Aplicaciones lineales. Diagonalización

1.- En los siguientes casos estudiar si f es una *aplicación lineal* y en caso afirmativo hallar una *matriz* A tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, así como los *subespacios vectoriales N(f)* e *Im(f)*

a) $f(x,y) = (2x,-y)$
b) $f(x,y) = (x^2,y)$
c) $f(x,y,z) = (2x+y,\ x-y-z,0)$
d) $f(x,y) = (x^2 + y^2,\ \sqrt[3]{xy})$

Solución

2.- Se considera la aplicación $f: \mathfrak{R}^4 \to \mathfrak{R}^4$ definida por:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = (x + y + a\,z,\ -2x + y + t,\ a\,x + 2y - 2t,\ a\,z + t)$$

a) Escribir su ecuación matricial de f y probar que f es *lineal* para $\forall$ a real.
b) Hallar los valores de a para los que f es *biyectiva*.
c) Para a = 0, hallar los subespacios *Núcleo* e *Imagen* de f y dar una *base* de cada uno de ellos
d) Estudiar si f es una aplicación *inyectiva* para a = 0.
e) ¿$(1,1,1,0) \in$ *N(f)*? ¿$(2,-1,2,0) \in$ *Im(f)*?
f) Dado el subespacio $S = \{(x,y,z,t) \in \mathfrak{R}^4$ tales que $x + y - z = y + z - t = 0\}$, hallar una base, la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* de f(S) para a = 0.

Solución

3.- a) Hallar, respecto de la *base canónica*, la ecuación de la *transformación lineal f (endomorfismo)* de $\mathfrak{R}^3$ que verifica que $f(2,\ 1,\ 0) = (7,\ 0,\ 0)$, $f(-1,\ 3,\ 1) = (0,\ 7,\ 0)$, $f(0,\ 5,\ 7) = (5,\ 10,\ 0)$.

b) ¿Es f *biyectiva*?
c) Hallar *N(f)* e *Im(f)*.
d) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un endomorfismo para que las imágenes de vectores *linealmente independientes* sean linealmente independientes?

Solución

4.- Sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos *bases* de $\mathfrak{R}^3$ y f un *endomorfismo* que respecto de la base B tiene por ecuación $f(x,\ y,\ z) = (x + y,\ y + z,\ x + z)$. Se pide hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_1$.

Solución

5.- Sea f la *transformación lineal* de $\mathfrak{R}^3$ tal que:

N(f) = $\langle (5,1,0), (-3,0,1) \rangle$ y $f(1,0,0)=(2,-1,1)$. Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Sin hacer cálculos razona porqué 0 es un *valor propio* de A y cuál es su mínimo orden de multiplicidad.
c) Hallar todos los *valores propios* de A y los *subespacios de vectores propios* asociados.
d) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal* D *semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
e) Hallar A^n.

Solución

6.- Sea f un *endomorfismo* de $\mathfrak{R}^3$ cuya matriz asociada A, respecto de la *base canónica*, verifica que tiene 2 *valores propios* distintos, $\lambda=2$ doble y $\lambda=0$ simple, y que los *subespacios de vectores propios* asociados respectivamente son $V_2 = \langle(1, 0, 1), (0,1,2)\rangle$ y $V_0 = \langle(1,1,1)\rangle$.
a) Razonar porqué A es *diagonalizable*.
b) Escribir una *matriz D diagonal* semejante a A, así como la matriz de paso que permite dicha diagonalización.
c) Hallar A.
d) Dar sendas *bases* de *N(f)* e *Im(f)*.
e) ¿Qué debe verificar A para que haya *vectores* no nulos de R^3 *invariantes* por f? Sin hacer cálculos, argumenta si existen vectores no nulos de R^3 invariantes por f.

Solución

7.- Sea f la *transformación lineal* de $\mathfrak{R}^3$ cuya matriz en la *base canónica* es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar para qué valores de a y b es A *diagonalizable*.
b) ¿Cuál es el *subespacio de vectores* invariantes por f para a = 1?
c) Justificar para qué valores de a f no es *biyectiva*.

Solución

8.- a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ no es *diagonalizable*.

b) Comprobar, sin efectuar ningún cálculo que la matriz $B=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es *diagonalizable* para cualquier valor que tomen *a* y *b*.

Solución

9.- Se considera la *transformación lineal* de R^3 definida por la *matriz simétrica* $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Hallar una *base* de *vectores propios* que sean *ortogonales* entre sí.

b) Hallar una matriz de paso *ortogonal* y la *matriz diagonal semejante* a A.

Solución

10.- Demostrar que si Q es una *matriz ortogonal* que permite la *diagonalización* de A entonces A es *simétrica*:

Solución

11.- Se considera la aplicación f: $R^4 \to R^4$ definida por:

f(x, y, z, t) = (x + y + t, x − y + z + t, 2y − z, 3t)

a) Escribir su ecuación matricial y probar que f es *lineal*.
b) Hallar los subespacios *núcleo* e *imagen* de f y dar una *base* y la *dimensión* de cada uno de ellos.
c) Dado el subespacio S = {(x, y, z, t) $\in R^4$ tales que x + y − z = y + z − t = 0}, hallar una *base*, la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* de f(S).
d) Estudiar si los vectores (2, 0, 2, 3) y (4, 0, 3, 0) pertenecen a *Im(f)*.
e) Clasificar.

Solución

12.- Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a cierto *endomorfismo* f de R^3 respecto de la *base canónica* y sean los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (-1,2,1)$ de R^3.

a) Comprobar que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un *sistema libre* pero ,$\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}$ es *ligado*.
b) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un *endomorfismo* para que las imágenes de vectores *l.i.* sean *l.i.*?

Solución

13.- Probar que cualquier *matriz simétrica* real de orden 2 es *diagonalizable*.

Solución

14.- Halla una matriz de paso *ortogonal* para *diagonalizar* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución

15.- Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución

16.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del *espacio vectorial* R^3 y la *transformación lineal* f tal que: $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_3) = 4\vec{u}_2 \end{cases}$. Se pide:

a) Matriz asociada a f respecto de la base B.
b) Escribir su ecuación matricial.
c) Hallar la expresión analítica de f respecto de la base B.
d) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una base.
e) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una base.
f) ¿Son el *N(f)* e *Im(f) suplementarios*?
g) ¿*Rango* de f?
h) ¿Es f un *epimorfismo*?
i) ¿Es f un *monomorfismo*?
j) ¿Es f un *isomorfismo*?
k) ¿Es f un *automorfismo*?

Solución

17.- En el espacio vectorial $R^3(R)$ se define la *aplicación lineal*:
$f: R^3 \to R^3$, $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Se pide:
1. Matriz de f respecto de la *base canónica*. (llamarla A)
2. Clasificar f.
3. *Valores propios* de f.
4. Estudiar la *diagonalización* de f.
5. *Base* de *vectores propios* (si procede)
6. Matriz de f respecto de esta base de *vectores propios*. (llamarla D)
7. Relación entre la matriz A y D.
8. Hallar las *ecuaciones paramétricas* de todos los *subespacios invariantes*.
9. Hallar A^{25}.

Solución

18.- Sea $f: \Re^4 \to \Re^4$ definida por $f(x,y,z,t)=(7x,7y,7z+7t,0)$. Se pide:

a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*
b) Hallar las *ecuaciones implícitas* de la imagen del *subespacio*.
$S=\{(x,y,z,t)\in\Re^4/x=y=z\}$
Calcular una *base* y las ecuaciones del *núcleo* y de la *imagen* de f
Hallar el *polinomio característico* y los *subespacios de vectores propios* de f
Obtener la matriz P de *cambio de base* que *diagonaliza* A y la matriz D *diagonal* y *semejante* a A.

Solución

19.- Sea f una *transformación lineal* de R^4 tal que su matriz asociada respecto de la *base canónica* es:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar sendas *bases* de *N(f)* e *Im(f)*.
b) Hallar el *polinomio característico* y los *vectores propios* de f, así como los s.v. de vectores propios asociados ¿Coincide *N(f)* con alguno de éstos últimos?
c) Escribir el enunciado de un teorema de diagonalización que pruebe que A es *diagonalizable* y dar una base de vectores de R^4 respecto de la cual la matriz asociada a f sea una *matriz D diagonal*.
d) Dar D y la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A.
e) Escribir la definición de *matrices semejantes* ¿Son A y D semejantes? En caso afirmativo hallar A^7 utilizando que A y D son *semejantes*.

Solución

20.- Analizar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es *diagonalizable* según los valores del *parámetro* k.

Solución

21.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los *autovalores* de A y sus respectivas multiplicidades algebraicas.

b) Hallar las *ecuaciones paramétricas* y *cartesianas* de los *subespacios propios* de A.

c) Obtener una *base unitaria* de R^4 formada por *vectores propios* unitarios de A.

d) Calcular una *matriz diagonal semejante* a la matriz A.

e) Calcular el producto matricial $A^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución

22.- Dada la *transformación lineal* de R^3 definida por:

$$f(x, y, z) = (4x + y - 4z, 3z - 3x, 3x + y - 3z)$$

Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Sendas *bases* de *N(f)* e *Im(f)*.
c) Una base del subespacio *ortogonal* de *N(f)*.
d) Estudiar si A es *diagonalizable* y , en su caso, dar la *matriz diagonal*.
e) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base
B' = { (1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)}

Solución

23.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & a & 2-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ asociada a cierta *transformación lineal*

$f : V_3 \longrightarrow V_3$. Se pide:

a) Estudiar los valores de a para los cuales M es *diagonalizable*.

b) Para a=0, hallar *N(f)*, *Im(f)* y el subespacio de *vectores invariantes*.

Solución

24.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de α y β es A *diagonalizable*? Y ¿para qué valores de α y β se obtiene para A un *valor propio* triple?

b) Para α=0 y β=-1, hallar:

i) una *matriz diagonal semejante* a A.
ii) una matriz P que permita la diagonalización.
iii) una matriz P* *ortogonal* que permita la diagonalización.

Solución

25.- Sea la *aplicación lineal* $f:R^4 \to R^4$ definida por f(x,y,z,t)=(x, 3x+3y, 5y+5z+7t, 0). Se pide:

a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*.

b) Hallar las *ecuaciones implícitas* de la *imagen* por f del subespacio $S=\{(x,y,z,t)\in R^4/x=y\ ,\ x+y+z=0\}$

c) Calcular una *base* y las *ecuaciones implícitas* del *núcleo* y de la *imagen* de f.

d) Hallar el *polinomio característico* y los subespacios de *vectores propios* de f.

e) Obtener la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A y la matriz D *diagonal* y *semejante* a A.

Solución

26.- Sea f la *transformación lineal* de $\Re^3$ tal que:

$f\left(\vec{i}\right)=(4,\ 2,\ 1)$, $f\left(\vec{j}\right)=(1,\ 5,\ 1)$, $f\left(\vec{k}\right)=(-1,\ -2,\ 2)$ donde $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ es la *base canónica*. Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Hallar los *valores propios* de A y los *subespacios* de *vectores propios* asociados.
c) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal D semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
d) Hallar *N(f)*, *Im(f)* e indicar si f es *biyectiva*.
e) Hallar A^n.

Solución

27.- Sea la *transformación lineal* f de R^3 tal que:

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,+2x_2,2x_1+x_2,-x_3)$ Se pide:

a) Hallar la matriz M asociada a f respecto de la *base canónica*.

b) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una *base*.

c) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una *base*.

d) ¿Es f una *transformación ortogonal*?

e) *Diagonalizar*, si es posible, la matriz M.

f) Obtener una *base ortonormal* de R^3 formada por *vectores propios* de M.

Solución

28.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Dar una *base* de *Im(f)*

b) ¿Es f un *isomorfismo*?

c) ¿Es f *diagonalizable*?

d) En el caso de que sea diagonalizable, encontrar una matriz P que permita la diagonalización.

Solución

29.- Sea C el subconjunto de vectores del espacio vectorial R^3 dado por:

$$C = \{(x, y, z) /\ x + y + z = 0\}$$

y sea f la *transformación lineal* $f : R^3 \to R^3$ tal que:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 2z, y) \qquad \text{Se pide:}$$

a) Demostrar que C es un *subespacio vectorial* de R^3.
b) Obtener una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de C.
c) Obtener la ecuación matricial de f.
d) Dar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones implícitas* del *Núcleo* y de la *Imagen* de f.
e) Comprobar si f es *diagonalizable* y, en su caso, obtener una base de R^3 respecto de la cuál la matriz asociada a f sea una *matriz diagonal*.
f) Hallar la *dimensión* de f(C).

Solución

30.- Sea f una *transformación lineal* de R^3 cuyos *valores propios* son 2 y 3, con *subespacios propios* respectivos:

$$V_{\lambda=2} = \{(x, y, z) \in R^3 /\ x = 0\} \qquad V_{\lambda=3} = \{(x, y, z) \in R^3 /\ x = y = z\}$$

Se pide:

a) Una *base* de cada *subespacio propio*.
b) El *subespacio vectorial* $V_{\lambda=2} \cap V_{\lambda=3}$.
c) ¿Son *suplementarios* los dos subespacios propios? y ¿*ortogonales*?
d) Una *base* de R^3 formada exclusivamente por *vectores propios*.
e) Una *matriz diagonal* que defina f.
f) La matriz asociada a f respecto de la *base canónica*.

Solución

31.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que es *diagonalizable*.
b) Calcular una *matriz D semejante* a la matriz A.
c) Hallar una *base* de *vectores propios* del *endomorfismo* definido por A.
d) Hallar la matriz P, tal que, $D = P^{-1}AP$.

Solución

32.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del espacio vectorial R^3 y la *transformación lineal* f tal que:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 \end{cases}$$. Se pide:

a) Escribir su ecuación matricial.
b) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una *base*.
c) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una *base*.
d) ¿Es f *biyectiva*?
e) ¿Es f una *transformación ortogonal*?
f) *Diagonalizar*, si es posible, la *transformación lineal* f.

Solución

33.- Sea la *aplicación lineal* f: $\Re^3 \to \Re^3$ definida por:
f (x , y , z) = (- x + 2y , - x + 2y , - x + y + z) y sea S el *subespacio vectorial* de $\Re^3$ generado por los vectores:
S = < (1 , 1 , 0) , (2 , 2 , 1) , (1 , 1 , 1) , (0 , 0 , 1) > .
Se pide:

a) Obtener las *ecuaciones implícitas* del *núcleo* y la *imagen* de f.
b) Demostrar que f es *diagonalizable*.
c) Obtener una *base* B de $\Re^3$ en la cual la matriz asociada a f sea *diagonal*.
d) Obtener unas *ecuaciones implícitas* de S en la *base canónica* y otras *ecuaciones implícitas* de S en la base B.

Solución

34.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar una *base* de F.
c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.
d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.
e) Sea C el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores columna de la matriz A. Hallar una *base* de C.
f) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.
g) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de C.
h) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de C.
i) ¿F y C son *hiperplanos* distintos?
j) Calcular una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de $F \cap C$.
k) ¿Es A *diagonalizable*? En caso afirmativo, hallar una *matriz diagonal semejante* a A.

Solución

35.- Dado el *endomorfismo* de R^3 definido por f(x,y,z)=(x+2y-z,2y+z,2y+3z)

1°) Hallar la matriz A que define el *endomorfismo* f.

2°) Hallar los *subespacios propios* y una *base* de cada uno de ellos.

3°) Hallar algún subespacio *invariante* y el subespacio de *vectores invariantes*.

4°) ¿Es *inyectivo*? ¿Es *sobreyectivo*?

5°) ¿La matriz A es *diagonalizable*?

6°) ¿La suma de los *subespacios propios* es *suma directa*? ¿Son *suplementarios* los subespacios propios hallados en el apartado 2?

Solución

36.- Sea f una *aplicación lineal* tal que:

f(1,1,0) = (5,-1,3); f(1,-2,0) = (5,2,3); f(0,0,1) = (0,*a*,*b*)

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la *base canónica* y el valor de $|A|$.

b) Hallar los valores de a y b para los que f es *biyectiva*.

c) Para b = 0 hallar sendas *bases* de *N(f)* e *Imf*.

Solución

37.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) Su *polinomio característico* y los *valores propios* asociados.

b) Estudiar la *diagonalización* de M en función de los valores de b.

c) Hallar una *matriz D diagonal semejante* a M para b=0 y la matriz P que permite la diagonalización.

Solución

38.- Sea f una *aplicación lineal* tal que:

f(0,1,1) = (0,*a*,2); f(0,1,0) = (-5,0,-3); f(1-1,0) = (8,-2,6)

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f y el valor de $|A|$.

b) Hallar las *dimensiones* de los *subespacios N(f)* e *Imf*, en función de los valores de a.

Solución

39.-Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Su *polinomio característico*

b) El valor de *a* para que $\lambda = 2$ sea una *valor propio* de M.

c) Estudiar si la matriz M es *diagonalizable* para *a* = 2 y hallar una *matriz D diagonal semejante* a M y la matriz P correspondiente que permite la diagonalización.

d) Escribir la igualdad matricial que relaciona D y M.

Solución

40.- Dada la *transformación lineal* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} -5 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar la *dimensión* y una *base* de los subespacios *N(f)* e *Imf*, respectivamente.

b) Estudiar si f es *diagonalizable* y, en su caso, calcular una *matriz D diagonal semejante* a la matriz A y la matriz P que permite la diagonalización.

Sea g una *transformación lineal* de R^3 tal que $g(\vec{u}) = 6\vec{u}$, $g(\vec{v}) = 3\vec{v}$, $g(\vec{w}) = 6\vec{w}$, para los vectores $\vec{u} = (-1,-1,0)$, $\vec{v} = (-1,\ 1,-1)$ $\vec{w} = (-1,\ 0,\ -1)$.

c) ¿Cómo se denominan los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? ¿Cómo se denominan los escalares 3 y 6?

d) Hallar la *matriz* M asociada a *g* respecto de la *base canónica*.

Solución

41.- Dada la *aplicación lineal* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor de k para el cual f no es *biyectiva*.

b) Para el valor de k obtenido en a) halla las *dimensiones* de los subespacios *N(f)* e *Im(f)*.

c) Justificar por qué f es *diagonalizable* para cualquier valor real de k.

Solución

42.- Sea la aplicación $f: P_2(x) \to P_2(x)$, tal que:

$$f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2).$$

a) Demostrar que f es una *aplicación lineal*. b) Hallar la matriz de la aplicación lineal al tomar $B = \{1,\ x,\ x^2\}$ como *base* de $P_2(x)$. c) Determinar el *núcleo* de esta aplicación. ($P_2(x)$ es el *espacio vectorial* de *polinomios* de grado ≤ 2).

Solución

43.- En caso de existir, encontrar la *diagonalización ortogonal* de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

44.- Encontrar una matriz real y *simétrica* que cumpla siguientes condiciones:

1.- Sus *vectores propios* son $\{(1,0,1),(1,2,-1),(-1,1,1)\}$

2.- Es *semejante* a la siguiente matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

45.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de α es f un *isomorfismo* (*biyectiva*)?
b) Para $\alpha = 0$, una *base* de *Im(f)*
c) Valores de α para los cuales A es *diagonalizable*.
d) Para $\alpha = 0$, una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de la matriz A.
e) Para $\alpha = 0$, hallar A^{25} utilizando, si es posible, la diagonalización de A.

Solución

46.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de α es f un *isomorfismo* (*biyectiva*)?
b) Para $\alpha = 0$, una *base* de *Im(f)*
c) Valores de α para los cuales A es *diagonalizable*.

d) Para $\alpha = 0$, una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de la matriz A.

e) Para $\alpha = 0$, hallar A^{25} utilizando, si es posible, la diagonalización de A.

Solución

47.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del espacio vectorial R^3 y f la *transformación lineal* del mismo tal que $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 \end{cases}$. Se pide:

a) Matriz A asociada a f respecto de la *base* B.

b) Ecuación matricial de f.

c) Obtener el subespacio *Núcleo* de f y dar una base de dicho subespacio.

d) Obtener el subespacio *Imagen* de f y dar una base de dicho subespacio.

e) ¿Son los dos subespacios anteriores *N(f)* e *Im(f) suplementarios*?

f) Hallar los *valores propios* de A y los *subespacios de vectores* propios asociados.

g) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal D semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.

h) Hallar A^n, para cualquier *número natural* n.

Solución

48.- Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar que es *diagonalizable* y determinar una matriz P que permita la *diagonalización*.

b) Hallar las *ecuaciones paramétricas* y *cartesianas* de los *subespacios propios* de A.

c) Hallar A^2 utilizando A y la matriz *diagonal* D.

Solución

49.- Sea V_3 un *espacio vectorial* tridimensional sobre R, y f una *transformación lineal* de V_3 cuya expresión matricial respecto de la *base canónica* es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

¿Es f *diagonalizable*? En caso afirmativo encontrar una *base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, tal que respecto a B la *matriz* que define f sea $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

50.- Dado el *endomorfismo* f de R^3 definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1° Hallar el *polinomio característico* y los *valores propios* de A.

2° Hallar las *ecuaciones paramétricas* de los *subespacios* de *vectores propios* de A.

3° Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios* de *vectores propios* de f.

4° ¿El *endomorfismo* f es *diagonalizable*? ¿Por qué?

En caso afirmativo

5° Hallar una matriz D diagonal *semejante* a la matriz A.

6° Hallar la *base* respecto de la cual la matriz de f es D.

7° Escribir la ecuación de semejanza $D = P^{-1} A P$.

8° Hallar el subespacio de los *vectores invariantes* por f.

9° Hallar los *valores propios* de A^n.

10° Hallar el subespacio de *N(f)*.

11 Hallar el subespacio *Im(f)*.

12° Clasificar el *endomorfismo* f.

Solución

51.- Se considera el *endomorfismo o transformación lineal* f de R^3 definido por la *matriz* $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Hallar:

a) El *polinomio característico*.

b) Los *valores propios* indicando su multiplicidad algebraica.

c) ¿Se puede calcular una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de A?

d) La *matriz* A ¿es *diagonalizable*? ¿por qué?

e) Hallar las *ecuaciones paramétricas* de los *subespacios invariantes* por el *endomorfismo*.

f) Hallar los subespacios *núcleo* e *imagen* de f.

g) ¿Es f *biyectiva*? ¿por qué?

Solución

52.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ calcular:

a) Los *valores propios* indicando su multiplicidad algebraica.
b) Calcular una *base* de cada uno de los *subespacios propios* existentes.
c) ¿Es *diagonalizable* la matriz A? ¿Por qué?
d) ¿Existe algún vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ que sea *invariante*?

Solución

53.- Dado el *endomorfismo* f definido por la *matriz*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular sus *valores propios* y una *base* de cada uno de los *subespacios* de *vectores propios*.

b) Determinar una *base* B de V_3 respecto de la cual la *matriz* asociada a f sea *diagonal*. Respecto de la *base* B ¿cuál es la *matriz diagonal* D?

c) Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio de los *vectores invariantes*.

Solución

54.- Sea f(x, y, z) = (x -2y + z, -x + z, -x - 2y + 3z) una *transformación lineal* de R^3. Sea B = $\{\vec{u}_1 = (1,0,1),\ \vec{u}_2 = (0,1,2),\ \vec{u}_3 = (1,1,1)\}$ un sistema de vectores de R^3. Se pide:

a) Si $F = <\vec{u}_1, \vec{u}_2>$, hallar una *base* del *subespacio ortogonal* $F^\perp$. ¿Qué representan geométricamente F y $F^\perp$?

b) Demostrar que B es *base* de R^3, pero, que f (B) = $\{f(\vec{u}_1),\ f(\vec{u}_2),\ f(\vec{u}_3)\}$ no lo es.

c) Hallar la *matriz* A asociada a f respecto de la *base canónica* y la *matriz* A' asociada a f respecto de la *base* B.

d) Escribir la expresión matricial que relaciona A y A'.

e) ¿Es f *diagonalizable*? En caso afirmativo, dar una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de f.

f) Hallar el *subespacio* de los *vectores invariantes* por f.

g) Hallar la ecuación y una *base* de los *subespacios Im (f)* y *N(f)*.

Solución

55.- Sea f la *transformación lineal* de R^3 que tiene por *matriz* asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$ Se pide:

a) Hallar los *valores propios* de A y una *base* de cada uno de los *subespacios propios* asociados.

b) ¿Es A *diagonalizable*?

c) En caso afirmativo,

hallar una *matriz diagonal* D *semejante* a A

dar una matriz P que permita la diagonalización de A

escribir la relación que existe entre A y D.

d) Dar una base B'= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de R^3 formada por *vectores propios* de A tal que D = M(f, B').

e) Expresar los vectores $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ como *combinación lineal* de los vectores de la base B'.

f) ¿Es f *biyectiva*?

g) Hallar *N (f)*.

h) Hallar el *subespacio de vectores invariantes* por f.

Solución

56.- Dada la *matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ asociada a una *transformación lineal* f respecto de la *base canónica*, se pide:

1.- Estudiar para qué valores de k es f *biyectiva*.

2.- Para k = -9

a) Hallar, si existe, una matriz *diagonal* D *semejante* a A.

b) Hallar una *base* B tal que la *matriz* asociada a f respecto de la *base* B sea D.

c) Escribir la relación matricial entre D y A.

d) Hallar el *Núcleo* y la *Imagen* de f

e) Hallar los vectores *invariantes* por f.

g) La imagen por f de un *plano* vectorial ¿qué *dimensión* tiene?

Solución

57.- Dados el punto A=(3,2,0), los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1)$ y $\vec{u}_3 = (1,0,3)$ y la *transformación lineal* f de $\Re^3$ tal que: N(f) = $\langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$ y f(1,0,3)=(1,0,3). Se pide:

a) Escribir las *ecuaciones cartesianas o implícitas* del *subespacio vectorial* generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{u}_2 = (0,0,1)$.

b) Escribir las ecuaciones del *cambio de la base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a la *base canónica* B_c.

c) Demostrar que $R = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un *sistema de referencia afín* del espacio tridimensional.

d) Si P =(1,1,1), hallar sus *coordenadas* en $R = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

e) Hallar todos los *valores propios* de f.

f) Razonar si f es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal* D que defina f respecto de una *base* de $\Re^3$ y dar dicha *base*.

Solución

58.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar la *dimensión* y una *base* de F.

c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.

d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.

e) ¿Es A *diagonalizable*? En caso afirmativo, hallar una *matriz diagonal semejante* a A.

f) ¿Existen dos *bases* de R^3 tales que A sea la matriz de *cambio de base* de una a la otra?

g) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de $B = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\right\}$ a la *base canónica* $C = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ de R^3. Escribir el vector $\vec{e}_2$ como *combinación lineal* de los vectores de la base B.

Solución

59.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & a & 3 \\ 3 & a+1 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar para qué valores de *a* es *diagonalizable*.

b) Para *a*=1, hallar los *valores y vectores propios* de A

c) Calcular, si existe, una *base de vectores propios, la matriz diagonal semejante* a A y la matriz de paso.

d) Hallar *N(f)*. e *Im(f)*.

Solución

60.- Dado el *endomorfismo* f de R^3 definido por $f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) =$

$$= (-2x_1 + 4x_2 + 2x_3)\vec{e}_1 + (x_1 - 2x_2 + \alpha\, x_3)\vec{e}_2 + (-x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_3$$

siendo $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una *base* de R^3.

a) Hallar la *dimensión* del *subespacio* imagen en función de α.

b) Hallar el *núcleo* y la *imagen* en función de α.

c) ¿Bajo qué condiciones es *diagonalizable* la matriz de f respecto de esa base? En los casos en que sea diagonalizable, indicar la matriz diagonal.

Solución

61.- Sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos *bases* de $\Re^3$ y f un *endomorfismo* que respecto de la base B tiene por ecuación $Y = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} X$. Se pide hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Solución

62.- Dada la *transformación lineal* f de R^2 definida por las imágenes de los vectores de la *base canónica*: $f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

a) Calcular los *valores propios* de f.

b) Calcular los *vectores propios* de f.

c) ¿Es f *diagonalizable*?

Solución

63.- Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ clasificar las siguientes aplicaciones.

a) f(a)=1, f(b)=3, f(c)=5, f(d)=2, f(e)=4

b) f(a)=1, f(b)=1, f(c)=3, f(d)=3, f(e)=4

c) f(a)=1, f(c)=3, f(d)=2, f(e)=5

d) f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3, f(c)=5, f(d)=2, f(e)=5

e) f(a)=1, f(b)=3, f(c)=5, f(d)=1 y f(e)=3

f) f(a)=1, f(b)=2, f(c)=5, f(d)=2, f(e)=4

g) $f : R \to R$, $y = 2x$.

h) $f : R^+ \to R^+$, $y^2 = x$.

i) La aplicación que asocia a todo individuo mayor de 16 años un DNI, ¿es una *aplicación*? ¿es *inyectiva*?

j) La aplicación que asocia a cada ciudadano español, la comunidad autónoma de nacimiento ¿es *aplicación*? ¿es *inyectiva*? ¿es *sobreyectiva*?

Solución

64.- Sean $f:R^3 \to R^2$ y $g:R^2 \to R^3$ las aplicaciones lineales que tienen por ecuaciones:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ x_1 + 4x_3)$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ 2x_1,\ 3x_1 + 4x_2)$$

Hallar las ecuaciones matriciales de $g \cdot f$ y $f \cdot g$ respecto de las correspondientes bases canónicas. ¿Son *diagonalizables* los *endomorfismos* resultantes?

Solución

Aplicación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y sea la aplicación

$$f : V \to W$$
$$\vec{v} \to f(\vec{v}) = \vec{w}$$

La aplicación f es **lineal** si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) $\forall \lambda \in K,\ \forall \vec{v} \in V,\ f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

o bien en una única condición: $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

A las aplicaciones lineales se les dice también **homomorfismos**

Endomorfismo o **transformación lineal**

Endomorfismo o **transformación lineal** es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

Matriz.

Una **matriz** es un conjunto de elementos de un cuerpo K ordenados en filas y columnas.

Si la matriz tiene m filas y n columnas, se escribe así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Subespacio vectorial

Sea (V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial.

Sea F una parte no vacía del K-espacio vectorial V. F es un **subespacio vectorial** de V con las operaciones + y · inducidas por V si y sólo si se verifica:

$$\forall\lambda,\mu \in \mathbf{K},\ \forall\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{F} \Rightarrow \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{F}$$

Núcleo de la aplicación lineal f

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, **Núcleo** de la aplicación lineal f es:

$N(f) = Ker(f) = \left\{ \vec{v} \in V / f\left(\vec{v}\right) = 0 \right\} = f^{-1}\left(\left\{ \vec{0} \right\} \right) \subset V$.

Imagen de la aplicación lineal f

Sea $f: V \to W$ una aplicación lineal, **Imagen** de la aplicación lineal f es:

$$\mathrm{Im}(f) = f(V) = \left\{ \vec{w} \in W \,/\, \exists \vec{v} \in V, f(\vec{v}) = \vec{w} \right\} \subset W .$$

Aplicación biyectiva

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **biyectiva** si todo elemento de B es imagen de un solo elemento de A o también si es a la vez inyectiva y sobreyectiva

Una aplicación lineal **biyectiva** o **isomorfismo** es una aplicación tal que su inversa es también una aplicación.

Base

Lado o cara horizontal a partir del cual se mide la altura de una figura plana o de un sólido.

Base de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Dimensión

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se dice que la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tiene **dimensión** $m\times n$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Ecuaciones cuyas incógnitas son coordenadas. Relativo a las ecuaciones de un subespacio vectorial las ecuaciones cartesianas forman el sistema homogéneo que define dicho subespacio.

Aplicación inyectiva

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **inyectiva** si cada elemento de B, que es imagen de uno de A, lo es de uno sólo, es decir, $\forall a, b \in A, \text{si } f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

f: V→W es una aplicación lineal **inyectiva** o **monomorfismo** $\Leftrightarrow \text{Núcleo}(f) = \{\vec{0}\}$.

Base canónica

Base canónica, $B_{c,}$ es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0),..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Linealmente independientes

Sean $f_1, f_2,\ldots,f_k$ filas de una matriz cualquiera A. Las filas $f_1, f_2,\ldots,f_k$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0)=\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=0,\ \forall i$.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1,\ldots,\vec{\mathbf{a}}_n\in\mathbf{V}$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{\mathbf{0}}=\lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1+\ldots+\lambda_n\vec{\mathbf{a}}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=\mathbf{0},\ \forall\mathbf{i}$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** si lo son los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Valor propio

Sea $f: V \to V$ una transformación lineal y una matriz $A \in M_n(K)$ asociada a f respecto de una base B del espacio vectorial V.

Un **valor propio** o **autovalor** de f es $\lambda \in K$ tal que $f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Vector propio

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal y una matriz $A \in M_n(K)$ asociada a f respecto de una base B del espacio vectorial V.

Un vector $\vec{v} \in V$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un **vector propio** o **autovector** de f si existe un valor $\lambda \in K$ tal que $f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Diagonalizable

Una matriz $A \in M_n(K)$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella.
Una transformación lineal de V es **diagonalizable** si su matriz asociada es diagonalizable.

Matriz diagonal

Sea $A \in M_n(K)$. **Matriz diagonal** es aquella que tiene nulos todos sus elementos, salvo, a lo sumo, los de la diagonal principal.

Matrices semejantes.

Dos matrices $A, A' \in M_n(K)$ son **semejantes** si y sólo si existe una matriz $P \in M_n(K)$ invertible tal que $A' = P^{-1} A P$.

Observación: Todas las matrices asociadas a la misma aplicación lineal f respecto de cualquier base de V son semejantes entre sí.

Vector

- Elemento de un espacio vectorial, se identifica por sus coordenadas respecto de una base del espacio vectorial.
- Segmento orientado, se caracteriza por su dirección, sentido y módulo.

Vector Invariante

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal.
Un vector $\vec{v} \in V$ es un **vector invariante** por f si $f(\vec{v}) = \vec{v}$.

Matriz simétrica

Una **matriz** cuadrada es **simétrica** cuando $A^t = A$, es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, siendo i,j=1, 2, ..., n.

Ortogonales

Se dice que los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

Sea V un espacio vectorial euclídeo y F y G dos subconjuntos de V, se dice que F y G son **ortogonales** (escribimos $F\perp G$) si y solo si todo vector de F es ortogonal a cualquier vector de G.
Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

Linealmente dependientes

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ filas de una matriz cualquiera A. Las filas $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son **linealmente dependientes**, cuando existan los elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ no todos nulos, tales $(0) = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente dependientes,** cuando existan los elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ no todos nulos, tales que $\vec{\mathbf{0}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{\mathbf{a}}_n$. También se dice que constituyen un sistema ***ligado***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente dependientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Espacio Vectorial

Sea V un conjunto donde hemos definido una ley u operación interna, que designaremos por "+" $V \xrightarrow{+} V$. Sea **K** un cuerpo (conmutativo) y sea, por último, una operación externa que designaremos por "·" $\mathbf{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V$.
Diremos que (V,+, ·) tiene estructura de ***espacio vectorial*** sobre el cuerpo **K**, o simplemente que (V,+, ·) es un **K**-espacio vectorial cuando se verifiquen las condiciones siguientes:

[A1] **Asociativa**: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento que designaremos $\vec{0} \in V$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a} \in V$ existe un único elemento de V, que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

*Observemos que (V,+) debe ser, por tanto, un **grupo conmutativo**.*

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in K$ y cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A7] $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Subespacios suplementarios

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Rango de un sistema de vectores

Rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Rango de una aplicación lineal

Rango de la aplicación lineal f es la dimensión del subespacio Imagen de f.

Rango de una matriz

Rango de la matriz A es el orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

En Estadística

Rango o recorrido de una variable estadística

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

Epimorfismo

Epimorfismo es una aplicación lineal sobreyectiva si y sólo si el subespacio imagen coincide con el espacio vectorial final, es decir, si f: V→W es tal que Im(f)=W.

Monomorfismo

Monomorfismo es una aplicación lineal inyectiva $\Leftrightarrow \text{Núcleo}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Isomorfismo

Isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva.

Automorfismo

Automorfismo es un endomorfismo que además es isomorfismo.

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

En el **plano**: siendo $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector director.

Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$

En el **espacio**: Siendo $P=(p_1,p_2,p_3)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un vector director de la recta.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}$.

Vector unitario

Vector cuyo módulo es la unidad.

Polinomio característico

Polinomio característico de A es el siguiente polinomio en la variable λ:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

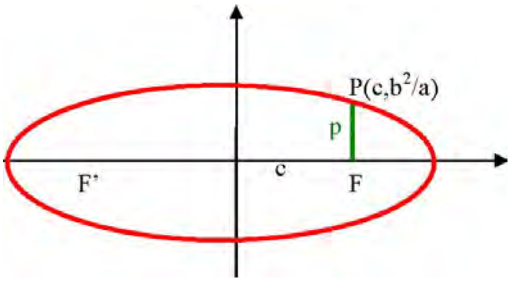
Cambio de base en una transformación lineal

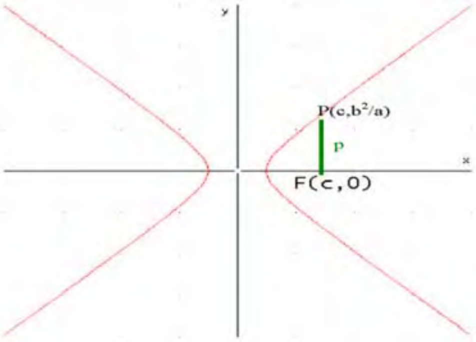
Sea $f: V \rightarrow V$ una transformación lineal y sean B=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y B'=$\{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ dos bases de V tales que P representa la matriz del cambio de base de B' a B. Si Y=AX es la ecuación matricial de la transformación lineal f con A=M(f,B) entonces la matriz que define f respecto B' es: A'=M(f,B')=P^{-1}AP resultando Y'=A'X'.

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Transformación ortogonal

Las aplicaciones $f: V \longrightarrow V$ biyectivas, lineales y que conservan el producto escalar son **transformaciones ortogonales**. La ecuación es de la forma X'=MX, donde es la matriz asociada a f y tiene por columnas las coordenadas de los transformados de los vectores de la base en cuyo caso M es una matriz ortogonal.

Base ortonormal o métrica

La base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\|=1,\ i=1,2,...,n$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Hiperplano

Un subespacio vectorial H del espacio vectorial V es un ***hiperplano*** si y solo si dim(H)=dim(V)-1.

Combinación lineal

Sean $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos **combinación lineal** *d*e los vectores $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$.

Aplicación suprayectiva o sobreyectiva o exhaustiva

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **sobreyectiva** si todo elemento de B es imagen de, al menos, uno de A, es decir, $\forall y \in B,\ \exists x \in A$ tal que $f(x)=y$.

f: V→W es una aplicación lineal **sobreyectiva** o **epimorfismo** si y sólo si el subespacio imagen coincide con el espacio vectorial final, es decir, si Im(f)=W.

Suma directa

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos **suma directa de E_1 y E_2** a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Polinomio

Suma de un número finito de términos de la forma $a_{1i_1....ni_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_n^{i_n}$ donde $a_{1i_1....ni_n}$ son los coeficientes y $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables o indeterminadas y los exponentes $i_1, i_2, ..., i_n$ números enteros no negativos cuya suma es el grado de cada sumando y el mayor de los grados el grado del polinomio.

Número natural

Cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto. El conjunto de todos ellos se designa por N: N = {1, 2, 3, 4,…, 10, 11, 12,…}

Subespacio ortogonal

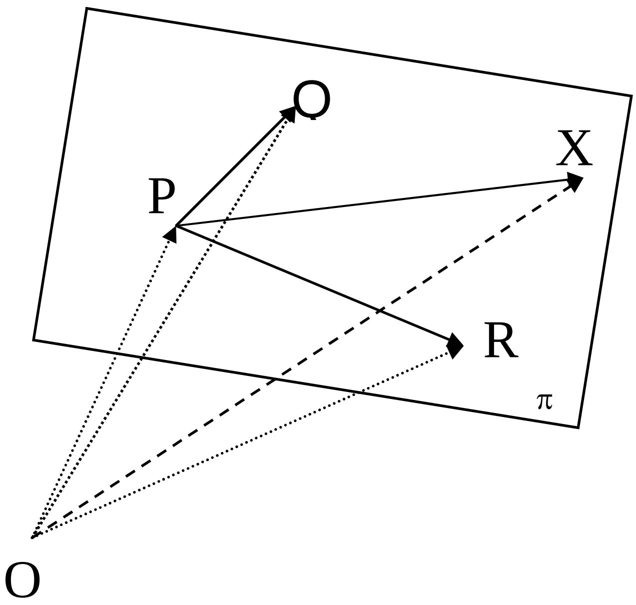
Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

El Plano en el Espacio

Sea el sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ Un plano queda determinado por tres puntos P, Q y R no alineados, cualquier punto coplanario con ellos verifica $X = P + t\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{PR}$.

De la ecuación vectorial, para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(r_3 - p_3) \end{cases}$$

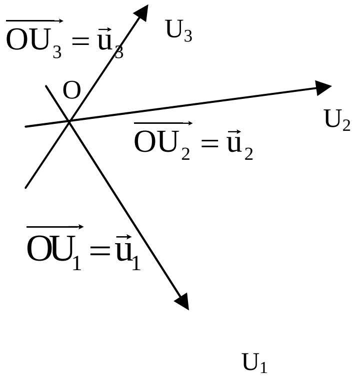


Si consideramos un punto P y dos vectores linealmente independientes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el plano queda determinado de forma vectorial por $X = P + t\vec{v} + s\vec{w}$ y por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$ de donde eliminando los parámetros t y s queda: $\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$, la ecuación general, cartesiana o implícita del plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$

Sistema de referencia

Sea $\boldsymbol{A}^3$ un espacio afín y $\Re = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos, se dice que R constituye un **sistema de referencia** del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ cuando los vectores $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3}$ forman una base de V^3(*R*). O es el **origen** del sistema de referencia.

Si $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OU_3} = \vec{u}_3$ entonces se tiene $\Re = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia.



Coordenadas cartesianas rectangulares

Si $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.