^2 formado por todas las parejas (x,y) de números reales. Se define en R^2 la operación interna (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') y una de las operaciones externas siguientes:

a) $\lambda(x,y)=(\lambda x,0)$
b) $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
c) $\lambda(x,y)=(\lambda+\lambda x-1,\lambda+\lambda y-1)$
d) $\lambda(x,y)=(\lambda y,\lambda y)$

para $\lambda \in R$. Decir, para cada uno de los cuatro casos, si se obtiene o no una estructura de *espacio vectorial* en R^2.

Solución

27.- Comprobar que el conjunto {(1,1,0), (1,0,2), (0,1,2)} forma una *base* del espacio R^3. Hallar las *coordenadas* del vector (2,5,10) en dicha *base*.

Solución

28.- Demostrar que los vectores (1,0,-2,1), (1,3,2,-2) y (2,3,4,1) son *linealmente independientes*. Construir, a partir de la *base canónica*, una base que contenga a estos tres *vectores*.

Solución

29.- Encontrar una *base* del subespacio F de R^3 engendrado por los vectores (1,2,3) (-1,5,2) y (1,9,8). ¿Qué valor hay que dar a x para que el vector (x,16,13) sea de este *subespacio*?

Solución

30.- Si los números 1,3 y 5 son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base {(1,1,0),(0,1,1), (1,0,1)}, hallar las *coordenadas* del vector $\vec{v}$ en la *base canónica*.

Solución

31.- Sean $B = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ y $B' = \{\vec{u}\,',\vec{v}\,',\vec{w}\,'\}$ dos bases de R^3, tales que $\vec{u}\,' = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}\,' = \vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{w}\,' = \vec{u}+\vec{w}$. Hallar las ecuaciones del *cambio de la base* B a B' y de la base B' a B.

Solución

32.- Dadas las bases de R^3, $B=\{\vec{u}_1 = (2,1,0),\ \vec{u}_2 = (-1,0,1),\ \vec{u}_3 = (0,1,-2)\}$ y $B'=\{\vec{v}_1 = (0,1,1),\ \vec{v}_2 = (1,0,0),\ \vec{v}_3 = (2,0,1)\}$. a) Hallar la expresión analítica del *cambio de base* de B a B´, de B´a B y de B´a la *base canónica*. b) Si $\vec{a} = (1,1,1)$ respecto de B ¿cuáles son sus coordenadas respecto de B'? c) Si $\vec{b} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, escribir la expresión de $\vec{b}$ respecto de B.

Solución

33.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ de *cambio de base* de B a B', siendo $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B'=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Escribir el *vector* $\vec{u}_2$ en función de los vectores de B'. Hallar la matriz del *cambio de base* de B' a B.

Solución

34.- Consideremos las *bases* de V^3:

$B_1=\left\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\right\}$,

$$B_2=\left\{\vec{u}_1=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \vec{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{u}_3=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

a) Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2 b) Hallar el conjunto F de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2. Demostrar que F es *subespacio* de V^3 y hallar una *base* de F.

Solución

35.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 17 & -7 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. b) Hallar una *base* del subespacio engendrado por los vectores fila de la matriz A. c) Hallar unas ecuaciones vectoriales, *paramétricas* e *implícitas* de dicho subespacio.

Solución

36.- Hallar una *base* del subespacio vectorial F formado por las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar un *subespacio suplementario* de F.

Solución

37.- Sea F el subespacio vectorial F = < (1,-1,0), (0,6,2), (1,5,2), (3,3,2) >. Se pide:

a) Una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de F.

b) Un *subespacio G suplementario* del subespacio F.

c) Sea $\vec{x} = (3,-1,-3)$. Indicar si $\vec{x} \in F$ ó $\vec{x} \in G$ ó $\vec{x} \in F+G$. Descomponer el vector $\vec{x}$ en suma de dos vectores, uno paralelo y otro perpendicular al vector $\vec{u} = (1,-1,0) \in F$.

d) Una *base* B_1 del espacio vectorial F+G.

e) Una superficie en R^3 tiene de ecuación $3x^2+2xy-2xz+3y^2+2yz+3z^2=1$. Determinar la ecuación (lo más simplificada posible) de esta superficie, respecto de la nueva *base*: $B_2 = \left\{\vec{u} = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right), \vec{w} = \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

f) Ecuaciones del *cambio de base* de B_1 a B_2.

g) El conjunto H de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y B_2.

h) Demostrar que H es un *subespacio vectorial* del espacio vectorial R^3.

Solución

38.- Se considera el espacio vectorial R^4. Se pide:

a) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores generan V:

$$F = \left\{\vec{u_1} = (1,1,1,1), \vec{u_2} = (0,1,1,1), \vec{u_3} = (0,0,1,1), \vec{u_4} = (0,0,0,1)\right\}$$

$$H = \left\{\vec{v_1} = (1,3,-5,0), \vec{v_2} = (-2,1,0,0), \vec{v_3} = (0,2,1,-1), \vec{v_4} = (1,-4,5,0)\right\}$$

¿Cuál de ellos es, pues, una *base* de R^4, que llamaremos B?

b) Sean $S = \left\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right\}$ y $T = \left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}$ donde:

$$\vec{x} = (1,2,5,3) \qquad \vec{u} = (2,1,4,-3)$$
$$\vec{y} = (3,1,5,-6) \qquad \vec{v} = (3,1,3,-2)$$
$$\vec{z} = (1,1,3,0) \qquad \vec{w} = (9,2,3,-1)$$

Sea $U = \langle S \rangle$ y $V = \langle T \rangle$. Hallar la *dimensión* y una *base* de cada uno de los *subespacios* U, V, U + V y $U \cap V$.

c) Completar la base de U + V obtenida en el apartado anterior para formar una base B' de R^4. Escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B a B' y de B' a B.

Solución

39.- a) Demostrar que si los vectores $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ son *base* de R^3 y el vector $\vec{u}$ es tal que $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3$ con $\lambda_2 \neq 0$ entonces los vectores $\vec{e}_1,\vec{u},\vec{e}_3$ son *base* de R^3.

b) Generalizar el resultado anterior: Si $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ son una *base* de un *espacio vectorial* V y $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+...+\lambda_n\vec{e}_n$, con $\lambda_i \neq 0$, entonces los vectores $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...\vec{e}_{i-1},\vec{u},\vec{e}_{i+1},....,\vec{e}_n$ son también *base* de V.

Solución

40.- Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ una *base* de un *espacio vectorial* E. Demostrar que los n vectores de E siguientes:
$\vec{w}_1 = \vec{v}_1, \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, ..., \vec{w}_n = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + ... + \vec{v}_n$ son *base* de E.

Solución

41.- a) Hallar la suma y la intersección de los *subespacios vectoriales* E y F definidos por los siguientes sistemas generadores:

E=<(1,1,1), (1,0,1), (2,6,2)>; F=<(2,0,1), (1,-1,3), (0,2,-5)>

b) ¿Son E y F *suplementarios*?

c) Sean B_1={(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)} y B_2={(2,0,1), (0,1,0), (1,-1,1)} dos bases de R^3. Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2 y las *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2 del vector de *coordenadas* (1,0,0) en la *base canónica*.

Solución

42.- En R^3 se considera el *subespacio vectorial* S engendrado por los vectores {(1,0,1), (1,1,0), (1,-1,2)} y el *hiperplano* H de ecuación {x + y = 0} respecto de la *base canónica* de R^3.

Se pide:

1. *Ecuaciones paramétricas* e *implícitas* de S y de H
2. Obtener las *bases* de $S \cap H$ y S+H

Solución

43.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar una *base* de F.

c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.

d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.

e) Sea C el subespacio vectorial de R^3 engendrado por los vectores columna de la matriz A. Hallar una base de C.

f) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.

g) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de C.

h) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de C.

i) ¿F y C son *hiperplanos* distintos?

j) Calcular una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de $F \cap C$.

Solución

44.- Sea G el subconjunto de vectores de .4 formado por los vectores {(2,3,2,0), (4,6,4,1), (1,0,1,0), (0,0,0,6)} y sea S el *subespacio vectorial* generado por dichos vectores. Se pide:

a) Obtener una *base* de S

b) *Ecuaciones paramétricas e implícitas* de S

c) Valores de los *parámetros* a y b para que los vectores (a,a,2,2) y (1,b,1,b) pertenezcan ambos a S.

Solución

45.- Se consideran en R^4 los *subespacios vectoriales* S = < (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)> y T = < (1, 1 ,0, 1), (1, 2, -1, 2), (3, 5, -2, 5)>

a) Hallar la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* del subespacio S + T.

b) Hallar la *dimensión* y unas *ecuaciones paramétricas* del subespacio $S \cap T$.

Solución

46.- Dadas las bases $B_1 = \left\{\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (1,0,-1)\right\}$ y $B_2 = \left\{\vec{v}_1 = (2,1,0), \vec{v}_2 = (3,2,-1), \vec{v}_3 = (0,0,1)\right\}$ del espacio vectorial R^3. Se pide:

a) Ecuación matricial del *cambio de base* de B_1 a la base B_2.

b) Ecuación matricial del *cambio de base* de B_2 a la base B_1.

c) Si el vector tiene *coordenadas* (1,1,1) respecto de la base B_1 ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de la base B_2?

Solución

47.- Sea el *subespacio vectorial* F de R^4 generado por los siguientes vectores:

$\vec{u}_1 = (1,1,2,0)$; $\vec{u}_2 = (2,-1,0,1)$; $\vec{u}_3 = (5,-1,2,2)$. Se pide:

a) Una *base* de F.

b) *Ecuaciones paramétricas* de F.

c) Una *base* B' de R^4 que contenga la base de F obtenida en el apartado a).

d) Las ecuaciones del cambio de base de la canónica B_c de R^4 a la base B' (del apartado anterior).

Solución

48.- En el espacio vectorial real R^4, se consideran los siguientes conjuntos de vectores:

$S = \left\{ \vec{u} = (2,3,1,-5), \vec{v} = (0,2,-1,3), \vec{w} = (4,0,5,-19), \vec{t} = (-2,1,-3,11) \right\}$

$T = \left\{ \vec{p} = (2,5,0,-1), \vec{q} = (2,1,2,-7) \right\}$

Sean F y G los subespacios engendrados por S y T, respectivamente, es decir: $F = \langle S \rangle$ y $G = \langle T \rangle$.

a) Hallar los *rangos* de S y de T.

b) Hallar a y b para que el vector (2, a, 3, -b) $\in$ F .

c) Dar unas *ecuaciones implícitas* de F y de G.

d) Calcular la *dimensión* y una base de cada uno de los subespacios siguientes: F, G, F+G y F $\cap$ G . ¿Es F+G suma directa?

e) Hallar una base B de $\Re^4$ que contenga a los vectores $\left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{p} \right\}$. Escribir las ecuaciones de *cambio de base* de B a la *base canónica* y de la base canónica a B.

Solución

49.- Sea A = {(1, 3, -1, 4), (3, 8, -5, 7), (2, 9, 4, 23)}$\subset R^4$. Se pide:

a) Estudiar si A es un *sistema libre* o *ligado*.

b) Si F es el *subespacio vectorial* de R^4 generado por A, hallar a partir de A, una *base* B_F, unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* de F.

c) Hallar una *base* B_S de un subespacio S, que sea suplementario de F, tal que $B_F \cup B_S$ sea una *base escalonada* de R^4.

d) Sean B = {(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 3)} y B' = {(-1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)} $\subset R^3$. Comprobar que B y B' son bases de R^3 y hallar las ecuaciones del cambio de B a B'.

Solución

50.- Sean los subespacios vectoriales:

$$E = \left\{(\alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma) / \alpha, \beta, \gamma \in R\right\}; \; F = \left\{(x, y, z) \in R^3 / x - y + 2z = 0\right\}$$

Se pide:

a) *Bases* de E, F, E+F y E $\cap$ F .

b) *Ecuaciones implícitas* de E $\cap$ F .

Solución

51.- Sea el vector $\vec{a} = (1,2,3)$ expresado en la *base* B=$\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ del espacio vectorial R^3. Hallar las *coordenadas* de $\vec{a}$ en la *base* $B' = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\right\}$, sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{array}\right\}$$

Solución

52.- Dado el espacio vectorial R^3:

a) Hallar una *base* del subespacio vectorial generado por los vectores: S= $\left\{\vec{a} = (2,4,0), \vec{b} = (1,2,1), \vec{c} = (3,2,1), \vec{d} = (3,4,1)\right\}$ y expresar el vector $\vec{d}$ en dicha base.

b) Encontrar un *vector* común al subespacio E generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1,2,3)$ y $\vec{u}_2 = (3,2,1)$ y al subespacio F generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ y $\vec{v}_2 = (3,4,3)$.

c) Indicar si los *subespacios vectoriales*
$H = \{(x,y,z)/2x + y - z = 0; x + y = 0\}$ y
$G=\{(\alpha - \beta + 2\gamma, \beta - \alpha - 2\gamma, \alpha - \beta + 2\gamma)/\alpha,\beta,\gamma \in R\}$ son iguales.

d) Sean $B = \{\vec{u} = (2,1,0), \vec{v} = (-1,0,1), \vec{w} = (0,1,-2)\}$ y
$B' = \{\vec{u}' = (0,1,1), \vec{v}' = (-1,0,0), \vec{w}' = (2,0,1)\}$. Hallar la *matriz del cambio de base* de B a B'.

Solución

53.- a) Dados los subespacios vectoriales de R^4 siguientes:

$$F \equiv \begin{cases} x = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \\ z = \lambda_2 \\ t = -\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \in R \qquad G \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases}$$

Se pide calcular sendas bases de F, G, F + G, $F \cap G$.

b) Dadas las *bases* de R^3 siguientes:

B = {(1,1,1), (1,1,0), (1,0, 0)} y B' = {(2,1,2), (1,0,3), (-1,4,2)}

Se pide hallar la ecuación matricial del *cambio de la base* B a la base B'.

Solución

54.- En R^4 consideramos los subespacios vectoriales:

$$A = \{(x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } x\text{-}y = z\text{-}t = 3z\text{-}x = 0\}$$
$$B = \langle (3,1,2,0),\ (1,1,0,-1),\ (3,1,3,-2),\ (1,1,-1,1)\rangle$$
$$C = \{(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + 2\gamma, \gamma, \beta) \in R^4 \text{ tales que } \alpha,\beta,\gamma \in R\}.$$ Se pide:

a) *Dimensión* y una *base* del subespacio $B \cap C$. b) *Dimensión* y una *base* del subespacio A+C. c) Determinar un *subespacio* A' tal que $A \oplus A' = R^4$.

Solución

55.- Encontrar los *escalares* que permiten escribir el vector de R^4, (8, 4, 2, 0) como *combinación lineal* de los vectores (1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 0).

Solución

56.- Se consideran los vectores $\vec{a}_1$=(2,1,0,0), $\vec{a}_2$=(1,1,-1,0), $\vec{a}_3$=(3,1,1,0) y $E = < \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 >$ y $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_2 = -x_3\}$ subespacios vectoriales de R^4. Se pide: a) *Dimensión* y *bases* de E y G. b) *Dimensión* y una *base* de un *suplementario* de E que se denominará F. c) *Ecuaciones implícitas* de E. d) *Dimensión* y una *base* de $E \cap G$. e) Formar una nueva *base* de R^4, B' formada por los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y los restantes vectores pertenecientes a G. f) Encontrar las *coordenadas de los vectores* $\vec{a}_1$ y $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$ en la base B', siendo $B = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \}$ la *base canónica*.

Solución

57.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{ (1,1,0), (0,-1,0), (1,0,1)\}$ y

$B^* = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las *coordenadas de un vector* en las *bases* B, B' y B^* respectivamente.

a.- Escribir la ecuación matricial del *cambio de base* de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = x^* + z^* \\ y = y^* - z^* \\ z = -x^* + z^* \end{cases}$, dar las *coordenadas de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de B y de B'.

Solución

58.- Se considera un subespacio F de ecuaciones $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

a.- Obtener una *base* de F.

b.- Si G es el subespacio generado por el sistema $\{(1,1,-1), (1,1,0)\}$,

b.1.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio G.

b.2.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio $F \cap G$.

Solución

59.- En el espacio vectorial R^3 se tienen las siguientes bases:

$B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $B' = \{ (1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0) \}$ y

$B^* = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Sean (x, y, z), (x', y', z') y (x^*, y^*, z^*) las *coordenadas de un vector* en las *bases* B, B' y B^* respectivamente.

a.- Escribir la ecuación matricial del *cambio de base* de B a B'.

b.- Sabiendo que $\begin{cases} x = y^* + z^* \\ y = x^* - z^* \\ z = -y^* + z^* \end{cases}$, dar las *coordenadas de los vectores* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de B y de B'.

Solución

60.- Se considera un subespacio F de ecuaciones $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - \beta \\ z = \beta \end{cases}$.

a.- Obtener una *base* de F.

b.- Si G es el subespacio generado por el sistema $\{(1,-1,-1),\ (1,2,0)\}$,

b.1.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio G.

b.2.- Hallar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones cartesianas* del subespacio $F \cap G$.

Solución

61.- En un espacio vectorial V, sea la *base canónica* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se considera el subespacio S_1 de ecuación cartesiana en x = y-z.

a) Obtener una *base* de S_1 formada por *vectores unitarios*.

b) Si S_2 es el subespacio engendrado por el sistema $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$, hallar unas *ecuaciones paramétricas y cartesianas* del subespacio S_2.

c) Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios vectoriales* $S_1 \cap S_2$ y S_1+S_2.

Solución

62.- Dado el espacio vectorial R^4 consideremos los *subespacios*:

$V_1 = \langle(1, 2, 0, 1)\rangle$

$V_2 = \{(x, y, z, t)\ /\ x-y+z+t = 0,\ y-z = 0\}$

$$V_3 = \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

a) Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios* anteriores.

b) ¿Pertenece el vector v = (2, 4, 0, 2) a V_1 ó V_2 ó V_3? En caso afirmativo calcular sus *coordenadas* respecto de la *base* correspondiente obtenida en el apartado a).

Solución

63.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*

$$A = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x = y = z\},$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in R^4 / \ x = \alpha + \beta + \gamma + \mu, y = \alpha + \beta + 2\mu, z = \gamma + \mu, t = \beta + \gamma\}$$

a) Calcular una *base* y *dimensión* de A y de B.

b) Calcular una *base* y *dimensión* de $A \cap B$ y de $A + B$.

c) Determinar un *subespacio* F *suplementario* de A.

Solución

64.- En el *espacio vectorial* real de *dimensión* cuatro. Se dan las *bases* $B = \{\vec{u}_1, \ \vec{u}_2, \ \vec{u}_3, \ \vec{u}_4\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, \ \vec{v}_3, \ \vec{v}_4\}$ las cuales están relacionadas por

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 &= 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_4 &= -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 + 3\vec{v}_4 \end{aligned}$$

1° Se considera el vector $\vec{x} \in R^4$ cuyas *coordenadas* respecto de la *base* B son $\vec{x} = (1, \ 2, \ 0, \ 0)$. Determinar sus *coordenadas* respecto de la *base* B'.

2° Se considera el vector $\vec{y} \in R^4$ cuyas *coordenadas* respecto de la *base* B' son $\vec{y} = (-1, \ 2, \ 0, \ 1)$. Determinar sus *coordenadas* respecto de la *base* B.

Solución

65.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$F = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x = y = z\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x = \alpha + \beta + \gamma, y = \alpha + 2\gamma, z = \gamma, t = \beta\}$$

a) Calcular una *base* y la *dimensión* de los subespacios *F*, *G*, $F \cap G$ y de *F+G*.

b) Determinar un subespacio *F'* para que $F \oplus F' = R^4$.

Solución

66.- Dadas las *bases* de R^3,

$$B = \left\{\vec{u} = (1,\ 0,\ 0), \vec{v} = (0,\ 1,\ 1), \vec{w} = (1,\ 0,\ 1)\right\}\ ,$$

$$B' = \left\{\vec{u}' = (0,\ 0,\ 1), \vec{v}' = (0,\ 1,\ 2), \vec{w}' = (1,\ 1,\ 0)\right\}$$

a) Hallar la ecuación matricial de cambio de *base* de B a B'.

b) Si $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ respecto de la *base* B, ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B?

Solución

67.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$A = \left\langle (2,0,1,1)\ \ (1,1,1,1)\ \ (1,-3,-1,-1)\ \ (3,-7,-2,2) \right\rangle$$

$$E = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } x + y + 2z = 0,\quad 2x - y - 2z = 0 \right\}$$

a) Calcular una *base* y la *dimensión* de los subespacios *A*, *E*, $A \cap E$ y de *A+E*.

b) Determinar un subespacio *A'* para que $A \oplus A' = R^4$.

Solución

68.- Dadas las bases de R^3, $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ sabiendo que:

$$\vec{u} = 2\cdot\vec{u}' - \vec{v}';\quad \vec{v} = \vec{u}' - \vec{w}';\quad \vec{w} = \vec{v}' + 2\cdot\vec{w}'$$

a) Hallar la ecuación matricial de *cambio* de *base* de B' a B.

b) Si $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$ respecto de la base B', ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B y respecto de la *base* B'?

Solución

69.- En R^4 consideramos los *subespacios vectoriales*:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \text{ tales que } -2x + 3y + 2z + t = 0 \right\}$$

$$T = \left\langle (3,1,2,0);\ (1,1,0,-1);\ (3,1,3,-2);\ (1,a,-1,1) \right\rangle$$

a) Calcular el valor de "a" para que *T* tenga *dimensión* 3.

b) Con el valor de a determinado, hallar la *dimensión* y una *base* de los subespacios $S \cap T$ y de *S+T*.

c) Determinar un subespacio *S'* para que $S \oplus S' = R^4$.

Solución

70.- Se consideran dos *bases* de R:

$$B = \left\{\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (-1,1,0), \vec{w} = (1,2,1)\right\}\ \text{y}$$

$$B' = \left\{\vec{u}' = (1,0,0), \vec{v}' = (3,7,-2), \vec{w}' = (0,4,1)\right\}$$

a) Hallar la ecuación matricial de *cambio* de *base* de B a B'.

b) Si $\vec{a} = (1,\ -1,\ 1)$ respecto de la *base* B, ¿cuáles son sus *coordenadas* respecto de B'?

c) ¿Cuáles son las *coordenadas* del vector $\vec{w}$ respecto de la *base* B, respecto de la *base* B' y respecto de la *base* canónica?

Solución

Conmutativa

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por “+” $V \xrightarrow{+} V$

Conmutativa: A+B=B+A para cualesquiera $A, B \in V$.

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por “.” $V \xrightarrow{\cdot} V$

Conmutativa: A.B=B.A para cualesquiera $A, B \in V$.

Espacio Vectorial

Sea V un conjunto donde hemos definido una ley u operación interna, que designaremos por "+" $V \xrightarrow{+} V$. Sea **K** un cuerpo (conmutativo) y sea, por último, una operación externa que designaremos por "·" $\mathbf{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V$.

Diremos que (V,+, ·) tiene estructura de ***espacio vectorial*** sobre el cuerpo **K**, o simplemente que (V,+, ·) es un **K**-espacio vectorial cuando se verifiquen las condiciones siguientes:

[A1] **Asociativa:** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento que designaremos $\vec{0} \in V$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a} \in V$ existe un único elemento de V, que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

*Observemos que (V,+) debe ser, por tanto, un **grupo conmutativo**.*

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in K$ y cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A7] $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Subespacio vectorial

Sea (V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial.

Sea F una parte no vacía del K-espacio vectorial V. F es un **subespacio vectorial** de V con las operaciones + y · inducidas por V si y sólo si se verifica:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{K}, \forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{F} \Rightarrow \lambda \vec{\mathbf{a}} + \mu \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{F}$$

Base

Lado o cara horizontal a partir del cual se mide la altura de una figura plana o de un sólido.

Base de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Base canónica

Base canónica, B_c, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0),..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Base escalonada

Base de un espacio vectorial cuyos vectores forman una matriz triangular

Base ortonormal o métrica

La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\| = 1,\ i=1,2,...,n$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Base ortogonal

La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **ortogonal** cuando sus vectores son ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Base unitaria

La base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es **unitaria** cuando sus vectores son unitarios, es decir, su módulo es 1 ($\|\vec{u}_i\| = 1,\ i=1,2,...,n$).

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Ecuaciones cuyas incógnitas son coordenadas. Relativo a las ecuaciones de un subespacio vectorial las ecuaciones cartesianas forman el sistema homogéneo que define dicho subespacio.

Linealmente independientes

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0)=\lambda_1 f_1+...+\lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=0,\ \forall i$.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n\in \mathbf{V}$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{\mathbf{0}}=\lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1+...+\lambda_n\vec{\mathbf{a}}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=\mathbf{0},\ \forall \mathbf{i}$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** si lo son los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Rango de un sistema de vectores

Rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Rango de una aplicación lineal

Rango de la aplicación lineal f es la dimensión del subespacio Imagen de f.

Rango de una matriz

Rango de la matriz A es el orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

En Estadística

Rango o recorrido de una variable estadística

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

Sistema generador

Sea $H = \{\vec{a}_1,...,\vec{a}_n\}$ un subconjunto de V. H es un **sistema generador** de V si para todo vector $\vec{v} \in V$ existen $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$ tal que $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$.

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.

Combinación lineal

Sean $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos **combinación lineal** *d*e los vectores $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$.

Base canónica

Base canónica, B_c, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Cambio de base en un espacio vectorial

Sea V un **K**-e.v. de dim n y B= $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, B'= $\{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ dos bases de V

tales que: $\begin{cases} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{u}'_1 + a_{12}\vec{u}'_2 + \cdots + a_{1n}\vec{u}'_n \\ \vec{u}_2 = a_{21}\vec{u}'_1 + a_{22}\vec{u}'_2 + \cdots + a_{2n}\vec{u}'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{u}_n = a_{n1}\vec{u}'_1 + a_{n2}\vec{u}'_2 + \cdots + a_{nn}\vec{u}'_n \end{cases}$

Si $\vec{X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $\vec{X}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, P= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, abreviadamente la ecuación matricial anterior se escribe $\boxed{\vec{X}' = P\vec{X}}$, donde ***P es la matriz que define el cambio de la base B a la base B'.*** Diremos que P es la matriz de paso de B a B'.

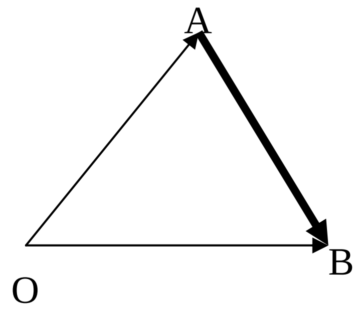
Este sistema de ecuaciones se denomina **ecuaciones del cambio de la base B a la base B'.**

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector

Los escalares $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ tales que $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+...+\lambda_n\vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector** $\vec{v}$ **respecto de la base** $B=\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.

Las **coordenadas** de un vector libre $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo B menos las coordenadas del origen A, es decir, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.



Dimensión

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se dice que la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tiene **dimensión** $m \times n$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Subespacios suplementarios

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Suma directa

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos **suma directa de E_1 y E_2** a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Vector

- Elemento de un espacio vectorial, se identifica por sus coordenadas respecto de una base del espacio vectorial.
- Segmento orientado, se caracteriza por su dirección, sentido y módulo.

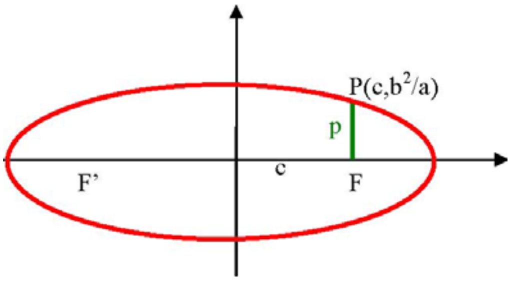
Hiperplano

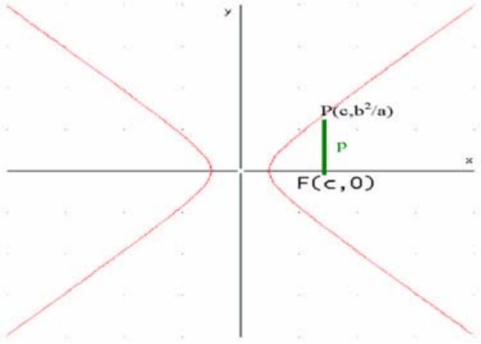
Un subespacio vectorial H del espacio vectorial V es un ***hiperplano*** si y solo si dim(H)=dim(V)-1.

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Linealmente dependientes

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente dependientes**, cuando existan los elementos $\lambda_1,...,\lambda_k \in K$ no todos nulos, tales $(0)=\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente dependientes,** cuando existan los elementos $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbf{K}$ no todos nulos, tales que $\vec{\mathbf{0}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + ... + \lambda_n \vec{\mathbf{a}}_n$. También se dice que constituyen un sistema ***ligado***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente dependientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Escalar

Cada elemento de un cuerpo K, generalmente el de los números reales. Constituyen las coordenadas de un vector respecto de una base de un espacio vectorial.
Los escalares $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tales que $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector** $\vec{v}$ **respecto de la base** $B=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.