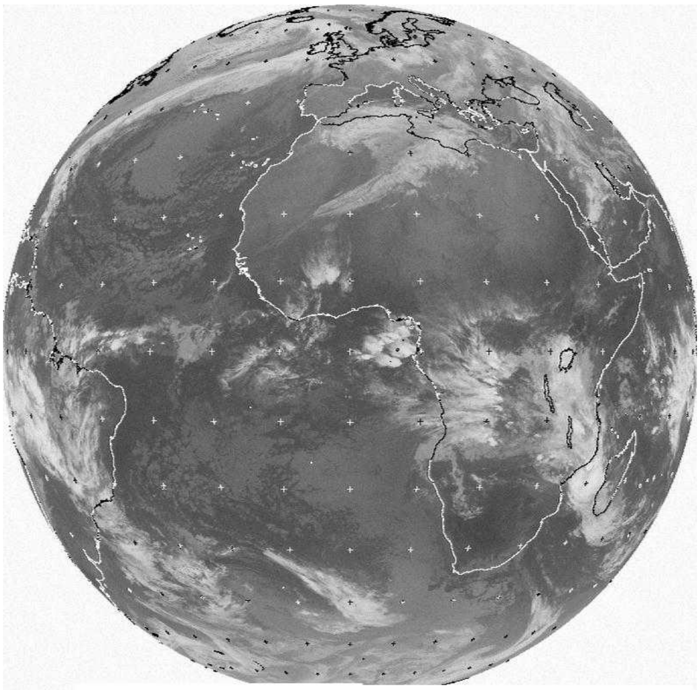
E. T. S. DE INGENIERÍA en TOPOGRAFÍA, GEODESIA Y CARTOGRAFÍA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA FUNDAMENTOS

UNIDAD DOCENTE DE MATEMÁTICAS

Madrid, Septiembre de 2008

Manuel Barrero Ripoll

Mª Luisa Casado Fuente

Mª Ángeles Castejon Solanas

Luis Sebastián Lorente

Impreso en E.T.S.I. en Topografía, Geodesia y Cartografía.

Madrid, 2008

I.S.B.N.: 84-96244-13-x

CONTENIDO

CAPÍTULO PRIMERO: GEOMETRÍA SOBRE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

CAPÍTULO SEGUNDO: RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO

CAPÍTULO TERCERO: TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS Y RECTILÁTEROS

CAPÍTULO CUARTO: PROBLEMAS

CAPÍTULO PRIMERO:

Geometría sobre la superficie esférica

1.1 Diedros y Triedros

Se llama **diedro**, a la región del espacio comprendido entre dos semiplanos a y b limitados por una recta común AB (fig. 1.1-a).

Los semiplanos a y b que lo forman se llaman **caras** del diedro, y la recta común AB **arista**.

Se llama **ángulo** correspondiente a un diedro, al ángulo formado por dos perpendiculares a la arista en un mismo punto y una en cada cara. Así, si EF y HE son perpendiculares a la arista AB, el ángulo FEH es el ángulo del diedro.

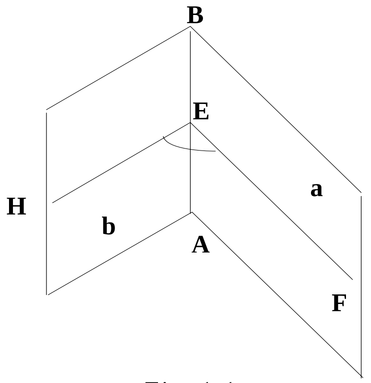


Fig. 1.1- a

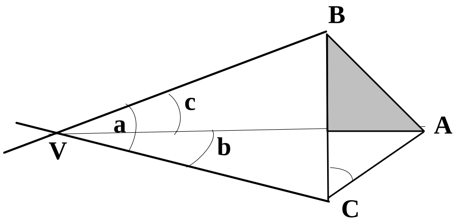


Fig.1.1-b

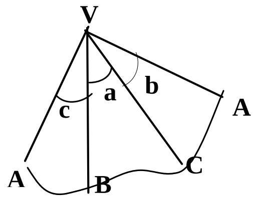


Fig.1.1-c

Tres semirrectas en el espacio no situadas en el mismo plano, y con origen común en un punto V, constituyen un **triedro** (fig. 1.1-b).

El punto V y las semirrectas se llaman, respectivamente, **vértice** y **aristas** del triedro.

Los ángulos que determinan cada dos aristas consecutivas se llaman **lados** o **caras** del triedro, su medida es siempre menor que 180°, y se designan con las letras a, b y c.

Cada semirrecta determina dos semiplanos que contienen respectivamente a las otras dos. Los **diedros** así definidos se llaman *ángulos del triedro*, su medida es siempre menor que 180°, y se designan mediante las letras A, B y C. (Se designa por A el diedro cuya arista contiene a la semirrecta que no está en el plano de la cara a, y análogo para B y C).

Los lados a, b y c se llaman, respectivamente, *opuestos* a los ángulos A, B y C, y recíprocamente.

Cortando el triedro VABC de la figura 1.1-b por la arista VA se puede colocar las tres caras sobre un plano, como se expresa en la figura 1.1-c. Así se obtiene el llamado desarrollo del triedro, que se compone de tres ángulos consecutivos.

Triedros simétricos son los formados por semirrectas opuestas. Por consiguiente, sus caras son ángulos opuestos por el vértice, y sus diedros son opuestos por la arista. Por lo tanto, en dos triedros simétricos los elementos homólogos son iguales, pero el orden de sucesión de estos elementos es inverso, por lo que, en general, dos triedros simétricos no son superponibles.

1.2 Propiedades

Los lados y los ángulos de un triedro cumplen las propiedades siguientes:

1. *En todo triedro, una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.*

$$|b - c| < a < b + c$$

2. *En todo triedro, a mayor ángulo diedro se opone mayor cara, y recíprocamente.*

$$A > B \Leftrightarrow a > b$$

3. *La suma de las caras de un triedro es menor que cuatro ángulos rectos.*

$$a + b + c < 360^{\circ}$$

4. *La suma de los tres ángulos diedros de un triedro está comprendida entre dos y seis ángulos rectos.*

$$180^{\circ} < A + B + C < 540^{\circ}$$

Definiciones

Una **Circunferencia máxima**, *o ciclo*, sobre una esfera, es el perímetro de la sección producida por la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera; por tanto, su radio será el de la esfera.

Una **Circunferencia menor** es el perímetro de la sección producida por la intersección de la esfera con un plano que no pase por su centro.

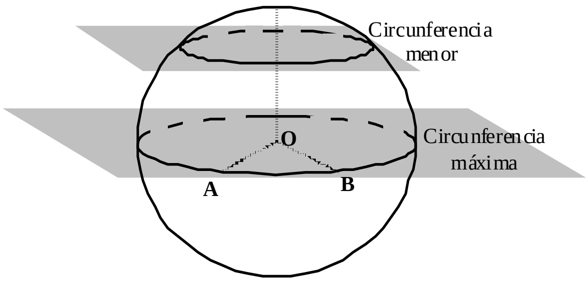


Fig. 1.2.a

Puesto que por tres puntos no alineados pasa un plano y sólo uno; dados dos puntos A y B de la esfera, no diametralmente opuestos, siempre existe un plano y sólo uno, cuya intersección con la esfera define el ciclo AB.

La **distancia esférica** entre dos puntos A y B de una superficie esférica es la longitud del menor arco de ciclo comprendido entre los dos puntos A y B.

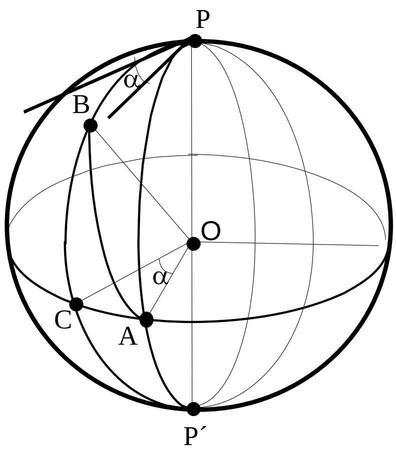


Fig. 1.2-b

La medida de la distancia AB es la del ángulo plano AOB.

Dos ciclos siempre se cortan en dos puntos P y P´ diametralmente opuestos.

Se llama **ángulo esférico** α entre dos ciclos al ángulo formado por las dos tangentes a las semicircunferencias en uno de sus puntos de contacto. Puesto que dichas tangentes son perpendiculares al diámetro PP’, el ángulo esférico α es el correspondiente al diedro formado por los planos de los dos ciclos y su medida es la misma que la del arco AC.

Se llaman **polos de un ciclo** a los extremos del diámetro perpendicular a su plano, trazado por el centro de la esfera. Así, en la figura 1.2-b, P y P´ son los polos del ciclo AC. Todo ciclo posee dos polos. Dos **ciclos** son **perpendiculares** si el ángulo esférico formado por ambos es recto.

La condición necesaria y suficiente para que dos ciclos sean perpendiculares es que uno de ellos pase por los polos del otro, en cuyo caso éste pasa por los polos de aquél.

1.3 Triángulos esféricos

Un **triángulo esférico** es la región de superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos. Los arcos son los lados del triángulo esférico, y los vértices de los tres ángulos esféricos son los vértices del triángulo esférico. (fig. 1.3).

Cuando se unen los vértices de un triángulo esférico con el centro de la esfera, se obtiene un triedro. Podemos, entonces, dar otra definición de triángulo esférico: Es la intersección de la esfera con las tres caras del triedro.

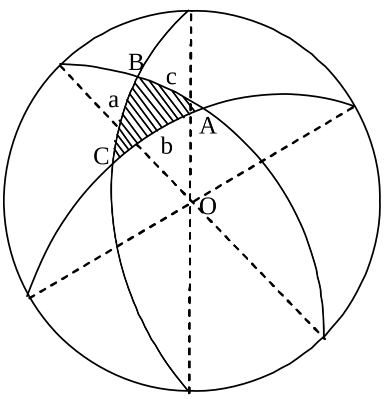


Fig. 1.3

Los tres arcos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ del triángulo ABC llamados lados del triángulo se designan por c, a, y b, respectivamente; su medida, es por tanto la de los ángulos de las caras del triedro.

Los tres puntos A, B, y C de intersección de las aristas del triedro con la esfera son los vértices o ángulos del triángulo esférico y su medida es la misma que la de los diedros del triedro, OA, OB, y OC.

Según esto, a cada propiedad de los ángulos triedros corresponde una propiedad análoga de los triángulos esféricos, y recíprocamente. Es evidente que los ángulos de las caras y los ángulos diedros de un ángulo triedro no se alteran en magnitud variando el radio de la esfera; por tanto, las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico son independientes de la longitud del radio.

Los lados de un triángulo esférico, siendo arcos, son expresados normalmente en unidades angulares, grados o radianes. Si se desea conocer la dimensión lineal de un lado, será necesario saber el radio de la esfera correspondiente al triángulo. En la práctica la longitud de un lado (arco) puede hallarse en función de cualquier unidad lineal, por medio de la siguiente analogía:

$$\frac{\text{Longitud del ciclo}}{\text{Longitud del arco}} = \frac{360^\circ}{\text{grados del arco}} = \frac{2\pi r}{\ell}$$

1.4 Propiedades de los triángulos esféricos

1ª *Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia* $a < 180^\circ$.

2ª *Cada lado del triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que el módulo de su diferencia.*

$$|a - b| < c < a + b\,.$$

3ª *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.*

$$a + b + c < 360^\circ\,.$$

(Estas propiedades se derivan de las correspondientes propiedades referentes a los ángulos de las caras de un ángulo triedro.)

La expresión $360^\circ - (a + b + c)$ se llama **defecto esférico**

4ª *En un triángulo, esférico a mayor lado se opone mayor ángulo. Y recíprocamente.*

$$a > b \Leftrightarrow A > B$$

5ª *En un triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales. Y recíprocamente.*

$$a = b \Leftrightarrow A = B$$

6ª *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis rectos.*

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

Una demostración de esta propiedad se realiza en el problema (1) ya que requiere el uso del triángulo polar que estudiamos más adelante.

La expresión $A + B + C - 180^\circ$ se llama **exceso esférico** y la representamos por ε.

1.5 Clasificación de los triángulos esféricos

Teniendo en cuenta las propiedades de los triángulos esféricos, estos pueden tener más de un lado y un ángulo recto. Según esto, se clasifican en:

Un **triángulo esférico** se llama **isósceles** si tiene dos lados iguales.

Un **triángulo esférico** se llama **equilátero** si tiene los tres lados iguales.

Un **triángulo esférico** se llama **rectángulo** si tiene un ángulo recto.

Un **triángulo esférico** se llama **rectilátero** si tiene un lado recto.

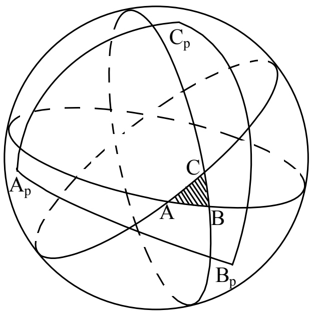
Un **triángulo esférico** se llama **birrectángulo** si tiene dos ángulos rectos.

Un **triángulo esférico** se llama **birrectilátero** si tiene dos lados rectos.

1.6 Triángulos esféricos polares

Dado un triángulo ABC de lados a, b, c se denomina **triángulo polar** a aquel cuyos lados a_p, b_p, c_p son suplementarios de los vértices A, B, C del triángulo dado, y los vértices Ap, Bp, y Cp son suplementarios de los lados a, b, c; es decir:

$$A_p = 180^\circ - a \;;\; B_p = 180^\circ - b \;;\; C_p = 180^\circ - c$$
$$a_p = 180^\circ - A \;;\; b_p = 180^\circ - B \;;\; c_p = 180^\circ - C$$



Para representar el triángulo polar $A_pB_pC_p$ del triángulo ABC, hallamos el polo C_p del lado c más próximo al vértice C. Del mismo modo determinamos el polo B_p del lado b y el polo A_p del lado a.

1.7 Triángulos esféricos adyacentes y simétricos

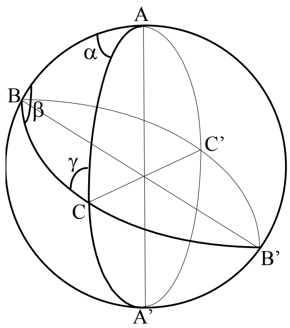
Ya que un triedro tiene tres caras, los planos de las mismas dividen a la superficie esférica en ocho triángulos esféricos, cuya denominación es la siguiente:

Dos triángulos esféricos son **adyacentes** si tienen un lado común.

En la figura el triángulo A´BC es adyacente al triángulo ABC; el lado BC es común a ambos.

Dos triángulos esféricos se llaman **simétricos** si los vértices de uno de ellos son diametralmente opuestos a los vértices del otro.

En la figura los triángulos ABC y A´B´C´ son simétricos.



Es claro que, dos triángulos simétricos tienen todos sus elementos iguales, pero situados en orden inverso, por tanto no son en general superponibles, a pesar de tener la misma área.

1.8 Superficie de un triángulo esférico

Se observa en la figura anterior que los triángulos ABC, BCA', ACB', y CA'B' constituyen la mitad de la superficie esférica, por tanto, si S, S', S'' y S''' son respectivamente las superficies de los triángulos anteriores, $S + S' + S'' + S''' = 2r^2\pi$, sumando 2S en la igualdad anterior se tiene:

$$(S + S') + (S + S'') + (S + S''') = 2r^2\pi + 2S$$

cada uno de los paréntesis del primer sumando de la ecuación anterior es la superficie de un huso esférico, así:

S+S' es la superficie del huso de ángulo α cuya área es $\frac{r^2\pi}{90^\circ}\alpha$.

De la misma manera

S+S'' es la superficie del huso de ángulo β con área $\frac{r^2\pi}{90^\circ}\beta$

S+S''' la del huso de ángulo γ con área $\frac{r^2\pi}{90^o}\gamma$,

por tanto,

$$\frac{r^2\pi}{90^\circ}\alpha + \frac{r^2\pi}{90^\circ}\beta + \frac{r^2\pi}{90^\circ}\gamma = 2r^2\pi + 2S$$

y despejando S

$$S = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)$$

Si los ángulos se expresan en radianes y debido a que $\frac{\pi}{180^\circ} = 1$ radián, $S = r^2\varepsilon'$, siendo ε' el exceso esférico.

1.9 Superficie de un polígono esférico

Se llama **polígono esférico** a la porción de superficie esférica limitada por una poligonal cerrada, cuyos lados son arcos de circunferencia máxima.

El área de un polígono esférico situado sobre una esfera de radio r, con n lados y de vértices A_1, A_2, ...A_n , viene dada por:

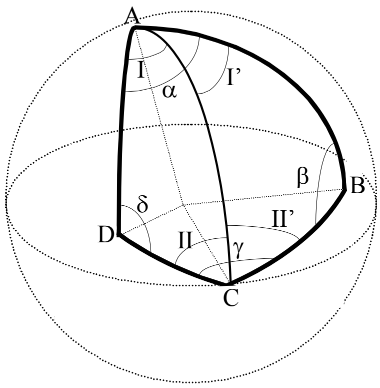
$$S = \frac{r^2 \pi}{180^\circ}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)180^\circ\right)$$

ó bien, expresando los ángulos en radianes,

$$S = r^2\left(A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_n - (n-2)\pi\right).$$

En efecto:

Sea el cuadrilátero esférico ABCD cuya área queremos determinar. Tracemos el arco de ciclo



AC que lo divide en dos triángulos esféricos.
El área pedida vale:

$$S = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(I + \delta + II - 180^\circ) + \frac{r^2\pi}{180^\circ}(I' + \beta + II' - 180^\circ) = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2 \cdot 180^\circ)$$

Si el polígono tiene n lados, se puede descomponer en n-2 triángulos esféricos siendo por tanto el área del polígono:

$$S = \frac{r^2\pi}{180^\circ}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)\cdot 180^\circ\right)$$

Si los ángulos se expresan en radianes, se tiene

$$S = r^2\left(A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_n - (n-2)\pi\right)$$

Problema 1.

La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180º y menor que 540º.

Sea ABC un triángulo esférico y sea $A_pB_pC_p$ su triángulo polar.

$$A + a_p = B + b_p = C + c_p = 180^o$$

de donde,

$$A + B + C + a_p + b_p + c_p = 540^o$$

Ahora bien,

$$a_p + b_p + c_p > 0^o \ \Rightarrow A + B + C < 540^o$$

y

$$a_p + b_p + c_p < 360^o \ \Rightarrow A + B + C > 180^o$$

Problema 2.

Hallar el área de un cuadrilátero, sobre una esfera de 1.2 metros de radio, sabiendo que todos sus ángulos son 100°.

$$S = \frac{r^2\pi}{180^\circ}\left(400^\circ - 2\cdot 180^\circ\right) = 1.00531\,m^2$$

$\boxed{1.10}$ Ejercicios propuestos.

1.- ¿Cuál es, sobre una esfera cuya superficie es 4 cm^2, la superficie del triángulo esférico cuyos ángulos miden 60°, 108° y 125°?

Solución. $S_t = 0.6277\ cm^2$

2.- Hallar el área del triángulo esférico y el volumen de la pirámide esférica que determina en una esfera de 6 cm de radio, un triedro equilátero cuyos diedros miden 100° y cuyo vértice es el centro de dicha esfera.

Solución. $S = 75.3982\ cm^2$; $V = 150.796447\ cm^3$

3.- Hallar el área del pentágono esférico cuyos ángulos miden:
87°16´; 108°34´; 126°23´; 150°; 156°48´ en una esfera de radio 16 dm.

Solución. $S = 397.7302\ dm^2$

CAPÍTULO SEGUNDO:

Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico

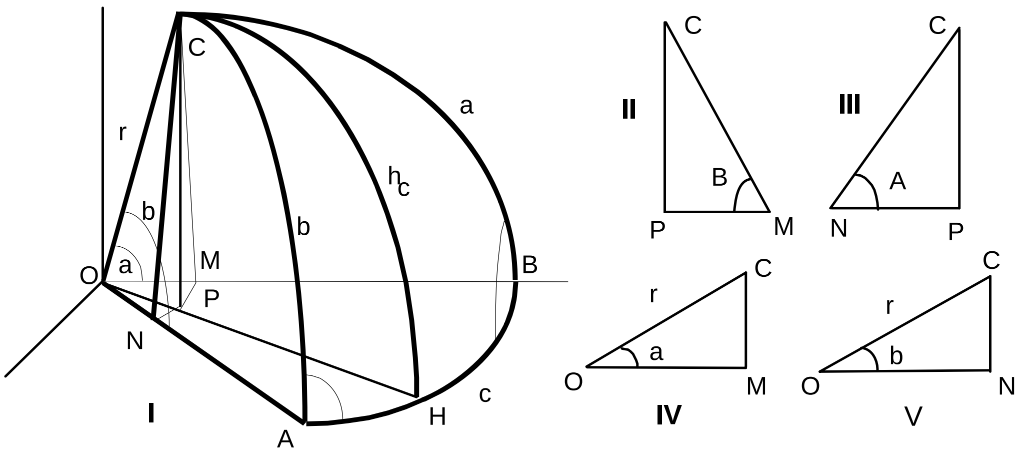
2.1 **Teorema del seno (**Primer grupo de fórmulas de Bessel)

> En un triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Sea el triángulo esférico ABC definido sobre una esfera de radio r. El arco de ciclo perpendicular al arco AB y que pasa por C se llama **altura esférica** CH **del triángulo** y se designa por h_c.

Proyectamos el vértice C sobre el plano OAB en P, y P sobre la recta OA en N. Se obtiene así el triángulo III de la figura, este triángulo está en un plano perpendicular a OA, por contener dos perpendiculares a la recta OA, por tanto la recta CN también es perpendicular a OA.

De manera análoga en el triángulo II la recta CM es perpendicular a la recta OB. Obtenemos así dos nuevos triángulos rectángulos el IV y V.



Por tanto, de los triángulos II y III se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}B = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CM}} \Rightarrow \overline{CP} = \overline{CM}\operatorname{sen}B \\ \operatorname{sen}A = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CN}} \Rightarrow \overline{CP} = \overline{CN}\operatorname{sen}A \end{array}\right\}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$\overline{CM} \cdot senB = \overline{CN} \cdot senA \qquad (*)$$

De los triángulos IV y V se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} sena = \dfrac{\overline{CM}}{r} \Rightarrow \overline{CM} = r \cdot sena \\ senb = \dfrac{\overline{CN}}{r} \Rightarrow \overline{CN} = r \cdot senb \end{array}\right\}$$

sustituyendo $\overline{CM}$ y $\overline{CN}$ en la ecuación (*), se sigue

$$r \cdot sena \cdot senB = r \cdot senb \cdot senA$$

simplificando por $r \neq 0$,

$$\frac{sena}{senA} = \frac{senb}{senB}$$

Trazando la altura esférica h_a sobre el lado a, se probaría la relación $\frac{senb}{senB} = \frac{senc}{senC}$, y por tanto:

$$\boxed{\frac{sen\, a}{sen\, A} = \frac{sen\, b}{sen\, B} = \frac{sen\, c}{sen\, C}}$$

Esta relación permite calcular un lado o un ángulo, conocido su ángulo o lado opuesto, y otro par de elementos opuestos. La dificultad estriba en calcular el tercer ángulo pues aquí no hay relación constante entre los ángulos de un triángulo. Hay que buscar una nueva fórmula que ligue elementos no opuestos.

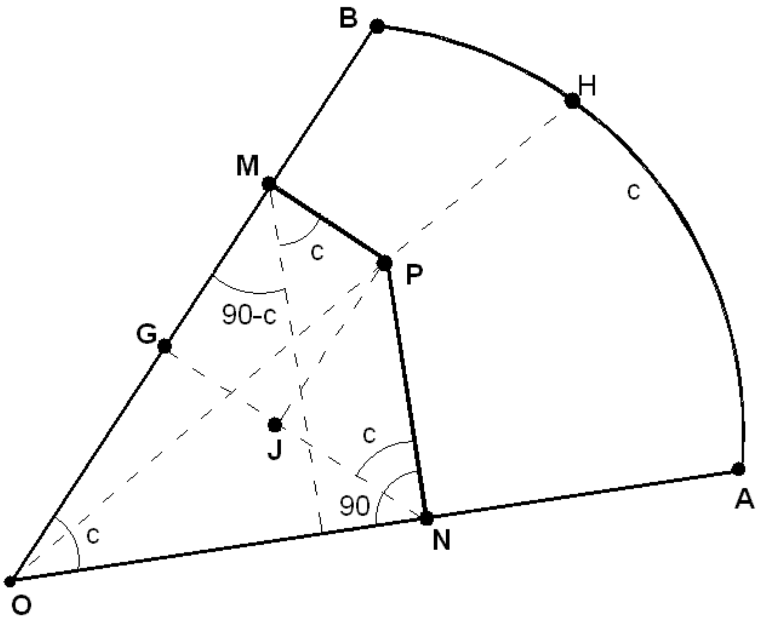
2.2 **Teorema del coseno** (Segundo *grupo de fórmulas de Bessel)*

En todo triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido.

De los triángulos IV y V de la figura anterior

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{OM} = r\cos a \qquad \overline{ON} = r\cos b \\ \overline{CM} = r\,\mathrm{sen}\,a \qquad \overline{CN} = r\,\mathrm{sen}\,b \\ \left.\begin{array}{l} \overline{PM} = \overline{CM}\cos B \\ \overline{PN} = \overline{CN}\cos A \end{array}\right\} \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{PM} = r\,\mathrm{sen}\,a\cos B \\ \overline{PN} = r\,\mathrm{sen}\,b\cos A \end{array}\right.$$

Si expresamos que la proyección de la resultante OC de la poligonal ONPM, sobre OB, es igual a la suma de las proyecciones de las componentes ON, NP, y PM, sobre la misma recta.



$$\mathrm{Proy}_{OB}(\overline{OC}) = \overline{OM} = r\cos a$$

$$\mathrm{Proy}_{OB}(\overline{ON}) = \overline{OG} = \overline{ON}\cos c = r\cos b\cos c$$

$$\mathrm{Proy}_{OB}(\overline{NP}) = \overline{GM} = \overline{JP} = \overline{NP}\cos(90^{o}\text{-}c) = \overline{NP}\,\mathrm{sen}\,c = r\,\mathrm{sen}\,b\cos A\,\mathrm{sen}\,c$$

$$\mathrm{Proy}_{OB}(\overline{PM}) = 0$$

Por tanto:

$$r\cos a = r\cos b\cos c + r\,\mathrm{sen}b\,\mathrm{sen}c\cos A$$

y simplificando por $r \neq 0$, obtenemos

$$\cos a = \cos b\cos c + \mathrm{sen}b\,\mathrm{sen}c\cos A$$

Análogamente para los cosenos de los lados b y c.

Por tanto el segundo grupo de fórmulas de Bessel, que permiten calcular los ángulos conocidos los tres lados, o bien, un lado conocidos los otros dos y el ángulo comprendido, es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos a = \cos b\cdot\cos c + \mathrm{sen}b\cdot\mathrm{sen}c\cdot\cos A \\ \cos b = \cos a\cdot\cos c + \mathrm{sen}a\cdot\mathrm{sen}c\cdot\cos B \\ \cos c = \cos a\cdot\cos b + \mathrm{sen}a\cdot\mathrm{sen}b\cdot\cos C \end{array}}$$

2.3 Teorema de la cotangente. (*Tercer grupo de fórmulas de Bessel*)

Por el teorema del coseno y del seno se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos a = \cos b\cos c + \mathrm{sen}b\,\mathrm{sen}c\cos A \\ \left.\begin{array}{l} \cos c = \cos a\cos b + \mathrm{sen}a\,\mathrm{sen}b\cos C \\ \mathrm{sen}c = \dfrac{\mathrm{sen}a}{\mathrm{sen}A}\mathrm{sen}C \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

sustituyendo cosc y senc en la primera fórmula obtenemos

$$\cos a = \cos b(\cos a\cos b + \mathrm{sen}a\,\mathrm{sen}b\cos C) + \mathrm{sen}b\,\mathrm{sen}a\,\mathrm{sen}C\cot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos a - \cos a\cos^2 b = \mathrm{sen}a\,\mathrm{sen}b\cos b\cos C + \mathrm{sen}a\,\mathrm{sen}b\,\mathrm{sen}C\cot A$$

pero

$$\cos a(1-\cos^2 b) = \cos a\,\mathrm{sen}^2 b$$

por tanto,

$$\cos a\ \mathrm{sen}^2 b = \mathrm{sen}a\ \mathrm{sen}b \cos b \cos C + \mathrm{sen}a\ \mathrm{sen}b\ \mathrm{sen}C \cot A$$

y dividiendo en ambos miembros por sena senb, se tiene:

$$\cot a\ \mathrm{sen}b = \cos b \cos C + \mathrm{sen}C \cot A$$

De forma análoga y por permutación,

$$\boxed{\begin{array}{l} \cot a\ \mathrm{sen}b = \cos b \cos C + \mathrm{sen}C \cot A \\ \cot a\ \mathrm{sen}c = \cos c \cos B + \mathrm{sen}B \cot A \\ \cot b\ \mathrm{sen}a = \cos a \cos C + \mathrm{sen}C \cot B \\ \cot b\ \mathrm{sen}c = \cos c \cos A + \mathrm{sen}A \cot B \\ \cot c\ \mathrm{sen}a = \cos a \cos B + \mathrm{sen}B \cot C \\ \cot c\ \mathrm{sen}b = \cos b \cos A + \mathrm{sen}A \cot C \end{array}}$$

2.4 Teorema del coseno para los ángulos (*Cuarto grupo de fórmulas de Bessel)*

Aplicando el segundo grupo de fórmulas al triángulo polar del ABC, se tendrá:

$$\cos a_p = \cos b_p \cos c_p + \mathrm{sen}b_p \mathrm{sen}c_p \cos A_p$$

por tanto

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) + \mathrm{sen}(180º - B)\,\mathrm{sen}(180º - C)\cos(180º - a) \Rightarrow$$

$$-\cos A = \cos B \cos C + \mathrm{sen}B\ \mathrm{sen}C\,(-\cos a)$$

obteniéndose las fórmulas que relacionan tres ángulos y un lado:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \mathrm{sen}B\ \mathrm{sen}C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \mathrm{sen}A\ \mathrm{sen}C \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \mathrm{sen}A\ \mathrm{sen}B \cos c \end{array}}$$

2.5 Funciones de los ángulos mitad.

Por trigonometría plana sabemos que $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\quad \forall\alpha\in R,\qquad [*]$

y del segundo grupo de fórmulas de Bessel $\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$,

sustituyendo $\cos A$ en la ecuación [*] , se tiene

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos a+\overbrace{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c-\cos b\cos c}^{-\cos(b+c)}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

Llamando p al semiperímetro, se tiene:

$$a+b+c=2p\Rightarrow b+c-a=2(p-a)$$

y sustituyendo resulta

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}}$$

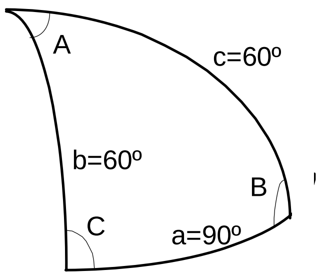
Análogamente, si partimos de $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$, se obtiene:

$$\boxed{tg\frac{A}{2}=\frac{sen\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{sen(p-b)sen(p-c)}{senp\,sen(p-a)}}}$$

Éstas fórmulas permiten calcular los ángulos de un triángulo esférico, conocidos los tres lados o bien el perímetro y dos lados. Este caso puede resolverse más fácilmente mediante el teorema del coseno (antes tenía el inconveniente de ser poco apto para el cálculo logarítmico).

Ejemplo.

En un triángulo isósceles los lados miden b=c=60°; a=90°. Calcular A, B y C.



$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{senb}\operatorname{senc}}}\ ,\text{y}\ \ a+b+c=2p$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-60^\circ)}{\operatorname{sen}60^\circ}=\frac{\operatorname{sen}45^\circ}{\operatorname{sen}60^\circ}=\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow \frac{A}{2}=\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}}\ \Rightarrow A=109^\circ 28'16''.$$

$$\frac{\operatorname{senB}}{\operatorname{senb}}=\frac{\operatorname{senA}}{\operatorname{sena}}\Rightarrow \operatorname{senB}=\operatorname{senC}=0.8164971$$

por tanto,

$$C=B=54^\circ 44'08''$$

y los ángulos pedidos miden

$$C=B=54^\circ 44'08''.;\ A=109^\circ 28'16''$$

2.6 Analogías de Gauss-Delambre

Sustituyendo en $\cos(\frac{A+B}{2}) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$, las fórmulas de los ángulos mitad para los ángulos

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}} - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}} - \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}} =$$

$$= \overbrace{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}}^{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}\left(\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c} - \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{C}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\right).$$

Con lo que

$$\frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(2\frac{c}{2})} = \frac{2\cos\frac{2p-c}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}}.$$

De forma análoga se obtienen:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}} \qquad \boxed{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}} \qquad \boxed{\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}}$$

2.7 Analogías de Neper

Calculemos $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$,

$$tg\frac{A+B}{2}=\frac{sen\frac{A+B}{2}}{cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{c}{2}}cos\frac{C}{2}}{\frac{cos\frac{a+b}{2}}{cos\frac{c}{2}}sen\frac{C}{2}}=\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}}cot\frac{C}{2}$$

por tanto,

$$\boxed{tg\frac{C}{2}=\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}}cot\frac{A+B}{2}}$$

De forma análoga se obtienen:

$$\boxed{tg\frac{C}{2}=\frac{sen\frac{a-b}{2}}{sen\frac{a+b}{2}}cot\frac{A-B}{2}}$$

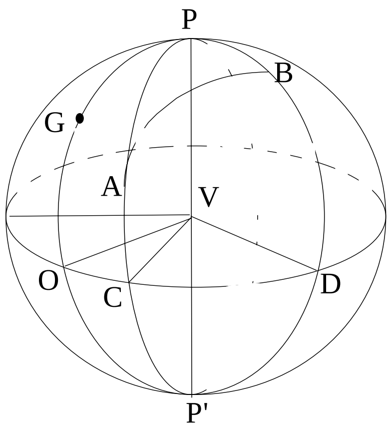
y para el lado c:

$$\boxed{tg\frac{c}{2}=\frac{sen\frac{A+B}{2}}{sen\frac{A-B}{2}}tg\frac{a-b}{2}} \qquad \boxed{tg\frac{c}{2}=\frac{cos\frac{A+B}{2}}{cos\frac{A-B}{2}}tg\frac{a+b}{2}}$$

Fórmulas que permiten resolver un triángulo esférico conocidos dos lados y el ángulo comprendido, ó bien dos elementos y el opuesto a uno de ellos, usando previamente el teorema del seno y teniendo en cuenta que $-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}$, $\frac{a-b}{2}<\frac{\pi}{2}$ y que $0<\frac{a+b}{2}$, $\frac{A+B}{2}<\pi$

2.8 Distancia esférica entre dos puntos

Dadas las coordenadas geográficas de dos lugares, hallar la distancia esférica que los separa.



Sean A y B los dos lugares cuyas coordenadas geográficas son:

$$\text{Punto A}\begin{cases}\text{Latitud} = CA\\ \text{Longitud} = OC\end{cases};$$

$$\text{Punto B}\begin{cases}\text{Latitud} = DB\\ \text{Longitud} = OD\end{cases}$$

Suponiendo el ciclo PGP’ el meridiano origen de longitudes, la diferencia $OD - OC = CD$ es la medida del ángulo P en el triángulo esférico APB.

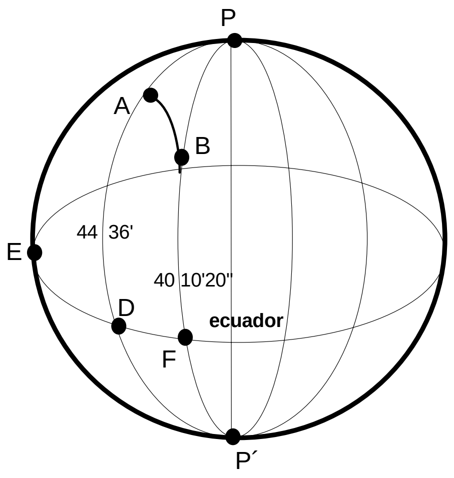
Por tanto, en el triángulo esférico APB se conocen los lados **PA=90°- CA, PB=90º- DB** y el ángulo **P**. La distancia esférica queda determinada por el lado AB del triángulo APB.

Ejemplo.

Calcular la distancia entre los puntos A y B situados sobre la superficie terrestre, siendo las longitudes y latitudes geográficas de A y B las siguientes:

Longitud de A = 4°55'10" Oeste.
Longitud de B = 12°10' Este.
Latitud de A = 44°36' Norte.
Latitud de B = 40°10'20" Norte.

Sean P y P' los polos norte y sur respectivamente. El ciclo EDF el ecuador. Los ciclos DAP y FBP los meridianos respectivos de A y B.



La medida del arco DF o lo que es lo mismo el ángulo esférico en P, será la suma de las longitudes.

El arco AP que llamaremos lado b del triángulo esférico APB, es el ángulo complementario del arco DA.
El arco BP que llamaremos lado a del triángulo esférico APB, es el ángulo complementario del arco FB.

Se pide calcular el arco AB = p, de un triángulo esférico del que conocemos el lado a = 49° 49'40", el lado b = 45°24' y el ángulo P = 16°15'10".

$$\cos p = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos P = 0.9752724$$

$$p = \arccos(0.9752724) = 12°46'05''.$$

Suponiendo la Tierra perfectamente esférica con radio 6373 m la distancia será de 1418.5 km.

2.9 Ejercicios propuestos

4.- Calcular el área, el exceso y defecto esférico del triángulo esférico:
A=40°30´ ; B=109°20´ ; c = 120°10´ siendo el radio r = 40 m.

Solución: S = 1760.6881 m^2; ε = 63°03´; δ = 80°24'31"

5.- Resolver los triángulos esféricos siguientes conocidos los tres lados:

a) a = 60°00´31"; b = 137°20´40"; c = 116°00´32"
b) a = 56°22´; b = 65°54´; c = 78°27´.
c) a = 27°59´02"; b = 41°05´06"; c = 60°22´25"

Solución:
a) A = 73°03´58" ; B = 131°32´45" ; C = 96°56´15"
b) A = 58°08´13” ; B = 68°36´57” ; C = 91°57´21”
c) A = 26°40´19" ; B = 38°57´12" ; C = 123°44´19"

6.- Resolver los triángulos esféricos siguientes conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

a) a = 73°58´58"; b = 38°45´00"; C = 46°33´41"
b) a = b = 78°23´03"; C = 118° 54´04"
c) a = 64°24´03"; b = 42°30´10"; C = 58°40´52"

Solución:
a) A = 116°09´10"; B = 35°46´12"; c = 51°02´04"
b) A = B = 71°09´46"; c = 115°02´04"
c) A = 93°59´09"; B = 48°21´42"; c = 50°33´38"

7.- Resolver los triángulos esféricos siguientes conocidos los tres vértices:

a) A = 70° 00´25"; B = 131° 10´15"; C = 94° 50´53"
b) A = 54° 41´10"; B = 67° 36´45"; C = 75° 34´59"
c) A = 58° 08´00"; B = 68° 36´00"; C = 92° 02´00"

Solución: **a)** a = 57° 59´37"; b = 137° 12´51"; c = 115° 57´16"
b) a = 41° 17´19"; b = 48° 23´28"; c = 51° 33´10"
c) a = 56° 23´38"; b = 65° 55´53"; c = 78° 32´11"

8.- Resolver los triángulos esféricos conocidos dos ángulos y el lado común:
a) A = 70° 51´15"; B = 131° 20´26"; c = 116° 12´05"
b) B = 71° 09´46"; C = 118° 54´04"; a = 78° 23´03"
c) A = 110° 51´51"; b = 137° 02´50"; C = 147° 32´56"

Solución: **a)** a = 58° 23´08"; b = 137° 24´18"; C = 95° 32´21"
b) A = 71° 09´46"; b = 78° 23´02"; c = 115° 02´04"
c) B = 131° 52´33"; c = 150° 35´28"; a = 58° 46´22"

9.- Resolver los triángulos esféricos siguientes conocidos dos lados y un ángulo opuesto:
a) a =58°46´22"; b =137°02´50"; B=131° 52´33"
b) b = 37° 47´; c =103°02´; B=24°25´
c) a = 30° 53´; b = 31° 09´; A = 87° 34´
d) a = 80° 26'12"; c = 115° 30' 36"; A =72°24'24"

Solución: **a)** Existen dos soluciones:
A_1 = 69° 08´09"; c_1= 141° 31´13"; C_1 = 137° 09´38"
A_2 = 110° 51´51"; c_2 = 150° 35´28"; C_2 = 147° 32´56"
b) Existen dos soluciones:
A_1 = 151° 16´; a_1= 134° 33´; C_1 = 41° 05´
A_2 = 54° 46´; a_2 = 73° 56´; C_2 = 138° 55´
c) No existe ningún triángulo esférico que se adapte a los datos de partida.
d) b = 76° 40' 08"; C = 119° 15' 32"; B = 109° 50' 44"

10.- Resolver los triángulos esféricos siguientes conocidos dos ángulos y un lado opuesto:
a) A = 110° 21´52"; B = 131° 10´06"; b = 137° 26´15"
b) C = 42° 12´20"; B = 83° 34´15"; b = 74° 18´02"

Solución: **a)** Existen dos soluciones
c_1 = 151°54´19"; a_1= 57°23´28"; C_1 = 148°23´30"

$c_2 = 63°32´26''$; $a_2 = 122°36´32''$; $C_2 = 85°06´11''$

b) $A = 110°51´33''$; $a = 74°42´07''$; $c = 40°36´13''$

11.- Calcular los ángulos de un triángulo esférico equilátero de lado $33°19´\ 22''$

Solución: $A = B = C = 62°\ 55´16''$

12.- Determinar los ángulos **A** y **B** de un triángulo esférico conocida su diferencia $B - A = 32°14'$ y los lados opuestos $a = 67°25´35''$ y $b = 143°44´46''$

Solución: $A = 111°\ 04´\ 00''$; $B = 143°\ 18´\ 00''$

13.- En un triángulo esférico se verifica que $a + b = \pi$. Calcular el arco de ciclo que es la mediana correspondiente al lado c.

Solución: $m = 90°$

14.- Demostrar que en un triángulo esférico equilátero se verifica:

a) $\sec A - \sec a = 1$

b) $\cos A = \dfrac{\cos a}{1 + \cos a}$

c) $2\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) sen\left(\dfrac{A}{2}\right) = 1$

15.- De un triángulo esférico trazado en una superficie esférica cuyo radio es 10 dm. se conocen : $A = 71°\ 20´$; $B = 119°\ 25´$; $C = 60°\ 45´$. Se pide:

a) Resolver el triángulo

b) Hallar su área

c) Hallar el volumen de la pirámide esférica cuyo vértice es el centro de la esfera y su base el triángulo dado

Solución: **a)** $a = 83°\ 57´$; $b = 113°\ 53´$; $c = 66°19´$

b) $S = 124.79\ dm^2$

c) V = 415.96 dm^3

16.- En todo triángulo isósceles, se verifican las relaciones:

a) $\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2}$

b) $\cos b = \cot B \cdot \cot\frac{A}{2}$

c) $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}b \cdot \cos B$

d) $\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}B$

CAPÍTULO TERCERO:

Triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros

3.1 Triángulos rectángulos

Habíamos definido el triángulo esférico rectángulo como aquél que tiene uno o más ángulos rectos.

Proposición. Para hallar las fórmulas relativas a los triángulos rectángulos basta sustituir un ángulo por 90° en las fórmulas generales obtenidas anteriormente. Sea el ángulo recto A, entonces, $\mathrm{sen A} = 1$, $\cos \mathrm{A} = 0$, y los diversos grupos de fórmulas se reducen a las siguientes :

$$[I] \quad \left\{ \cos a = \cos b \cos c \right\} \qquad [II] \quad \begin{Bmatrix} (1) & senb = sena\, senB \\ (2) & senc = sena\, senC \end{Bmatrix}$$

$$[III] \quad \begin{Bmatrix} (1) & tgb = tga \cos C \\ (2) & tgc = tga \cos B \\ (3) & tgb = senc\, tgB \\ (4) & tgc = senb\, tgC \end{Bmatrix} \qquad [IV] \quad \begin{Bmatrix} (1) & \cos a = \cot B \cot C \\ (2) & \cos B = \cos b\, senC \\ (3) & \cos C = \cos c\, senB \end{Bmatrix}$$

Regla de Neper de los elementos circulares

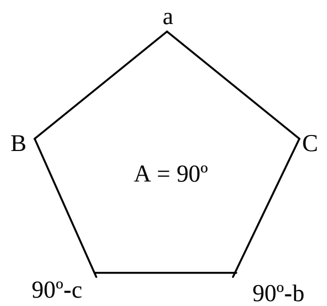
Las fórmulas anteriores pueden recordarse mediante la regla enunciada por Neper (fig 14):

Puestos los elementos del triángulo esférico en los vértices de un pentágono y en el orden que indica la figura, el coseno de cada vértice es igual al ***producto:***

a) De los senos de los vértices opuestos.

b) De las cotangentes de los vértices adyacentes.

(Recuérdese la consonancia de las palabras en cada frase.)



Se relacionan a, b y B mediante la ecuación:

$$\cos(90^\circ - b) = senb = sena\ senB$$

Se relacionan b, c y C mediante la ecuación:

$$\cos(90^\circ - b) = senb = \cot(90^\circ - c)\cot C = tgc \cot C$$

3.2 Propiedades de los triángulos esféricos rectángulos

> En todo triángulo esférico rectángulo, un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.

En las fórmulas del grupo III, $\mathrm{tgb} = \mathrm{senc}\,\mathrm{tgB}$ y $\mathrm{tgc} = \mathrm{senb}\,\mathrm{tgC}$ tenemos los factores senc y senb, siempre positivos; luego tgb y tgc han de tener siempre el mismo signo que tgB y tgC, respectivamente.

> En todo triángulo rectángulo, o los tres lados son menores de 90°, o uno tan sólo de ellos cumple con esa condición.

Si la hipotenusa a es aguda, será $\cos a > 0$; y esto según la formula $\cos a = \cos b \cos c$ se verifica si $\left.\begin{matrix}\cos b > 0\\ \cos c > 0\end{matrix}\right\}$ ó $\left.\begin{matrix}\cos b < 0\\ \cos c < 0\end{matrix}\right\}$; por tanto, los tres lados son agudos o sólo lo es uno de ellos.

Si la hipotenusa a es obtusa, será $\cos a < 0$; y por la misma razón que en el caso anterior, $\left.\begin{matrix}\cos b > 0\\ \cos c < 0\end{matrix}\right\}$ ó $\left.\begin{matrix}\cos b < 0\\ \cos c > 0\end{matrix}\right\}$; por tanto, sólo uno de ellos es agudo.

> En todo triángulo esférico rectángulo, la hipotenusa es menor o mayor que 90°, según que los dos catetos sean de la misma o de distinta especie, respectivamente.

Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

3.3 Resolución de triángulos rectángulos

Son seis los casos de resolución:

Primer caso.- **Conocidos los catetos b y c**

Utilizando las fórmulas I, II.3 , III.4, sale

$$\cos a = \cos b \cos c \quad ; \quad \mathrm{tgB} = \frac{\mathrm{tgb}}{\mathrm{senc}} \quad ; \quad \mathrm{tgC} = \frac{\mathrm{tgc}}{\mathrm{senb}}$$

Segundo caso.- **Conocida la hipotenusa a, y un cateto b**

Utilizando las formulas I, II.1, y III.1, se tiene

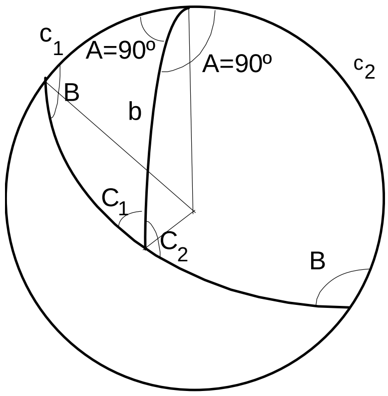
$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \; ; \; \mathrm{senB} = \frac{\mathrm{senb}}{\mathrm{sena}} \; ; \; \cos C = \frac{\mathrm{tgb}}{\mathrm{tga}}$$

Para que la solución exista es necesario que $|\cos a| \le |\cos b|$, puesto que $\cos c$ ha de estar entre -1 y 1. Cumplida esta condición la solución es única puesto que de los dos valores suministrados por senB, hay que elegir el valor que verifique la propiedad "*a mayor lado se opone mayor ángulo* "; es decir, hay que elegir el B agudo si b<a ó el B obtuso si b>a.

Tercer caso.- **Conocido un cateto b, y su ángulo opuesto B**

Utilizando las fórmulas II.1, III.3, y IV.2, se deduce

$$\mathrm{sena} = \frac{\mathrm{senb}}{\mathrm{senB}} \; ; \; \mathrm{senc} = \frac{\mathrm{tgb}}{\mathrm{tgB}} \; ; \; \mathrm{senC} = \frac{\cos B}{\cos b}$$



Este es un caso ambiguo, para que exista solución es necesario que $\text{senb} < \text{senB}$.

Verificada la condición anterior, si existe un triángulo solución, el adyacente a él por el lado b, también satisface los datos de partida.

Cuarto caso.- **Conocido un cateto b y el ángulo adyacente C**

Utilizando las fórmulas I, III.4, y IV.2 se obtiene

$$\text{tga} = \frac{\text{tgb}}{\cos C} \ ; \ \text{tgc} = \text{senb tgC} \ ; \ \cos B = \cos \text{bsenC}$$

La solución es siempre única.

Quinto caso.- **Conocida la hipotenusa a, y un ángulo B**

Utilizando las fórmulas II.1, III.2, IV.1, se tiene

$$\text{senb} = \text{sena senB} \ ; \ \text{tgc} = \text{tga} \cos B \ ; \ \text{tgC} = \frac{\cot B}{\cos a}$$

El problema siempre tiene solución y es única.

Sexto caso.- **Conocidos los ángulos B y C**

Utilizando las fórmulas IV.1, IV.2, IV.3, sale

$$\cos a = \cot B \cot C \;\; ; \;\; \cos b = \frac{\cos B}{\mathrm{sen} C} \;\; ; \;\; \cos c = \frac{\cos C}{\mathrm{sen} B}$$

Ejemplo.

Resolver el triángulo esférico rectángulo siendo:

$a = 50^\circ 30' 30''$ y $b = 40^\circ 10' 10''$

$\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b} = 0.8322634$, de donde se deduce que $c = 33^\circ 40' 05''$

$\mathrm{sen} B = \dfrac{\mathrm{sen} b}{\mathrm{sen} a} = 0.8358636$, de donde se deducen los valores $B = \begin{cases} 56^\circ 42' 21'' \\ \text{ó} \\ 123^\circ 17' 39'' \end{cases}$

De los dos valores que pueden tomarse para B, uno agudo y otro obtuso, solo es valido el primero, pues al ser $a > b$ también ha de ser $A = 90° > B$; luego B = 56°42´21"

$\cos C = \dfrac{\mathrm{tg} b}{\mathrm{tg} a} = 0.6956588$, por tanto $C = 45^\circ 55' 13''$

3.4 Triángulos esféricos rectiláteros

Un triángulo esférico es rectilátero si uno de sus lados es un cuadrante (a = 90°).

Proposición

Si el lado recto es a, $\operatorname{sen} a = 1, \cos a = 0,$ y los diversos grupos de fórmulas para los triángulos esféricos en general se reducen a las fórmulas siguientes:

$$[\mathrm{I'}] \left\{\begin{array}{ll} (1) & \cos A = -\cot b \cot c \\ (2) & \cos b = \cos B \operatorname{sen} c \\ (3) & \cos c = \cos C \operatorname{sen} b \end{array}\right\} \qquad [\mathrm{III'}] \left\{\begin{array}{ll} (1) & \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cos c \\ (2) & \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cos b \\ (3) & \operatorname{tg} B = \operatorname{sen} C \operatorname{tg} b \\ (4) & \operatorname{tg} C = \operatorname{sen} B \operatorname{tg} c \end{array}\right\}$$

$$[\mathrm{II'}] \left\{\begin{array}{ll} (1) & \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \\ (2) & \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c \end{array}\right\} \qquad [\mathrm{IV'}] \left\{\cos A = -\cos B \cos C\right\}$$

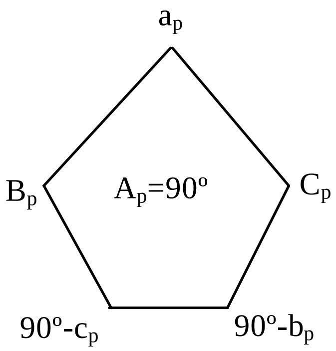
Resolución de triángulos rectiláteros

Las fórmulas anteriores nos permiten resolver los triángulos rectiláteros. También se pueden resolver reduciéndolos a los casos de triángulos rectángulos, pues si a = 90°, su triángulo polar $A_pB_pC_p$ es rectángulo en A_p. Resuelto el polar, se determina el triángulo dado hallando los suplementos de los ángulos y lados de $A_pB_pC_p$.

Ejemplo.

Resolver el triángulo esférico a=90°, A=36°25'08", c=102° y calcular la superficie que ocupa él y su triángulo polar sobre una esfera de radio1.

$$C_p = 180^\circ - c = 78^\circ \,; \quad a_p = 180^\circ - A = 143^\circ 34'52'' \,;$$



$$\cos a_p = \cot C_p \cot B_p$$

por tanto

$$\mathrm{tg}B_p = \frac{1}{\mathrm{tg}C_p}\frac{1}{\cos a_p} = 0.2125565(-1.2427020) = -0.26414 \Rightarrow B_p = 165^\circ 12'13'' \Rightarrow$$

$$b = 180^\circ - 165^\circ 12'13'' = 14^\circ 47'47''$$

$$\cos(90^\circ - c_p) = \mathrm{sen}c_p = \mathrm{sen}a_p \mathrm{sen}C_p$$

por tanto

$$\mathrm{sen}c_p = 0.5936842 \cdot 09781476 = 0.5807107 \ \text{ luego } \ c_p = \begin{cases} 35^\circ 30'02'' = c_p \\ 144^\circ 29'58'' \end{cases}$$

la solución lado obtuso, no es válida, ya que $C_p < A_p \Rightarrow c_p < a_p$; y su ángulo suplementario es el vértice C buscado; $C = 180^\circ - c_p \Rightarrow C = 144^\circ 29'58''$

$\cos(90^\circ - b_p) = \mathrm{sen}\, b_p = \mathrm{sen}\, a_p \mathrm{sen}\, B_p = 0.1483047 \Rightarrow \quad b_p = \begin{cases} 8^\circ 31'43'' \\ 171^\circ 28'17'' \end{cases}$; de los dos ángulos uno agudo y otro obtuso, sólo es válido el valor obtuso pues $B_p > A_p \Rightarrow b_p > a_p$; por tanto, $b_p = 171°28'17''$, siendo el vértice B el ángulo suplementario del $b_p \Rightarrow B = 8° \; 31' \; 43''$

La superficie del triángulo más la de su triángulo polar es

$$S = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A + B + C - 180^\circ) + \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A_p + B_p + C_p - 180^\circ) =$$

$$= \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A + B + C + A_p + B_p + C_p - 360^\circ) = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(36.2443) = 0.6325$$

3.5 Ejercicios propuestos

17.- Resolver los siguientes triángulos esféricos rectángulos, conocidos dos catetos.

a) A=90°; b = c = 59° 52´ 00"

b) A=90°; b = 42° 10´ 00"; c = 65° 42´ 00"

c) A=90°; b = 153° 52´ 42"; c = 111° 49´ 32"

Solución:

a) a = 75° 24´ 11"; B = C = 63° 20´ 33".

b) a = 72° 14´ 28"; B = 44° 49´ 11"; C = 73° 08´ 17"

c) a = 70° 29´ 59"; B = 152° 09´ 21"; C = 100°

18.- Resolver los siguientes triángulos esféricos, conocidos la hipotenusa y un cateto.

a) A=90°; a = 60° 07´ 13"; c = 59° 00´ 12"

b) A=90°; a = 52° 27´ 10"; b = 40° 15´ 12"

c) A=90°; a = 75° 24´ 11"; b = 59° 52´ 00"

Solución:

a) b = 14° 40´ 42"; B = 16° 59´ 31"; C = 81° 20´ 39"

b) c = 37° 00´ 44"; B = 54° 35´ 12"; C = 49° 23´ 59"

c) c = 59° 52´ 00"; B = C = 63° 20´ 33"

19.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos, conocidos un cateto y su ángulo opuesto.

a) A = 90°; b = 34° 40´23"; B = 52° 56´32"

b) A = 90°; b = 42° 10' 00"; B= 44° 49' 11"

c) A = 90°; c = 128°33'; C=105° 59'

Solución: En estos casos existen dos triángulos adyacentes solución:

a)	a_1 = 45° 28´ 09";	c_1 = 31° 29´ 25";	C_1=47°07´02”
	a_2 = 134° 31´ 51";	c_2 = 148°30´35";	C_2=132°52´58”
b)	a_1 = 72° 14´ 27";	c_1 = 65° 41' 59";	C_1 =73°08'16”
	a_2 = 107° 45´ 33";	c_2 = 114° 18´ 01";	C_2 =106°51´44”
c)	a_1 = 125° 33´;	b_1 = 21° 04;	B_1 = 26° 15´
	a_2 = 54° 26´;	b_2 = 158° 56´;	B_2 = 153° 48´

20.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos, conocidos los ángulos.

a) A=90°; B = 31° 42´ 53"; C = 82° 14´ 00"

b) A=90°; B = 56° 42´ 21"; C = 45° 55´ 13"

Solución:

a) a = 77° 14´ 57"; b = 30° 50´ 44"; c = 75° 06´ 12"

b) a = 50° 30´ 29"; b = 40° 10´ 10"; c = 30° 40´ 05"

21.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos, conocida la hipotenusa a y un ángulo.

a) A = 90°; a = 107° 32´ 10"; B = 37° 04´ 11"

b) A = 90°; a = 70° 30'; C = 100°

Solución:

a) C = 102° 49´ 24"; b = 35° 05´ 01"; c = 111°36´21"

b) B = 152° 09´ 18"; b = 153° 52´ 42"; c = 111°49´32"

22.- Calcular los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa es a = 80° y la suma de los catetos vale 100°.

Solución: b = 79° 18´ 08"; c = 20° 41´ 52"

23.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo siendo el ángulo recto A=90° . Se cumple:

a) $\cos^2 C \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sen}(c+a) \operatorname{sen}(a-c)$

b) $\operatorname{tg} a \cos c = \operatorname{sen} b \cot B$

c) $\operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} \cos b \operatorname{sen} a$

24.- Un barco que parte del punto A (latitud 36°50' N. y longitud 76°20' O.) y que navega a lo largo de una circunferencia máxima, corta al Ecuador en un punto cuya longitud es 50° O. Encontrar el rumbo inicial y la distancia recorrida.

Solución: d = 4907.31 km   Rumbo = 140° 27´ 22"

25.- Resolver los triángulos esféricos

a) a = 90°;	b = 57°14' 20";	c=54°07'37"
b) a = 90°;	b = 148°17' 07";	c=97°46'00"
c) a = 90°;	A = 57°54' 13";	B = 29°54'32"
d) c = 90°;	A = 32°53' 04";	B = 115°24'05"
e) c = 90°;	a = 60°34' 05";	B = 122°18'05"

Solución:

a) A = 117°43´58";	B = 48°06´06";	C= 45°49´35"
b) A = 102°45´03";	B = 149°09´16";	C= 104°53´ 47"
c) b = 36°03´24";	c = 111°08´56";	C = 127°48´20"
d) a = 35°35´34";	b = 75°32´33";	C =112°06´51"
e) b = 117°44´12";	A = 42°50´07";	C =66°55´47"

CAPÍTULO CUARTO:

Problemas

4.1 Problemas resueltos

1.- Resolver los triángulos esféricos rectángulos (A=90°), con los datos siguientes:

a) b=02°05’07’’; c=83°08’56’’

b) a=143°21’58’’; b=167°03’38’’

c) b=38°17’46’’; B=52°38’34’’

Solución:

a) $\cos a = \cos b \cos c = 0.1192107 \Rightarrow$ a=83°09’12’’

$$\mathrm{tg}B = \frac{\mathrm{tg}b}{\mathrm{sen}c} = 0.0366728 \Rightarrow B=02°06'01''$$

$$\mathrm{tg}C = \frac{\mathrm{tg}c}{\mathrm{sen}b} = 228.7387658 \Rightarrow C=89°44'58''$$

b) $\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b} = 0.8235809 \Rightarrow$ c=34°33’34’’

$$\cos C = \frac{\mathrm{tg}b}{\mathrm{tg}a} = 0.3089847 \Rightarrow C=72°00'07''$$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{sen}B = \dfrac{\mathrm{sen}b}{\mathrm{sen}a} = 0.3752673 \\ B > A \end{cases}\right\} \Rightarrow B=157°57'33''$$

c) $\mathrm{sen}a = \dfrac{\mathrm{sen}b}{\mathrm{sen}B} = 0.779660 \Rightarrow \begin{cases} 51^\circ 13'46'' \\ 128^\circ 46'14'' \end{cases}$

$$\mathrm{sen}c = \frac{\mathrm{tg}b}{\mathrm{tg}B} = 0.6027941 \Rightarrow c = \begin{cases} 37^\circ 04'13'' \\ 142^\circ 55'47'' \end{cases}$$

$$\mathrm{sen}C = \frac{\cos B}{\cos b} = 0.7731488 \Rightarrow C = \begin{cases} 50^\circ 38'15'' \\ 129^\circ 21'45'' \end{cases}$$

Si a_1 = 51°13’46’’ $\Rightarrow$ c_1 = 37°04’13’’ por ser b y a_1 agudos. Por ser $c_1 < a_1$ es C_1=50°38’15’’.

Si a_2=128°46’14’’ $\Rightarrow$ c_2=142°55’47’’ por ser b agudo y a_2 obtuso.Como c_2 es agudo también lo es C_2 , C_2=129°21’45’’.

2.- Resolver el triángulo esférico isósceles de lados: a=53°34’18’’, b = c = 47°11’22’’.

Solución:

De la fórmula del coseno para los lados, $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$, y siendo los lados b y c iguales se tiene:

$$\cos a = \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{\cos a - \cos^2 b}{\operatorname{sen}^2 b} \qquad [1]$$

De forma análoga, $\cos B = \cos C = \dfrac{\cos b - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \dfrac{(1-\cos a)\cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$ **[2]**

Sustituyendo cosa=0.59381684, cosb=0.67957646, sena=0.80460024 y senb=0.73360468 en las formulas **[1]** y **[2]** se tiene:

cosA=0.24525939 $\Rightarrow$ A=75° 48’ 10’’ cosB=0.46764682 $\Rightarrow$ B=C=62° 07’ 06’’

3.- Calcular los lados de un triángulo esférico conocidos los tres ángulos:
A=54°41’10’’; B=67°36’ 45’’; C=75° 34’59’’

Solución:

De la fórmula de los cosenos para los ángulos

$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A \cos a$ se obtiene, $\cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$ **[1]**

y de manera análoga se obtienen:

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}, \qquad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \qquad [2]$$

Sustituyendo cosA=0.578055, cosB=0.380868, cosC=0.248976, senA=0.380868, senB=0.924629, senC=0.968509, en **[1]** y **[2]** se tiene:

cosa=0.751394 $\Rightarrow$ a=41°17’19’’. cosb=0.664038 $\Rightarrow$ b=48°23’29’’. cosc=0.621792 $\Rightarrow$ c=51°33’10’’

4.- Calcular A con los datos siguientes:

a = 74°16’00’’; b = 41°41’00’’; c = 30°00’00’’

Solución:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{senbsenc}} = \frac{-0.375614}{0.332506} = -1.129643$$, resultado absurdo.

No existe un triángulo esférico para los datos anteriores, y ello es debido a no verificarse:

c > a-b = 32°35’

5.-De un triángulo esférico se sabe:

$$\begin{cases} a + b + c = 141°14'01" \\ b - a = 07°06'10" \\ c - a = 1015'51" \end{cases}$$,calcular A, B y C.

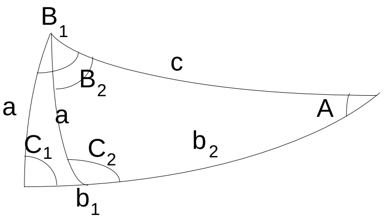
Solución:

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se tiene a=41°17’20’’ b=48°23’30’’ c=51°33’11’’.

Por tanto, $\begin{Bmatrix} \cos a = 0.7539211, & \text{sena}=0.65985596 \\ \cos b=0.66403497, & \text{senb}=0.74770152 \\ \cos c=0.62178968, & \text{senc}=0.78318427 \end{Bmatrix}$; sustituyendo en la fórmula del coseno para los lados, se tiene:

cosA=0.58237356⇒A=54°22’56’’
cosB=0.37782283⇒B=54°22’56’’
cosC=0.24557310⇒C=75°47’03’’

6.- Conocidos los lados a=43°46'28'', c=60°15'07'' y el ángulo A=51°28'21'' de un triángulo esférico, obtener los restantes elementos.



Solución:

El ángulo C puede ser calculado mediante la fórmula de Bessel $\frac{\text{senC}}{\text{senc}} = \frac{\text{senA}}{\text{sena}} \Rightarrow$ $\text{senC} = \frac{\text{senA}}{\text{sena}}\text{senc} = \frac{0.78230928}{0.69182118}0.86821565 = 0.981775$; resultando dos posibles valores para el ángulo C:

$$C_1=79°02'40'', \text{ y } C_2=180°-C_1=100°57'20''$$

Utilizando las analogía de Neper $\text{tg}\frac{b}{2} = \frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A-C}{2}}\text{tg}\frac{a+c}{2}$ se obtienen:

Para el caso C_1, $\text{tg}\frac{b_1}{2} = 0.55134911 \Rightarrow b_1=57°44'25''$

Para el caso C_2, $\text{tg}\frac{b_2}{2} = 0.55134911 \Rightarrow b_2=37°08'37''$

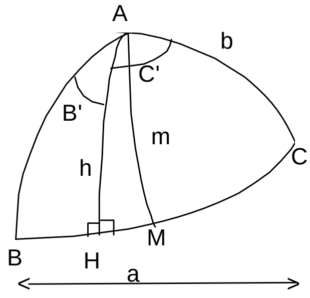
De la analogía $\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{\text{sen}\frac{a-c}{2}}{\text{sen}\frac{a+c}{2}}\cot\frac{A-C}{2}$ se obtienen los valores de B_1 y B_2.

Para el caso b_1, C_1, $\text{tg}\frac{B_1}{2} = 0.74100302 \Rightarrow B_1 = 73^\circ 04'37''$

Para el caso b_2 , C_2 , $\operatorname{tg}\frac{B_2}{2} = 0.39454162 \Rightarrow B_2 = 43^{\circ}03'45''$

Existen dos posibles triángulos esféricos solución como se indica en la figura.

7.- Resolver el triángulo esférico conociendo el lado a=120°10’00’’,la altura h=42°15’00’’ y la mediana m=62°10’00’’ que parten del vértice A.



Solución:

Del triángulo rectángulo HAM conocemos el ángulo H=90°, y los lados m y h; que nos permite calcular el lado HM,

$$\cos m = \cos h \cos HM + \underbrace{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} HM \overbrace{\cos H}^{0}}_{0} \Rightarrow \cos HM = \frac{\cos m}{\cos h} = \frac{0.466901}{0.740218} = 0.630761$$

$\Rightarrow$ HM=50°53’37’’

Del triángulo rectángulo HAC conocemos H=90° y h=42°15’; hallamos el lado HC, y los ángulos C y C’.

$$HC = \frac{a}{2} + HM = 110^{\circ}58'37'' \Rightarrow \cos b = \cos h \cos HC + \underbrace{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} HC \overbrace{\cos H}^{0}}_{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos b = 0.740218(-0.357992) = -0.264992 \Rightarrow$ b=105°21’59’’

$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} h} = \frac{\overbrace{\operatorname{sen} H}^{1}}{\operatorname{sen} b}$ por tanto $\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} b} = 0.697295 \Rightarrow$ C=44°12’37’’ puesto que la solución 135°47’23’’ no es válida, ya que, en un triángulo rectángulo, un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.

$\frac{\text{senC}'}{\text{senHC}} = \frac{\overbrace{\text{senH}}^{1}}{\text{senb}}$ por tanto $\text{senC}' = \frac{\text{senHC}}{\text{senb}} = 0.968341$ $\Rightarrow$ C’=104°27’22’’ por la misma razón que el caso anterior.

Del triángulo rectángulo HAB conocemos H=90° y h=42°15’; hallamos los lados BH , c y el ángulo B’.

$$\text{BH} = \frac{a}{2} - \text{HM} = 09^{\circ}11'23''.\ \cos c = \cosh \cos \text{BH} + \underbrace{\text{senhsenBH}\overbrace{\cos \text{H}}^{0}}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos c = 0.7402180 \cdot 0987165 = 0.730717 \Rightarrow \text{c=43°03'12''}$$

$\frac{\text{senB}}{\text{senh}} = \frac{\overbrace{\text{senH}}^{1}}{\text{senc}}$ por tanto $\text{senB} = \frac{\text{senh}}{\text{senc}} = 0.984896$ $\Rightarrow$ B=80°01’45’’ puesto que, el lado h es agudo su ángulo opuesto B también lo será.

$\frac{\text{senB}'}{\text{senBH}} = \frac{\overbrace{\text{senH}}^{1}}{\text{senc}}$ por tanto $\text{senB}' = \frac{\text{senBH}}{\text{senc}} = 0.233937$ $\Rightarrow$ B’=13°31’44’’ por la misma razón que el caso anterior.

La solución del triángulo pedido es:

a=120°10’,	b=105°21’59’’,	c=43°03’12’’
A=B’+C’=117°59’6’’,	B=80°01’45’’,	C=44°12’37’’

4.2 Problemas propuestos

1.-Conocidos a, b y c hallar los ángulos del triángulo:
a=76°35’36’’, b=50°10’30’’, c=40°00’10’’

2.-Dados los siguientes elementos, resolver el triángulo:
a=100°00’00’’, b=50°00’00’’, c=60°00’00’’

3.-Con los siguientes datos, calcular los demás elementos. a=b=63°14’24’’, c=37°04’13’’.

4.-Resolver el triángulo equilátero de lados a=b=c=67°32’08’’.

5.-Resolver un triángulo con los datos siguientes:
a=39°27’42’’, b=71°13’15’’, c=54°02’02’’

6.-Calcular los tres ángulos de un triángulo, con los datos que siguen:
a=53°34’18’’, b=c=47°11’22’’

7.-Calcular los tres lados de un triánguloesférico con los datos que siguen:
A=54°41’10’’, B=67°36’45’’, C=75°34’59’’.

8.-Con los tres ángulos que siguen, calcular los tres lados:
A=161°08’00’’, B=15°35’00’’, C=09°38’00’’

9.- Con los siguentes datos, calcular los tres lados del triángulo:
A=B=52°14’24’’, C=82°12’03’’

10.- Calcular los tres lados conocidos los tres ángulos A=B=C=73°57’02’’.

11.- Con los datos que siguen, calcular los tres lados:
A=67°0’0’’, B=82°0’0’’, C=88°0’0’’

12.- Con los elementos que siguen, resolver el triángulo:
A=89°08’0’’, B=76°40’42’’, C=53°16’24’’

13.-Dados los siguientes elementos, resolver el triángulo:
a=76°35’36’’, b=50°10’30’’, C=34°15’02’’

14.-Resolver un triángulo con los datos siguientes:

a=53°24’00’’, b=42°36’10’’, C=82°00’30’’

15.- Con los elementos que siguen, resolver el triángulo:
a=69°03’13’’, c=18°54’08’’, B=82°14’07’’

16.-Dados los siguientes elementos, resolver el triángulo:
a=72°14’10’’, b=37°42’50’’, C=59°32’00’’

17.-Resolver un triángulo con los datos que siguen:
b=74°32’14’’, c=57°, A=57°

18.-Resolver un triángulo con los datos siguientes:
b=111°01’00’’, c=22°02’02’’, A=36°54’07’’

19.- Con los datos que siguen, resolver el triángulo:
A=80°54’22’’, B=73°42’18’’, c=38°14’10’’

20-Resolver un triángulo con los datos que siguen:
A=82°0’0’’, B=56°0’0’’, c=34°0’0’’

21.- Con los elementos que se dan a continuación, resolver el triángulo:
a=38°0’0’’, B=65°0’0’’, C=27°0’0’’

22.- Calcular el exceso y defecto esférico del triángulo:
a=64°31’46’’, B=82°08’16’’, C=24°36’52’’

23.-Dados los siguientes elementos, resolver el triángulo:
a=12°46’32’’, B=76°03’03’’, C=31°04’17’’

24.-Resolver el triángulo:
A=121°36’19’’, B=42°15’15’’, c=40°00’10’’

25.- Con los elementos que se dan a continuación, resolver el triángulo:
a=42°42’12’’, b=65°36’0’’, A=37°45’0’’

26.-Resolver el triángulo:
a=76°35’36’’, b=50°10’36’’, A=121°36’19’’

27.-Resolver el triángulo: A=100°, b=85°, a=80°

28.- Siendo conocidos los elementos que siguen, resolver el triángulo:
a=132°36'00'', b=96°54'00'', A=144°43'00''

29.- Con los datos que siguen, resolver el triángulo:
a=76°42'12'', b=74°14'35'', A=82°41'40''

30.- Con los elementos del triángulo que se dan a continuación, estudiar las soluciones:
a=70°30'10'', b=100°, A=120°

31.-Resolver un triángulo con los datos siguientes:
b=B=46°52'30'', c=84°14'40''

32.-Resolver el triángulo: A=121°35'36'', b=50°10'36'', a=76°35'36''

33.- Con los elementos que se dan a continuación, resolver el triángulo:
A=161°16'32'', B=126°57'15'', a=163°17'55''

34.- Con los datos que siguen, resolver el triángulo:
b=52°46'13'', A=38°11'23'', B=82°14'46''

35.-Resolver un triángulo con los datos siguientes:
b=114°31'18'', B=119°42'34'', C=72°03'16''

36.-Resolver un triángulo con los datos siguientes:
A=112°24'32'', B=61°12'40'' , a=72°36'24''

37.- Resolver los triángulos rectángulos (A=90°) siguientes:
a) a=83°09'12'', c=83°08'56'' **b)** b=167°03'38'', B=157°57'33''
c) b=38°17'46'',C=50°38'15'' **d)** c=73°18'36'' , C=136°51'13''

38.- Con los datos que siguen, resolver los triángulos rectángulos (A=90°):
a) b=02°05'07'', B=02°06'01'' **b)** c=34°33'34'', B=157°57'33''
c) a=51°13'46'',B =52°38'34'' **d)** B =32°38'34'', C =42°18'14''

39.- Con los elementos que siguen, resolver los triángulos rectángulos A=90°.
a) c=83°08'56'', B=02°06'01'' **b)** a=143°21'58'', C=72°00'07''
c) B=52°38'34'',C =50°38'15''

40.- Resolver los triángulos rectángulos con los datos siguientes: (A=90°)

a) c=83°09’12’’, C=89°44’58’’ **b)** B=157°57’33’’, C=72°00’07’’

c) b=38°17’46’’,c =37°04’13’’

41.- Calcular el área del triángulo esférico a=b=c=67°32’08’’ y r=2375 km. (radio aproximado de Mercurio).

42.-Calcular, en kilómetros, la longitud del lado c de un triángulo esférico siendo C=72°24’52’’, A=80°54’31’’ , a=54°32’24’’ y r=1736,6 km (radio de la Luna).

43.- Calcular la distancia en km. entre Madrid y Málaga, siendo las coordenadas de Madrid longitud 0° y latitud 40°24’30’’ Norte, y las de Málaga 49’55’’ Oeste y 36°43’13’’ Norte. (r=6366)

44.-Las coordenadas geográficas de Murcia son: longitud 2°33’33’’E, latitud 37°59’03’’N y las de Granada 5’15’’E y 37°10’37’’N respectivamente. Calcular en Km. la distancia esférica entre esas dos capitales, suponiendo el radio terrestre 6366 km. (Meridiano inicial es el de Greenwich).

45.- Los cuatro vértices de un cuadrilátero esférico corresponden a Bilbao, Valencia, Sevilla, Cáceres. Las coordenadas geográficas de éstas capitales son:

	Longitud	Latitud
Bilbao	45’49’’ E	43°15’26’’ N
Valencia	3°18’42’’ E	39°28’30’’ N
Sevilla	2°18’18’’ O	37°23’10’’ N
Cáceres	2°41’ O	39°28’22’’ N

Calcular las distancias siguientes:
1º Entre Bilbao y Valencia. 2º Entre Bilbao y Sevilla. 3º Entre Bilbao y Cáceres. 4º Entre Valencia y Sevilla. 5º Entre Valencia y Cáceres. 6º Entre Sevilla y Cáceres.

46.- En cada uno de los ejercicios debe razonarse en primer lugar si puede o no existir al menos un triángulo esférico con los elementos del enunciado. En caso afirmativo, calcular los elementos restantes.

a)	a = 90° ,	A = 36°25´08" ,	c = 102°
b)	a = 63°25´36",	b =78°14´15",	A = 40°09´53"
c)	a = 57° 59´ 36" ,	B = 131° 10´ 15",	C =94°50´53"
d)	a = 100° ,	b = 50°' ,	c = 60°

e)	a = 132°09´32",	b = 56°20´05",	B = 94° 58´
f)	a = 42°42´12",	A = 37°45´00",	b = 65°36´00"
g)	a = 103°21´,	c = 71°32´,	C = 77°12’
h)	a = 57°36´00",	A = 104°25´00",	b = 31°14´00"
i)	a = 76°58´55",	c = 112°21´15",	C = 100°33´60"
j)	C = 118°43´30",	B = 100°21´15",	c = 132°20´53"
k)	B = 47°54´10",	C = 132°10´50",	b = 104°33´53"
l)	b = 72°00´36",	c = 88°14´15",	B = 66°32´57"
m)	a = 112°42´36",	b = 76°44´15",	A = 90°
n)	c = 90°,	b = 111°22´00",	B = 90°
ñ)	a = 90° ,	A = 27°33´15",	c = 100°
o)	a = 77° 15´ 10" ,	A = 67° ,	b = 102°
p)	a = 38° ,	c = 72° ,	A = 77°

47.- Sobre una esfera de radio unidad, el área de un triángulo esférico coincide con el área de su triángulo polar. Calcular su perímetro sabiendo que su exceso esférico es de 45°.

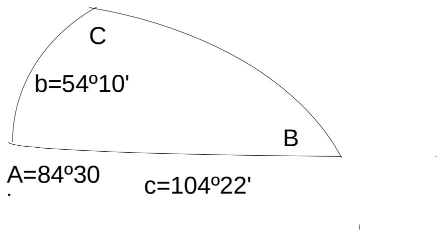
48.- Dado el triángulo esférico de la figura:

Calcular los arcos de circunferencia máxima correspondientes a:

a) Altura sobre el lado c.

b) Bisectriz del ángulo C.

c) Mediana sobre el lado c.



49.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo con $A = 90^{o}$ se verifica:

1º) $\operatorname{tg} c \cos a = \operatorname{sen} b \cot B$

2º) $\operatorname{tg}\dfrac{a+c}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{a-c}{2} = \operatorname{tg}^2\dfrac{b}{2}$

50.- Demostrar que la bisectriz esférica de un ángulo de un triángulo esférico, divide al lado opuesto en dos arcos, cuyos senos son proporcionales a los senos de los lados contiguos.

51.- En el triángulo esférico rectilátero en el que c = 90°, obtener la altura esférica correspondiente al lado c en función de los otros dos lados.

4.3 Soluciones

1.- A=121°36’20’’;	B=42°15’13’’;	C=34°15’02’’
2.- A=138°15’45’’;	B=31°11’14’’;	C=35°49’58’’
3.- A=B=80°15’59’’;	C=41°42’41’’.	
4.- A=B=C=73°57’01’’.		
5.- A=40°27’55’’;	B=104°48’45’’;	C=55°44’14’’
6.- A=75°48’10’’;	B=C=62°07’06	
7.- a=41°17’19’’;	b=48°23’29’’;	c=51°33’10’’
8.- a=85°40’57’’;	b=55°56’05’’;	c=31°03’59’’
9.- a=b=27°23’29’’;	c=35°12’30	
10.- a=b=c=67°32’08’’		
11.- a=66°26’21’’;	b=80°26’18’’;	c=84°22’45’’
12.- a=78°41’35’’;	b=72°36’51’’;	c=51°48’58’’
13.- A=121°36’21’’;	B=42°15’13’’;	c=40°00’09’’
14.- A=67°59’10’’;	B=51°24’58’’;	c=59°02’30’’
15.- A=79°54’35’’;	C=1°33’44’’;	b=70°01’59’’
16.- A=103°23’13’’;	B=38°40’27’’;	c=57°32’19’’
17.- B=94°24’25’’;	C=60°10’49’’;	a=54°09’55’’
18.- B=145°51’21’’;	C=13°02’11’’;	A=36°54’07’’
19.- a=58°51’15’’;	b=56°17’51’’;	C=45°33’56’’
20.- a=43°56’54’’;	b=35°31’19’’;	C=52°55’48’’
21.- b=33°58’08’’;	c=16°15’12’’;	A=92°59’57’’
22.- ε=1°42’35’’;	δ=209°46’0’’.	
23.- b=13°19’33’’;	c=06°17’10’’;	A=73°37’11’’
24.- a=76°35’36’’;	b=50°10’31’’;	C=34°15’03’’

25.- Existen dos soluciones

B_1 =55°17’37’’;	C_1 =115°33’58’’;	c_1 =87°52’37’’
B_2 =124°42’23’’;	C_2 =28°57’32’’;	c_2 =32°26’12’’

26.- B=42°15’18’’; C=34°14’58’’; c=40°00’03’’

27.- No existe triángulo para los datos conocidos.

28.- Existen dos soluciones

B_1 =51°10’16’’;	C_1 =35°12’17’’;	c_1 =47°16’45’’
B_2 =128°49’44’’;	C_2 =135°04’38’’;	c_2 =115°51’22’’

29.- B=78°47’07’’; C=66°01’19’’; c=63°41’59’’

30.- No existe triángulo para los datos conocidos.

31.- Existen dos soluciones

A_1 =84°37’44’’;	C_1 =84°14’40’’;	a_1 =84°37’44’’

	$A_2 = 72°31'09''$;	$C_2 = 95°45'20''$;	$a_2 = 72°31'09''$
32.-	$B = 42°15'17''$;	$C = 34°15'28''$;	$c = 40°00'42''$

33.- Existen dos soluciones

$c_1 = 146°06'26''$;	$b_1 = 45°40'31''$;	$C_1 = 141°28'17''$
$c_2 = 54°20'33''$;	$b_2 = 134°19'29''$;	$C_2 = 114°49'23''$

34.- $a = 29°47'22''$; $c = 50°23'04''$; $C = 73°28'00''$

35.- Existen dos soluciones

$a_1 = 65°31'13''$;	$c_1 = 85°13'50''$;	$A_1 = 60°19'27''$
$a_2 = 46°24'38''$;	$c_2 = 94°46'10''$;	$A_2 = 43°44'35''$

36.- $b = 64°46'28''$; $c = 17°58'40''$; $C = 17°23'54''$

37.-	**a)**	$b = 02°05'07''$;	$B = 02°06'01''$;	$C = 89°44'58''$
	b)	$a_1 = 36°38'02''$;	$c_1 = 145°26'26''$;	$C_1 = 107°59'53''$
		$a_2 = 143°21'58''$;	$c_2 = 34°33'34''$;	$C_2 = 72°00'07''$
	c)	$a = 51°13'46''$;	$B = 52°38'34''$;	$c = 37°04'13''$
38.-	**a)**	$a_1 = 83°09'12''$;	$c_1 = 83°08'56''$;	$C_1 = 89°44'58''$
		$a_2 = 96°50'48''$;	$c_2 = 96°51'04''$;	$C_2 = 90°15'02''$
	b)	$a = 143°21'58''$;	$b = 167°03'38''$;	$C = 72°00'07''$
	c)	$b = 38°17'46''$;	$c = 37°04'13''$;	$C = 50°38'15''$
39.-	**a)**	$a = 83°09'12''$;	$b = 02°05'07''$;	$C = 89°44'58''$
	b)	$b = 167°03'38''$;	$c = 34°33'34''$;	$C = 72°00'07''$
	c)	$a = 51°13'46''$;	$b = 38°17'46''$;	$c = 37°04'12''$
40.-	**a)**	$b = 02°05'07''$;	$c = 83°08'56''$;	$B = 02°06'01''$
	b)	$a = 143°21'58''$;	$b = 167°03'38''$;	$c = 34°33'34''$
	c)	$a = 51°13'46''$;	$B = 52°38'34''$;	$C = 50°38'15''$

41.- 4120159 km^2

42.- 1571.36 km

43.- 416.1 km

44.- 235.5 km

45.- 1º 470.8 km	2º 702 km	3º 509.2 km
4º 541 km	5º 514 km	6º 234.1 km