La belleza está estrechamente relacionada con la simetría
Hermann WEYL (1885-1955)

ÍNDICE

Capítulo 1

NOCIONES BÁSICAS SOBRE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. Espacio afín euclídeo

1.1 Espacio Afín

Sea E el conjunto de puntos del espacio ordinario y V el espacio vectorial real de los vectores libres asociados a dicho espacio ordinario.

La aplicación φ de E × E en V, tal que a cada par de puntos (A, B) ∈ E × E le hace corresponder un vector geométrico de origen A y extremo B, es decir:

$$\begin{array}{l} E \times E \xrightarrow{\ \varphi\ } V \\ (A, B) \longrightarrow \vec{v} = \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB} \end{array}$$

cumple las siguientes condiciones:

i. Para cualquier punto A de E y para cualquier vector $\vec{v}$ de V, existe un único punto B de E tal que $\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$

ii. Cualesquiera que sean los puntos A, B y C de E, verifican que $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ o sea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relación de Chasles)

Por cumplir φ estas dos propiedades, se dice que **E es un espacio afín** cuyo espacio vectorial asociado es V.

1.2 Espacio vectorial euclídeo

El espacio vectorial V de los vectores libres del espacio dotado del producto escalar se llama **espacio vectorial euclídeo** de los vectores libres del espacio.

1.3 Espacio afín euclídeo

Dícese del espacio afín E asociado a un espacio vectorial euclídeo V.

2. Movimientos

2.1 Definición de Transformación geométrica

Sea E el espacio afín euclídeo de dimensión n y sea T una aplicación de E en sí mismo

$$T: E \longrightarrow E$$

Se dice que T es una transformación geométrica de E, si la aplicación T es biyectiva.

- A los puntos A y B tales que T(A) = B se les llama **puntos homólogos** por la transformación T. En particular, si T(A) = A, entonces se dice que A es un **punto doble o invariante**.

- Se dice que un subconjunto $E' \subset E$ es **invariante** por la transformación geométrica T, si T(E') = E'.

2.2 Definición de Movimiento

Se llama **movimiento o isometría** a toda transformación geométrica T que conserva las distancias, es decir, para cualquier par de puntos A y B de E se verifica

$$d(A, B) = d(T(A), T(B))$$

2.3 Aplicación vectorial asociada a un movimiento

Sea T un movimiento de E ($T: E \to E$) entonces su aplicación vectorial asociada del espacio vectorial euclídeo V en sí mismo ($f: V \to V$) verifica:

i. f conserva el producto escalar

ii. f es lineal

iii. f es biyectiva

Estas aplicaciones f reciben el nombre de **transformaciones ortogonales** de V. Tienen importantes propiedades, una de ellas es transformar bases ortonormales en bases ortonormales.

2.4 Ecuación matricial de una transformación ortogonal

Sea f una transformación ortogonal y $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base ortonormal de V.

Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las coordenadas de un vector $\vec{u} \in V$ y $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ las de su transformado $f(\vec{u}) \in V$, respecto de la base B.

Sean (a_{i1}, a_{i2}, … , a_{in}) las coordenadas de los transformados de los vectores de la base, es decir, de $f(\vec{e}_i)$, i = 1, 2, … , n respecto de la base B. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . \; . \; . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & . \; . \; . & a_{n2} \\ . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . \; . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . \; . \; . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

que es la **ecuación matricial de la transformación ortogonal f**.

Abreviadamente escribiremos X' = M·X, donde M es la matriz asociada a f.

A estas matrices se les llama **matrices ortogonales** y se caracterizan por cumplir que $M^{-1} = M^t$.

2.5 Ecuación matricial de un movimiento

Fijaremos, desde ahora en adelante, una referencia ortonormal R.

Designaremos: T a un movimiento de E, f la transformación ortogonal de V asociada a T, M la matriz ortogonal de f respecto de cierta base ortonormal, el subespacio vectorial de vectores invariantes por f y $\Im$ la variedad lineal de puntos invariantes por T.

Hay que distinguir dos casos:

➢ Si el movimiento tiene puntos invariantes, la ecuación vectorial del movimiento es de la forma:

$$\mathbf{X' = C + M\,\overrightarrow{CX}}, \text{ donde}$$

- C es un punto invariante o doble, es decir T(C) = C.
- M es la matriz que define la transformación ortogonal f asociada a T.
- X es un punto genérico de E.
- X' es el punto transformado de X mediante T, es decir T(X) = X'.

Operando y simplificando en la ecuación vectorial:

$\mathbf{X' = C + M\,\overrightarrow{CX}} \Leftrightarrow X' = C + M(X - C) \Leftrightarrow X' = C + MX - MC \Leftrightarrow$

$X' = (C - MC) + MX \Leftrightarrow \mathbf{X' = O' + MX}$ (1)

Obsérvese: C – MC = O' = T(O) (transformado del origen)

- Si el movimiento no tiene puntos invariantes, en este caso la ecuación vectorial del movimiento es de la forma: $\mathbf{X' = C' + M\ \overrightarrow{CX}}$, donde

  - C' es el transformado de un punto cualquiera de E, es decir T(C) = C'.
  - C' se puede expresar como C + $\vec{u}$ (por definición de espacio afín).
  - M es la matriz que define la transformación ortogonal f asociada a T.
  - X es un punto genérico de E.
  - X' es el punto transformado de X mediante T, es decir T(X) = X'.

  Operando y simplificando en la ecuación vectorial:

  $$\mathbf{X' = C' + M\ \overrightarrow{CX} \Leftrightarrow X' = C + M\ \overrightarrow{CX}} + \vec{u}$$

  siendo $\vec{u}$ el vector de traslación ($\vec{u} = \overrightarrow{CC'}$).

  Simplificando: $X' = C + M\,(X - C) + \vec{u} \Leftrightarrow X' = C + M\,X - M\,C + \vec{u}$

  $X' = (C - M\,C + \vec{u}) + M\,X \Leftrightarrow \mathbf{X' = O' + M\,X}$ (3)

  Obsérvese: $C - MC + \vec{u} = O' = T(O)$ (transformado del origen)

2.6 Movimiento directo e inverso

Los movimientos, según el determinante de la matriz ortogonal M, se clasifican en la forma siguiente:

T es un movimiento directo $\Leftrightarrow$ $|\mathbf{M}| = \mathbf{1}$ (conserva la orientación de las figuras)

T es un movimiento inverso $\Leftrightarrow$ $|\mathbf{M}| = \mathbf{-1}$ (invierte la orientación de las figuras)

3. Homotecias

3.1 Definición de homotecia

Se llama homotecia de centro C y razón k ($k \neq 0, 1$), y se designa por $H_{(C,\,k)}$, a la transformación geométrica del espacio afín euclídeo E en sí mismo

$$E \xrightarrow{H_{(C,k)}} E$$

$$A \longrightarrow A'$$

que asocia a cada punto A de E el punto A' que cumple la condición $\overrightarrow{CA'} = k\,\overrightarrow{CA}$

- Las homotecias transforman segmentos en segmentos proporcionales de razón k, por tanto no conservan las distancias.
- La matriz asociada a una homotecia es de la forma $(k\cdot I_n)$, donde I_n es la matriz unidad de orden n.
- La homotecia se llama **directa** si la razón es positiva; en caso contrario, se dice que la homotecia es **inversa**.

El centro de la homotecia es el único punto invariante.

Fig. 1 Homotecia directa

3.2 Ecuación de una homotecia

Sea R un sistema de referencia ortonormal y $H_{(C,\,k)}$ una homotecia de centro C y razón k.

Sea X un punto arbitrario del espacio afín E y sea X' su transformado por la homotecia $H_{(C,\,k)}$. La ecuación vectorial de la homotecia $H_{(C,\,k)}$ es:

$$\mathbf{X' = C + (k\,I_n)\,\overrightarrow{CX}},$$

3.3 Composición o producto de aplicaciones

Es una operación entre aplicaciones. Para hallar la imagen de un elemento x en la aplicación compuesta de g y f, hay que aplicar primero f, hallando f(x), y luego a este resultado hay que aplicarle g llegándose a g[f(x)].

La aplicación compuesta se representa $g \circ f$, por tanto:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Matriz asociada a una composición o producto de aplicaciones es el producto de las matrices asociadas a cada una de las aplicaciones, es decir:

$$M_{g\circ f} = M_g \cdot M_f$$

4. Semejanzas

4.1 Definición de semejanza

Se llama semejanza a toda transformación geométrica S del espacio afín euclídeo E en sí mismo, tal que, para cualesquiera A, B $\in$E se verifica que:

$$d(S(A),S(B)) = k\ d(A,B), \text{ con } k > 0$$

Se demuestra que toda semejanza de razón k (k > 0) es la composición o producto de una homotecia de razón k y de un movimiento o viceversa.

- La razón de la semejanza siempre es positiva.
- La matriz asociada a una semejanza es de la forma $M = k \cdot Q$, donde Q es una matriz ortogonal.
- $S_{(C,k)}$ es una semejanza directa si el determinante de su matriz asociada, $|M| = |k.Q|$, es positivo.
- $S_{(C,k)}$ es una semejanza inversa si el determinante de su matriz asociada, $|M| = |k.Q|$, es negativo.

Fig. 2 Semejanza

4.2 Ecuación de una semejanza

Sea R un sistema de referencia ortonormal y $S_{(C,k)}$ una semejanza de centro C y razón k.

Sea X un punto arbitrario del espacio afín E y sea X' el punto transformado por la semejanza $S_{(C,k)}$. La ecuación vectorial de la semejanza $S_{(C,k)}$ es:

$$\mathbf{X' = C + (kQ)\overrightarrow{CX}}$$

Capítulo 2

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

1. Movimientos en el plano

1.1 Descripción general

Sea T un movimiento en el plano E_2, f su transformación ortogonal asociada de V_2, M la matriz que define f respecto de cierta base ortonormal, F el subespacio de vectores invariantes por f y $\Im$ la variedad lineal de puntos invariantes por T.

Existen dos tipos de matrices ortogonales M en E_2**:**

⇨ **Caso 1: Matriz asociada a movimientos directos.**

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ donde } |M| = 1 \qquad (6)$$

⇨ **Caso 2: Matriz asociada a movimientos inversos.**

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ donde } |M| = -1 \qquad (7)$$

1.2 Clasificación de movimientos

1.2.1 Identidad

- *Elementos característicos*: Todos los puntos del plano son invariantes.
- *Ecuaciones*: X'= O+M X $\Leftrightarrow \overline{X'} = N\ \overline{X}$, es decir.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (9)$$

1.2.2 Simetría axial

Sea r una recta fija del plano y X un punto cualquiera del plano. Geométricamente, se llama simétrico del punto X, respecto de la recta r, al punto X' tal que r es la mediatriz del segmento $\overline{XX'}$.

La simetría axial de eje la recta r es la transformación geométrica del plano que asocia a cada punto X su simétrico respecto de r.

La simétrica de una figura F es otra figura F' tal que los pares de segmentos homólogos miden igual y los ángulos correspondientes son de igual amplitud pero de sentido contrario.

Las simetrías axiales conservan la forma y el tamaño, pero cambia la orientación; **son movimientos inversos del plano**.

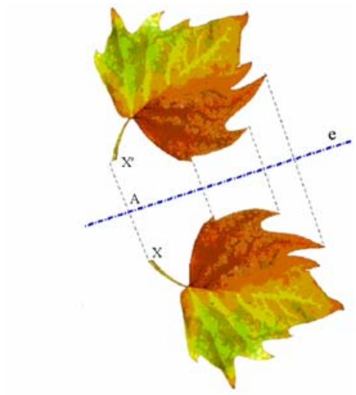


Fig. 3 Simetría axial

- *Elemento característico*: El eje de simetría (conjunto de puntos invariantes).

- *Ecuaciones*: X' = A + M (X – A) ⇔X'= T(O) + M X ⇔ $\overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto cualquiera del eje de simetría (punto doble) y T(O) es el transformado del origen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \qquad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (11)$$

siendo (c, d) las coordenadas del transformado del origen T(O).

1.2.3 Giro

Geométricamente, se llama giro de centro A y amplitud α, a toda transformación geométrica del plano que hace corresponder a cualquier punto X otro punto X' tal que $X\hat{A}X' = \alpha$.

Los segmentos AX y AX' tienen igual longitud

Los giros conservan la forma, el tamaño y la orientación; son **movimientos directos del plano**

La composición de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro y cuya amplitud es la suma de las amplitudes

Fig. 4 Giro

- *Elementos característicos*: El centro del giro (un único punto doble) y el ángulo de giro.

- *Ecuaciones*: $X' = A + M(X - A) \Leftrightarrow X' = T(O) + M\,X \Leftrightarrow \overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es el centro de giro y T(O) es el transformado del origen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ d & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (13)$$

siendo (c,d) las coordenadas del transformado del origen T(O).

1.2.4 Traslación

Geométricamente, se llama traslación de vector $\vec{v}$ a toda transformación geométrica del plano que hace corresponder a cualquier punto X otro punto X' tal que $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$.

Las traslaciones conservan la forma, el tamaño y la orientación de las figuras. Son **movimientos directos del plano**.

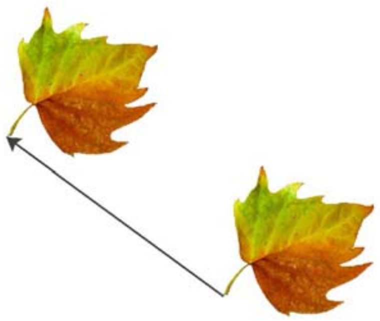


Fig. 5 Traslación

- *Elementos característicos*: El vector de traslación (no hay puntos dobles) .

- *Ecuaciones*: $X' = X + \vec{u} \Leftrightarrow X' = T(O) + I\,X \Leftrightarrow \overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto cualquiera y T(O) es el transformado del origen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (15)$$

siendo $\vec{u} = (a, b)$ las coordenadas del transformado del origen T(O).

$\boxed{1.2.5}$ Simetría deslizante

Toda simetría deslizante se descompone en el producto (o composición) de una traslación y una simetría axial (o viceversa) cuyo eje de simetría es paralelo al vector de la traslación

Las simetrías deslizantes conservan la forma y el tamaño pero cambian la orientación de las figuras. Son **movimientos inversos del plano**

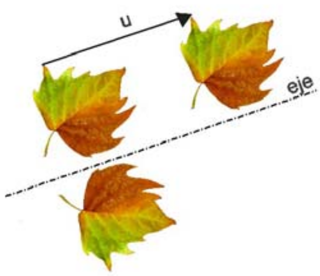


Fig. 6 Simetría deslizante

- *Elementos característicos*: El eje de la simetría y el vector de traslación (no tiene puntos dobles).

- *Ecuaciones*: X' = A + M (X – A) + $\vec{u}$ ⇔ X'= T(O) + M X + $\vec{u}$ ⇔ $\overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto cualquiera del eje de la simetría, T(O) es el transformado del origen, $\vec{u}$ es el vector de la traslación y M es la matriz asociada a la simetría pues:

$$M_{T_{\vec{u}} \circ S_e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (16)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ d & \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (17)$$

siendo (c, d) las coordenadas del transformado del origen T(O).

1.3 Procedimiento para clasificar movimientos y calcular sus elementos.

Para clasificar un movimiento en E_2, conocida su ecuación matricial, se darán los siguientes pasos:

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: M M^t = I y si se verifica esta condición, se sigue con el paso 2.

2. **Calcular el determinante de M**. Pueden ocurrir dos casos:

Caso 1: $|M| = 1 \Rightarrow$ se trata de un movimiento directo y puede ser:

i. Identidad I_{E_2}

ii. Giro $G_{(A,\alpha)}$

iii. Traslación $T_{\vec{u}}$

Caso 2: $|M| = -1 \Rightarrow$ se trata de un movimiento inverso y puede ser:

iv. Simetría axial S_e

v. Simetría deslizante $S_{(e,\ \vec{u})}$

3. Estudiar el tipo de movimiento:

- Si $M = I_2$, entonces el movimiento es la Identidad o una Traslación.

- Si $M \neq I_2$, se calcula el conjunto de puntos dobles y si no hubiera se calcula el subespacio de vectores invariantes.

El conjunto de puntos dobles es la solución de la ecuación:

$$N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\,\overline{X} = O$$

El subespacio de vectores invariantes es la solución de la ecuación:

$$M\,X = X \Leftrightarrow (M - I)\,X = O$$

La matriz N – I es de la forma:

$$N - I = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline T(O) & M - I \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la ecuación $(N - I)\,\overline{X} = O$ tiene como matriz ampliada es (N – I) y como matriz de los coeficientes (M - I), en consecuencia, aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius para estudiar su solución, es decir, calculamos los rangos de las matrices (M – I) y (N –I).

Los casos que se pueden presentar son los siguientes:

➔ **Movimientos con puntos dobles**

1º. Si rg(M – I) = rg (N – I) = 0, el sistema es compatible indeterminado; es decir, todos los puntos del plano son dobles, luego el movimiento es la **IDENTIDAD.**
La identidad se identifica inmediatamente ya que su matriz $N = I_3$ y no es preciso aplicar el procedimiento general.

2º. Si rg(M - I) = rg (N – I) = 1 < 2, el sistema es compatible indeterminado; al resolver el sistema, nos queda una sola ecuación independiente que geométricamente representa una recta afín, en consecuencia, cualquier punto de la recta es doble y el movimiento es una **SIMETRÍA AXIAL.**

Cálculo del elemento característico de la simetría axial:

- **Eje de la simetría axial:** es la recta obtenida al resolver $(N - I)\,\overline{X} = 0$.

3º. Si rg (M - I) = rg (N – I) = 2, el sistema es compatible determinado; al resolver el sistema nos dará una única solución. Geométricamente representa un punto doble, y el movimiento es una **ROTACIÓN** o **GIRO.**

Cálculo de los elementos característicos de la rotación o giro:

- **Centro de giro:** es el punto doble obtenido al resolver (N – I) $\overline{X} = 0$.
- **Ángulo de giro:** se obtiene igualando la matriz dada M con la matriz de giro $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

➔ **Movimientos sin puntos dobles**

4º. Si rg(M - I) = 0 y rg (N – I) = 1, el sistema es incompatible y todos los vectores del plano son invariantes por ser rg(M – I) = 0. El movimiento es una **TRASLACIÓN**
La traslación se identifica inmediatamente ya que su matriz asociada $M = I_2$ y no es preciso aplicar el procedimiento general.

Cálculo del elemento característico de la Traslación:

- **Vector de traslación:** Sus coordenadas coinciden con las de T(O).

5º. Si rg(M - I) = 1, rg (N – I) = 2, el sistema es incompatible y el subespacio de vectores invariantes es una recta vectorial por ser rg(M – I) = 1. El movimiento es una **SIMETRÍA DESLIZANTE**.

Cálculo de los elementos característicos de la simetría deslizante:

- **Vector de traslación:** sus coordenadas se calculan como sigue:
  - Se calcula el transformado del origen, T(O)= O’.
  - Se halla el punto medio P del segmento $\overline{OO'} \Rightarrow P = \dfrac{O+O'}{2}$.
  - Se calcula el transformado de P, T(P) = P’.

  El vector $\vec{u} = \overline{PP'}$ es el vector de traslación de la simetría deslizante.

- **Eje de la simetría:** es la recta que pasa por el punto $P = \dfrac{O+O'}{2}$ y su dirección es la recta vectorial solución de (M – I) X = 0**.**

1.4 Procedimiento para calcular las ecuaciones de un movimiento dados sus elementos característicos.

1.4.1 Traslación

- *Elemento característico*:
  - vector de traslación $\vec{u} = (a, b)$.

- *Ecuaciones*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (19)$$

1.4.2 Giro

- *Elementos característicos*:
  - Centro del giro C(a,b)
  - el ángulo de giro α.

- *Ecuaciones*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ d & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (21)$$

1.4.3 Simetría axial

- *Elemento característico*:
  - Eje de simetría: $(x, y) = (a, b) + \lambda\,(u, v)$

- *Ecuaciones*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (23)$$

El ángulo α se obtiene a partir de las coordenadas del vector director del eje de simetría pues sabemos que su pendiente es:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u} \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$$

1.4.4 Simetría deslizante

- *Elementos característicos*:
  - Eje de simetría: $(x, y) = (a, b) + \lambda\ (u, v)$
  - Vector de traslación $\vec{u} = (u, v)$

- *Ecuaciones*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (24)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ d & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (25)$$

El ángulo α se obtiene a partir de las coordenadas del vector director del eje de simetría pues sabemos que su pendiente es:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u} \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$$

2. Homotecias y semejanzas en el plano

2.1 Homotecia en el plano

Se llama homotecia de centro C y razón k ($k \neq 0, 1$), y se designa por $H_{(C,\,k)}$, a la transformación geométrica del plano afín euclídeo E_2 en sí mismo.

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{H_{(C,k)}} & E_2 \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

que asocia a cada punto A de E_2 el punto A' de E_2 que cumple la condición $\overrightarrow{CA'} = k\ \overrightarrow{CA}$

- Si la razón $k > 0$ se dice que la homotecia es directa.
- Si la razón $k < 0$ se dice que la homotecia es inversa.
- Si la razón $k = -1$ es una simetría central de centro C.
- Si $k = 1$ se trataría de la identidad o una traslación.

- *Elementos característicos*: El centro de la homotecia (un único punto doble) y la razón k de la homotecia.

- *Ecuaciones*:
  La ecuación vectorial de la homotecia de centro C y razón k, $H_{(C,\,k)}$ es:

$X' = C + (k\cdot I)\ \overrightarrow{CX} \;\Leftrightarrow X' = C(1-k) + kIX \Leftrightarrow \overline{X'} = N\ \overline{X}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a-ak & k & 0 \\ b-bk & 0 & k \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (27)$$

donde $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a-ak & k & 0 \\ b-bk & 0 & k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$, siendo $M = k\cdot I_2$

2.2 Procedimiento para clasificar homotecias y calcular sus elementos.

Para clasificar una homotecia en E_2, conocida su ecuación matricial, se darán los siguientes pasos:

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$.

2. **Si $M = k\cdot I_2$** , con $k \neq 0, 1$, es decir, si M es una matriz escalar, la transformación es una homotecia afín de razón k.

   a) Si k es un número real positivo $\Rightarrow$ homotecia directa.

   b) Si k es un número real negativo $\Rightarrow$ homotecia inversa.

   c) Si $k = -1$, se trata de una simetría central.

   Cálculo de los elementos característicos de la homotecia:

   - **Centro de homotecia:** es el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.
   - **Razón de la homotecia:** es el número real k tal que $M = k\cdot I_2$.

2.3 Procedimiento para calcular las ecuaciones de una homotecia dados sus elementos característicos.

- *Elementos característicos:*
  - Centro de la homotecia: C (a, b).
  - Razón de la homotecia: k
- *Ecuaciones:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a - ak & k & 0 \\ b - bk & 0 & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (29)$$

2.4 Semejanzas en el plano

Se demuestra que toda semejanza S de razón k es la composición o producto de una homotecia y un movimiento.

- Si k =1, se trata de un movimiento en el plano
- Si k ≠ 1, entonces existe un único punto doble C que se llama centro de la semejanza y en este caso la semejanza se puede descomponer de forma única y conmutativa en el producto de una homotecia de centro C y razón k y un movimiento que deja invariante al punto C. Esta descomposición se denomina descomposición canónica de la semejanza.

  Las semejanzas en el plano pueden ser:

  1. **Semejanza directa:** es el producto de una homotecia, $H_{(C,\,k)}$, y de un giro, $G_{(C,\,\alpha)}$, (o viceversa).
     - *Elementos característicos*: el centro C de la semejanza (un único punto doble), la razón k de la semejanza y el ángulo α del giro.
  2. **Semejanza inversa:** es el producto de una homotecia, $H_{(C,\,k)}$, y una simetría axial, S_e, (o viceversa).
     - *Elementos característicos*: el centro C de la semejanza (un único punto doble), la razón k de la semejanza y el eje e' de la semejanza (e es la recta que pasa por el centro y es paralela al eje e de la simetría axial).

2.5 Procedimiento para clasificar semejanzas y calcular sus elementos.

Para clasificar una semejanza en E_2, conocida su ecuación matricial, se darán los siguientes pasos:

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$.

2. **Si $M \cdot M^t = p \cdot I_n$,** es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k = \sqrt{p}$ y la matriz $Q = \frac{1}{k} \cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

a. Si $|M| = |kQ| > 0$, la semejanza es directa (el movimiento es un giro)

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\,\overline{X} = 0$.
- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^2 = \det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M \cdot M^t = p \cdot I_2$.
- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula haciendo:

$$M = kQ = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\,\text{sen}\,\alpha \\ k\,\text{sen}\,\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ o bien, } Q = \frac{1}{k} M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

b. Si $|M| = |kQ| < 0$, la semejanza es inversa (el movimiento es una simetría axial)

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\,\overline{X} = 0$.
- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^2 = -\det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M \cdot M^t = p \cdot I_2$.
- **Eje de la semejanza:** es la recta que pasa por el centro C y su dirección es la solución de la ecuación: $Q \cdot X = X \Leftrightarrow (Q - I)X = 0$

2.6 Procedimiento para calcular las ecuaciones de una semejanza dados sus elementos característicos.

1. Semejanza directa

- *Elementos característicos*:
  - Centro de la semejanza: C (a, b).
  - Razón de la semejanza: k
  - Ángulo de la semejanza: α

- *Ecuaciones:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \qquad (30)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & k\cos\alpha & -k\,\text{sen}\,\alpha \\ d & k\,\text{sen}\,\alpha & k\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (31)$$

2. Semejanza inversa

- *Elementos característicos*:
  - Centro de la semejanza: C (a, b).
  - Razón de la semejanza: k
  - Eje de la semejanza de la semejanza: $e \equiv (x, y) = (a, b) + \lambda\,(u, v)$

- *Ecuaciones:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \qquad (32)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c & k\cos\alpha & k\,\text{sen}\,\alpha \\ d & k\,\text{sen}\,\alpha & -k\cos\alpha \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad (33)$$

El cálculo del ángulo α, se hace con el vector director del eje de simetría ya que la pendiente es igual a $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u} \Rightarrow \text{arc tg}\,\frac{v}{u} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\,\text{arc tg}\,\frac{v}{u}$

Capítulo 3

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL ESPACIO

1. Movimientos en el espacio

1.1 Descripción general

Sea T un movimiento de E_3, f su transformación ortogonal de V_3 asociada, M la matriz de orden 3 que define f respecto de cierta referencia ortonormal R, F el subespacio de vectores invariantes por f, y $\Im$ la variedad lineal de puntos invariantes (dobles) por T.

Para cada movimiento T la matriz ortogonal asociada M depende de la base ortonormal que se tome, por este motivo se irán definiendo en cada caso.

La clasificación de los movimientos en el espacio, según la dimensión del subespacio de puntos invariantes, es la siguiente:

1.2 Clasificación de movimientos

1.2.1. Identidad

Dim$\Im$ = 3. Todos los puntos del espacio son invariantes, es decir, T(A) = A para cualquier punto A del espacio.
Es un movimiento directo.

- *Elementos característicos*: Todos los puntos del espacio son invariantes.
- *Ecuaciones*: X' = X.

La ecuación respecto la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (35)$$

1.2.2. Simetría especular

Dim$\Im$ = 2. El conjunto de puntos invariantes es un plano π denominado plano de la simetría.

Geométricamente el simétrico de un punto P respecto al plano π es el punto P' obtenido de modo que el segmento PP' sea perpendicular a π y su punto medio O, se halle en π.

Es un movimiento inverso del espacio.

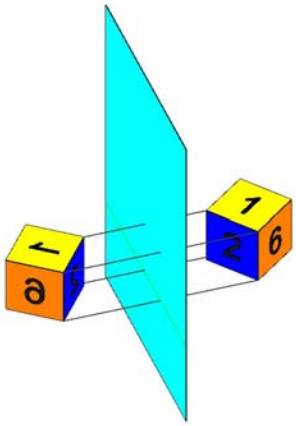


figura 7. Simetría especular

Obsérvese que no conserva la orientación de las figuras.

- *Elemento característico*: El plano de simetría (conjunto de puntos invariantes).

- *Ecuaciones*: X' = A + M (X – A) ⇔X'= T(O) + M X ⇔ $\overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto cualquiera del plano π de la simetría (punto doble) y T(O) es el transformado del origen.

  Sea B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal tal que $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \pi$ y $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$.

  La matriz asociada respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Y respecto de la base canónica es M = $P \cdot M_B \cdot P^{-1}$, donde P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica (P tiene por columnas las coordenada de los vectores de la base B respecto de la base canónica).

  Luego la ecuación de la simetría especular respecto de la referencia canónica es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \quad (36)$$

siendo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ las coordenadas de un punto A del plano invariante.

$\boxed{1.2.3.}$ Giro o rotación:

Dim$\Im$ = 1. El conjunto de puntos dobles es una recta e, denominada eje de rotación.

Geométricamente, la rotación de amplitud α y eje e, es toda transformación geométrica del espacio que hace corresponder a cualquier punto A otro punto A’ tal que:

a) El punto A’ se encuentra en el plano π que contiene a A y es perpendicular al eje de rotación.
b) Los puntos A y A’ equidistan del eje de rotación, es decir, d(O, A) = d(O, A’) siendo O el punto de intersección del plano π con el eje e.
c) El diedro de eje e, cuyas caras son los semiplanos que contienen a los puntos A y A’ vale α.

Es un **movimiento directo.**

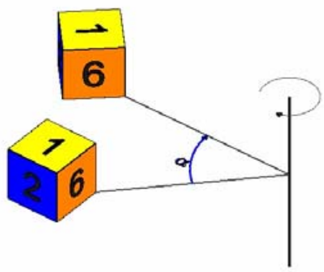


figura 8. Giro

- *Elementos característicos*: El eje de la rotación y el ángulo de giro.

- *Ecuaciones*: X’ = A + M (X – A) ⇔X’= T(O) + M X ⇔ $\overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto del eje y T(O) es el transformado del origen.

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal tal que $\vec{u}_1 \in$ Eje , $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in$ Plano $\perp$ eje y $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$.

La matriz asociada respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Y respecto de la base canónica es $M = P \cdot M_B \cdot P^{-1}$, donde P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica (P tiene por columnas las coordenada de los vectores de la base B respecto de la base canónica).

Luego la ecuación de la rotación respecto de la referencia canónica es:

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \qquad (37)$$

siendo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ las coordenadas de un punto A cualquiera del eje de rotación.

$\boxed{1.2.4.}$ Simetría rotacional:

$\text{Dim}\,\Im = 0$. Hay un único punto doble, denominado centro de simetría.

Es la composición, o producto, de una simetría especular y un giro (o viceversa), donde el plano π de la simetría y el eje e de la rotación son perpendiculares.

Es un **movimiento inverso.**

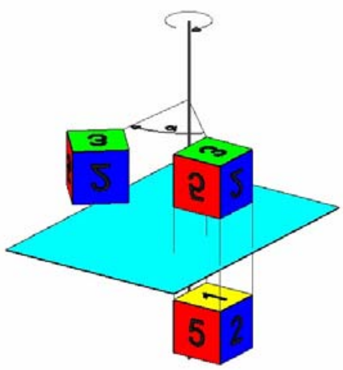


figura 9. Simetría rotacional

- *Elementos característicos*: El centro de simetría (un único punto doble), plano de simetría, eje de rotación y ángulo de giro.

- *Ecuaciones*: X' = A + M (X – A) ⇔X'= T(O) + M X ⇔ $\overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es el centro de giro y T(O) es el transformado del origen.

  A es la intersección del plano de simetría con el eje de rotación.

  Sea $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal tal que $\vec{u}_1 \in$ Eje , $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in$ Plano y $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$.

  La matriz asociada respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

  Y respecto de la base canónica es $M = P{\cdot}M_B{\cdot}P^{-1}$, donde P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica (P tiene por columnas las coordenada de los vectores de la base B respecto de la base canónica).

  Luego la ecuación de la simetría rotacional respecto de la referencia canónica es:

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P{\cdot}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}{\cdot}P^{-1}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \qquad (38)$$

  siendo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ las coordenadas del centro A de la simetría.

En el caso particular de que el ángulo de giro es de 180º, se trata de la simetría central:

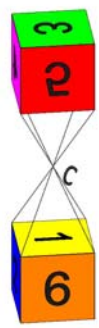


figura 10. Simetría central

1.2.5. Traslación:

No hay puntos dobles.

Geométricamente, se llama traslación de vector $\vec{v}$ a toda transformación geométrica del espacio que hace corresponder a cualquier punto X otro punto X' tal que: $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$. Es un **movimiento directo del plano**.

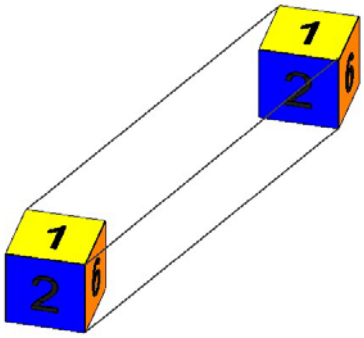


figura 11 Traslación

- *Elemento característico*: El vector de traslación (no hay puntos dobles).

- *Ecuaciones*: $X' = X + \vec{u} \Leftrightarrow X' = T(O) + I\,X \Leftrightarrow \overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto cualquiera y T(O) es el transformado del origen.

Respecto de cualquier referencia R.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (39)$$

Siendo $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vector de traslación.

Otra forma de expresar la ecuación de la traslación es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (40)$$

1.2.6. Simetría deslizante

No hay puntos dobles.

Es la composición, o producto, de una traslación y una simetría especular (o viceversa) cuyo plano de simetría es paralelo al vector de la traslación.
Es un **movimiento inverso.**

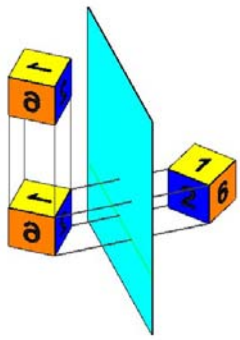


figura 12 Simetría deslizante

- *Elementos característicos*: El plano de la simetría y el vector de traslación (no tiene puntos dobles).

- *Ecuaciones*: $X' = A + M\,(X - A) + \vec{u} \Leftrightarrow X' = T(O) + M\,X + \vec{u} \Leftrightarrow \overline{X'} = N\,\overline{X}$, donde A es un punto cualquiera del plano de la simetría, T(O) es el transformado del origen, $\vec{u}$ es el vector de la traslación y M es la matriz asociada a la simetría.

  Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal tal que $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \pi$ y $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$.

  La matriz asociada respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Y respecto de la base canónica es $M = P \cdot M_B \cdot P^{-1}$, donde P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica (P tiene por columnas las coordenada de los vectores de la base B respecto de la base canónica).

  Luego la ecuación de la simetría deslizante respecto de la referencia canónica es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad (41)$$

siendo $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ las coordenadas del vector de la traslación.

1.2.7. Movimiento helicoidal

No hay puntos dobles.

Es la composición, o el producto, de una traslación y una rotación (o viceversa) tal que el vector de traslación es paralelo al eje de rotación.
Es un **movimiento directo.**

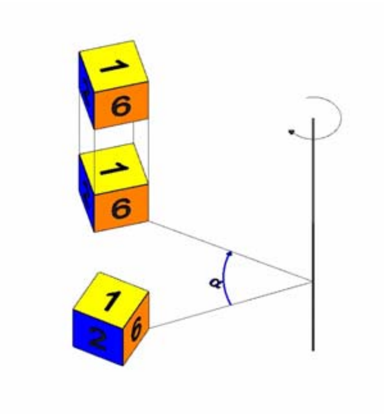


figura 13 Movimiento helicoidal

- *Elementos característicos*: El eje de la rotación, el ángulo y el vector de traslación (no tiene puntos dobles).

- *Ecuaciones*: X' = A + M (X – A) + $\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ X'= T(O) + M X + $\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{X'} = N\ \overline{X}$, donde A es un punto cualquiera del eje de la rotación, T(O) es el transformado del origen, $\vec{u}$ es el vector de la traslación y M es la matriz asociada a la rotación.

  Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal tal que $\vec{u}_1 \in$ Eje, $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in$ Plano $\perp$ Eje y $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$.

  La matriz asociada a la rotación respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ 0 & \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Y respecto de la base canónica es $M = P \cdot M_B \cdot P^{-1}$, donde P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica (P tiene por columnas las coordenada de los vectores de la base B respecto de la base canónica).

Luego la ecuación del movimiento helicoidal respecto de la referencia canónica es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad (42)$$

siendo $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ las coordenadas del vector de la traslación.

1.3 Procedimiento para clasificar movimientos y calcular sus elementos

Para clasificar un movimiento en E_3, conocida su ecuación matricial, se darán los siguientes pasos:

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M \cdot M^t = I$ y si se verifica esta condición, se sigue con el paso 2.

2. **Calcular el determinante de M**. Pueden ocurrir dos casos:

Caso 1: $|M| = 1 \Rightarrow$ se trata de un movimiento directo y puede ser:

- **i.** Identidad I_{E_3}
- **ii.** Giro $G_{(e,\alpha)}$
- **iii.** Traslación $T_{\vec{u}}$
- **iv.** Movimiento helicoidal $G_{(e,\alpha)} \circ T_{\vec{u}}$, con $e \parallel \vec{u}$.

Caso 2: $|M| = -1 \Rightarrow$ se trata de un movimiento inverso y puede ser:

- **i.** Simetría especular S_π
- **ii.** Simetría rotacional $S_\pi \circ G_{(e,\alpha)}$, con $e \perp \pi$.
- **iii.** Simetría deslizante $S_\pi \circ T_{\vec{u}}$, con $\pi \parallel \vec{u}$.

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

- Si $M = I_3$, entonces el movimiento es la Identidad o una Traslación.

- Si $M \neq I_3$, se calcula el conjunto de puntos dobles y si no hubiera se calcula el subespacio de vectores invariantes.

  El conjunto de puntos dobles es la solución de la ecuación:

$$N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\,\overline{X} = O$$

  El subespacio de vectores invariantes es la solución de la ecuación:

$$M\,X = X \Leftrightarrow (M - I)\,X = O$$

  La matriz $N - I$ es de la forma:

$$N - I = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline T(O) & M - I \end{array}\right)$$

  El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la ecuación matricial $(N - I)\,\overline{X} = O$ tiene como matriz ampliada $(N - I)$ y como matriz de los coeficientes $(M - I)$, en consecuencia, se aplica el teorema de Rouché-Fröbenius para estudiar su solución, es decir, calculamos los rangos de las matrices $(M - I)$ y $(N - I)$.

  Los casos que se pueden presentar son los siguientes:

➔ **Movimientos con puntos dobles**

1º. Si $rg(M - I) = rg\,(N - I) = 0$, el sistema es compatible indeterminado; es decir, todos los puntos del espacio son dobles, luego el movimiento es la **IDENTIDAD** (pág.21).
La identidad se identifica inmediatamente ya que su matriz $N = I_4$ y no es preciso aplicar el procedimiento general.

2º. Si $rg(M - I) = rg\,(N - I) = 1 < 3$, el sistema es compatible indeterminado; al resolver el sistema, nos queda una sola ecuación independiente que geométricamente representa un plano afín, en consecuencia, cualquier punto del plano es doble y el movimiento es una **SIMETRÍA ESPECULAR** (pág.22). El plano de puntos dobles es el plano de la simetría especular

Cálculo del elemento característico de la simetría especular:

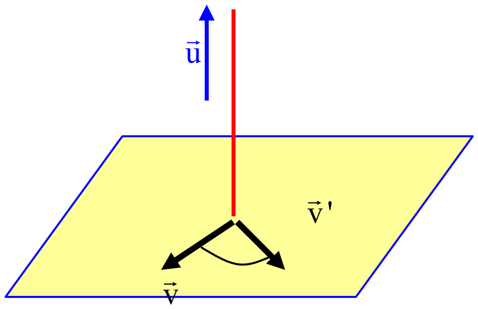
- **Plano de la simetría especular:** es el plano obtenido al resolver la ecuación $(N - I)\,\overline{X} = 0$.

3º. Si rg (M - I) = rg (N – I) = 2 < 3, el sistema es compatible indeterminado; al resolver el sistema nos dará dos ecuaciones independientes que geométricamente representan una recta afín, en consecuencia, cualquier punto de la recta es doble y el movimiento es una **ROTACIÓN** o **GIRO EN E_3** (pág.23). La recta de puntos dobles es el **eje de rotación.**

Cálculo de los elementos característicos de la rotación o giro:

- **Eje de giro:** es la recta obtenida al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.
- **Ángulo de giro:** se calcula igualando la traza de la matriz M dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza } M = \text{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1 + 2\cos\alpha$$



Siempre hay dos valores "+" y "-" para α.
Para elegir la solución correcta se dan los pasos siguientes:

a. Se toma un vector director del eje: $\vec{u}$, por ejemplo.
b. Se toma un vector $\vec{v}$ perpendicular al vector $\vec{u}$.
c. Se calcula el transformado de $\vec{v}$:

$$T(\vec{v}) = M\cdot\vec{v} = \vec{v}\,'$$

d. Se calcula el producto vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{vmatrix} = \left(v_2v'_3 - v'_2\,v_3, -v_1v'_3 + v'_1\,v_3, v_1v'_2 - v'_1\,v_2\right)$$

este vector es proporcional al vector $\vec{u}$,

e. Si tiene el mismo sentido que $\vec{u}$ se toma el ángulo positivo, en caso contrario, se toma el ángulo negativo.

4º. Si rg(M - I) = rg (N – I) = 3, el sistema es compatible determinado y su solución geométricamente representa un punto del espacio, en consecuencia, hay un solo punto invariante y el movimiento es una **SIMETRÍA ROTACIONAL** (pág. 81). El punto doble es el **centro** de la simetría rotacional.

Cálculo de los elementos característicos de la simetría rotacional:

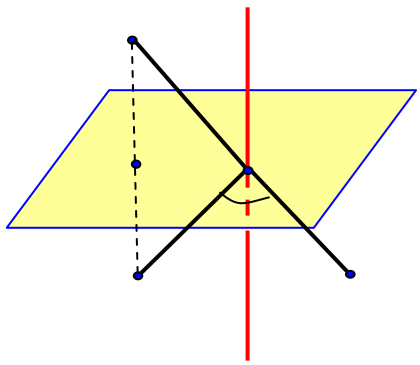
- **Centro de la simetría:** es el punto obtenido al resolver $(N - I)\overline{X} = 0$.
- **Plano de la simetría:** es el que pasa por el centro de la simetría A y su vector característico es $\langle\vec{u}\rangle$, donde $\langle\vec{u}\rangle$ es la solución de la ecuación $M\vec{x} = -\vec{x} \Leftrightarrow (M + I)\ \vec{x} = 0$.

- **Eje de giro:** es la recta que pasa por el centro de la simetría A y su vector director es $\langle \vec{u} \rangle$.

- **Ángulo de giro:** se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición de simetría rotacional, es decir:

$$\text{Traza M} = \text{Traza} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = -1 + 2\cos\alpha.$$

Igual que en la rotación hay dos valores "+" y "-" para α y para hallar la solución correcta se procede de igual forma .



Como se explica en la página 81, toda simetría rotacional se descompone en el producto, o composición, de una simetría especular y una rotación (o viceversa) cuyo eje de rotación es perpendicular al plano de la simetría y se verifica:

- El plano π de la simetría especular es perpendicular al eje e de giro.
- El punto invariante es la intersección del plano y el eje de giro.
- Todo vector paralelo al eje de rotación se transforma en su opuesto.
- Todo vector paralelo al plano de simetría se transforma en otro vector, de dicho plano, resultado de aplicar la rotación vectorial asociada.

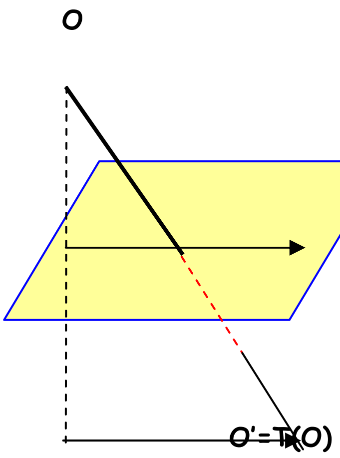
➔ **Movimientos sin puntos dobles**

5º. Si rg(M - I) = 0 y rg (N – I) = 1, el sistema es incompatible y todos los vectores del plano son invariantes por ser rg(M – I) = 0. El movimiento es una **TRASLACIÓN** (pág. 25)**.**

La traslación se identifica inmediatamente ya que su matriz asociada $M=I_3$ y no es preciso aplicar el procedimiento general.

Cálculo del elemento característico de la traslación:

- **Vector de traslación:** Sus coordenadas coinciden con las de T(O).



6º. Si rg(M - I) = 1, rg (N – I) = 2, el sistema es incompatible y el subespacio de vectores invariantes es una plano vectorial por ser rg(M – I) = 1. El movimiento es una **SIMETRÍA DESLIZANTE** (pág.26).

Cálculo de los elementos característicos de la simetría deslizante:

Vector de traslación: sus coordenadas se calculan como sigue:

- Se calcula el transformado del origen, T(O)= O'.
- Se halla el punto medio P del segmento $\overrightarrow{OO'} \Rightarrow P = \dfrac{O+O'}{2}$.
- Se calcula el transformado de P, T(P) = P'.

El vector $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$ es el vector de traslación de la simetría deslizante.

- **Plano de la simetría:** es el plano afín que pasa por el punto $P = \dfrac{O+O'}{2}$ y su dirección es la del plano de vectores invariantes, es decir, la solución de la ecuación $X = MX \Leftrightarrow (M - I)\, X = O$.

7º. Si rg(M - I) = 2; rg (N – I) = 3, el sistema incompatible, no hay puntos invariantes, pero como rg(M – I) = 2, el subespacio de vectores invariantes es una recta vectorial y este movimiento es un **MOVIMIENTO HELICOIDAL** (pág.28).

Cálculo de los elementos característicos del movimiento helicoidal:

- **Vector de la traslación:** es paralelo al eje de la rotación por lo que su dirección es la de la recta vectorial r solución de (M – I)X = O, y sus coordenadas se calculan como sigue:
  - Sea $\vec{v}$ un vector director de la recta r , entonces el vector de la traslación será de la forma $\vec{u} = t\,\vec{v}$, siendo t un número real que tenemos que calcular.
  - Por otro lado, por ser un movimiento helicoidal (que designamos por H) se verifica:

$$H = G_{(e,\alpha)} \cdot T_{\vec{u}} \Rightarrow G_{(e,\alpha)} = T_{-\vec{u}} \cdot H$$

Esta expresión nos da la ecuación del giro en función de t y, como el giro tiene una recta de puntos dobles, ha de ocurrir que la ecuación $N_{G(e,\alpha)}\, \underline{X} = \underline{X} \Leftrightarrow (N_{G(e,\alpha)} - I)\, \vec{X} = \vec{0}$ (*) tenga por solución una recta, es decir, $rg(N_{G(e,\alpha)} - I) = 2$, por lo que basta hacer 0 un determinante de orden 3 que contenga la columna de los términos independientes y dos columnas no proporcionales.

Desarrollando el determinante queda una ecuación lineal en t cuya solución $t = t_0$ es el número buscado, es decir, $\vec{u} = t_0 \vec{v}$ es el vector de la traslación.

- **Eje de giro:** es la recta afín solución de la ecuación (*) para $t = t_0$.
- **Ángulo de giro:** se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición de rotación, es decir:

$$\text{Traza } M = \text{Traza} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1 + 2\cos\alpha$$

Como ya se sabe hay dos soluciones "+" y "-" para α (ver pág. 32).

1.4 Procedimiento para calcular las ecuaciones de un movimiento dados sus elementos característicos

El cálculo de las ecuaciones de los movimientos en el espacio (excepto para los movimientos identidad y traslación), no es tan fácil como en el plano ya que las matrices asociadas a estos movimientos dependen de la base ortonormal B definida.

Para calcular las ecuaciones de cada movimiento respecto de la base canónica, se calculará, en primer lugar la matriz asociada M_B respecto de una base ortonormal B adecuada, que dependerá de los elementos del movimiento dado, y a continuación se hará un cambio de base para hallar la matriz M asociada respecto de la base canónica.

En cada caso se irá explicando en detalle

1.4.1. Traslación

- *Elemento característico*:
  - El vector de traslación $\vec{u} = (a, b, c)$.
- *Ecuaciones*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (43)$$

Otra forma de expresar la ecuación de la traslación es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (44)$$

1.4.2. Rotación o Giro

- *Elementos característicos*:
  - Eje de la rotación $e \equiv (x, y, z) = (a, b, c) + t\,(u, v, w)$
  - El ángulo de la rotación α.

- *Ecuaciones*:

  El cálculo de la ecuación de la rotación en el espacio, respecto de la **base canónica,** se realiza en los 3 pasos siguientes:

  1) Cálculo de la matriz M_B, asociada a la rotación respecto de una base adecuada $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortonormal y directa.

  El procedimiento es el siguiente:

  i) El vector $\vec{u}_1$ de B debe ser unitario y paralelo al eje. Es decir:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right)$$

  ii) El vector $\vec{u}_2$ debe ser unitario y perpendicular a $\vec{u}_1$, es decir, $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. Por ejemplo:

$$\vec{u}_2 = \left(\frac{-w}{\sqrt{u^2 + w^2}}, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + w^2}} \right)$$

  iii) El vector $\vec{u}_3$ debe ser unitario, perpendicular a $\vec{u}_1$ y a $\vec{u}_2$ y de forma que la base obtenida sea directa; luego, $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

  Por lo tanto, la matriz asociada a la rotación respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

  2) Cambio de la base B a la base canónica C:

  La matriz P de cambio de la base B a la base canónica C tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B calculadas previamente (que ya están referidas a la base canónica), es decir:

  La matriz M asociada a la rotación respecto la base canónica, se obtiene aplicando la fórmula:

$$M = P \cdot M_B \cdot P^{-1}$$

  (Recuérdese que las matrices asociadas al mismo movimiento respecto de dos bases distintas son semejantes).

  3) La ecuación de la rotación respecto de la base canónica es:

$$X' = A + M\,\overrightarrow{AX}$$

  siendo A es un punto cualquiera del eje e de rotación.

1.4.3. Simetría especular

- *Elemento característico*:
  - Plano de simetría: $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

- *Ecuaciones*:

  El cálculo de la ecuación de la simetría especular en el espacio respecto de la **base canónica** sigue un procedimiento análogo al empleado en el caso de la rotación:

  1) Cálculo de la matriz M_B, asociada a la simetría especular respecto de una base adecuada $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortonormal y directa.

  El procedimiento es el siguiente:

  i) El vector $\vec{u}_1$ debe ser unitario y perpendicular al plano de simetría. Es decir:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right)$$

  ii) El vector $\vec{u}_2$ debe ser unitario y perpendicular a $\vec{u}_1$, es decir, $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. Por ejemplo:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{-C}{\sqrt{A^2+C^2}}, 0, \frac{A}{\sqrt{A^2+C^2}} \right)$$

  iii) El vector $\vec{u}_3$ debe ser unitario, perpendicular a $\vec{u}_1$ y a $\vec{u}_2$ y de forma que la base obtenida sea directa; en consecuencia, $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

  Por lo tanto, la matriz asociada a la simetría respecto de la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  2) Cambio de la base B a la canónica C. El procedimiento es el siguiente:

  La matriz P de cambio de la base B a la base canónica C tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B calculadas previamente (que ya están referidas a la base canónica), es decir:

  La matriz M asociada a la simetría especular respecto la base canónica, se obtiene aplicando la fórmula:

$$M = P \cdot M_B \cdot P^{-1}$$

  3) La ecuación de la simetría especular respecto de la base canónica:

$$X' = A + M\,\overline{AX}$$

  siendo A un punto cualquiera del plano π de la simetría

1.4.4. Simetría rotacional

- *Elementos característicos*:
  - Plano de simetría: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$
  - Eje de simetría: $e \equiv (x, y, z) = (a, b, c) + t\,(A, B, C)$ (ya que $e \perp \pi$)
  - Ángulo de giro : α

- *Ecuaciones*:

  Dado que la simetría rotacional es el producto de la simetría especular de plano π por la rotación de eje e y ángulo α (y este producto es conmutativo por ser $e \perp \pi$), la matriz de la simetría rotacional respecto de la **base canónica**, M, se obtiene multiplicando las matrices de la simetría especular y de la rotación respecto de la **base canónica.**

  La ecuación de la simetría rotacional respecto de la base canónica C es:

$$X' = C + M\,\overline{CX}$$

  Siendo:
  C: centro de la simetría rotacional (punto de intersección del plano de la simetría con el eje de la rotación)
  M: la matriz asociada a la simetría rotacional respecto la base canónica.

1.4.5. Simetría deslizante

- *Elemento característico*:
  - Plano: π: $Ax + By + Cz + D = 0$
  - Vector de traslación: $\vec{u} = (a, b, c)$, paralelo al plano π.

- *Ecuaciones*:
  Por ser la simetría deslizante el producto de la simetría especular de plano π por la traslación de vector $\vec{u}$ (y este producto es conmutativo por ser $\vec{u}$ y π paralelos), la matriz de la simetría deslizante respecto de la **base canónica**, M, se obtiene multiplicando las matrices de la simetría especular y de la traslación respecto de la **base canónica.**
  Ahora bien, la matriz asociada a la traslación es la matriz identidad, luego M coincide con la matriz de la simetría especular.

  Ecuación de la Simetría deslizante respecto de la base canónica C:

$$X' = A + M\,\overline{AX} + \vec{u}$$

  Siendo:
  A: un punto cualquiera del plano π de la simetría
  M: la matriz asociada a la simetría especular respecto la base canónica.
  $\vec{u}$: vector de la traslación.

1.4.6. Movimiento helicoidal

- *Elemento característico*:
  - Eje de rotación: $e \equiv (x, y, z) = (a, b, c) + t\,(u', v', w')$
  - Ángulo de la rotación: α
  - Vector de traslación: $\vec{u} = (u, v, w)$, paralelo al eje de simetría, es decir, $(u', v', w') = k\,(u, v, w)$ para cierta constante real k.

- *Ecuaciones*:

  Por ser el movimiento helicoidal el producto de la rotación de eje e por la traslación de vector $\vec{u}$ (y este producto es conmutativo por ser $\vec{u}$ y e paralelos), la matriz del movimiento helicoidal respecto de la **base canónica**, M_C, se obtiene multiplicando las matrices de la rotación y de la traslación respecto de la **base canónica.**
  Ahora bien, la matriz asociada a la traslación es la matriz identidad, luego M coincide con la matriz de la rotación.

  La ecuación del movimiento helicoidal respecto de la base canónica C es:

  $$X' = A + M\cdot\overrightarrow{AX} + \vec{u}$$

  Siendo:
  A: un punto del eje de rotación.
  M_C: la matriz asociada a la rotación respecto la base canónica.
  $\vec{u}$: vector de la traslación.

2. Homotecias y semejanzas en el espacio

2.1 Homotecia en el espacio

Se llama homotecia de centro C y razón k ($k \neq 0, 1$), y se designa por $H_{(C,k)}$, a la transformación geométrica del espacio afín euclídeo E_3 en sí mismo.

$$\begin{array}{ccc} E_3 & \xrightarrow{H_{(C,k)}} & E_3 \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

que asocia a cada punto A de E_3 el punto A' de E_3 que cumple la condición:

$$\overrightarrow{CA'} = k\,\overrightarrow{CA}$$

- Si es la razón $k > 0$ se dice que la **homotecia es directa.**
- Si es la razón $k < 0$ se dice que la **homotecia es inversa.**
- Si es la razón $k = -1$ es una simetría central de centro C.

Obsérvese que para $k = 1$ tendríamos un movimiento: identidad o traslación.
Solo si la razón razón k, $|k| \neq 1$, no son movimientos.

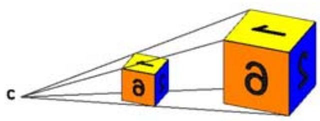


figura 13 Homotecia

- *Elementos característicos*: El centro de la homotecia (único punto doble) y la razón k de la homotecia.

- *Ecuaciones*:
La ecuación vectorial de la homotecia de centro C y razón k, $H_{(C,k)}$ es:
$X' = C + (k\cdot I)\,\overrightarrow{CX} \Leftrightarrow X' = C(1-k) + kIX \Leftrightarrow \overline{X'} = N\,\overline{X}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \quad (45)$$

Otra forma de expresar la ecuación de la homotecia $H_{(C,k)}$ es:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline a\text{-}ka&k&0&0\\b\text{-}kb&0&k&0\\c\text{-}kc&0&0&k\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\quad(46)$$

Donde $\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline a\text{-}ka&k&0&0\\b\text{-}kb&0&k&0\\c\text{-}kc&0&0&k\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}1&(0)\\\hline T(0)&M\end{array}\right)$, siendo $M = k\cdot I_3$

2.2 Procedimiento para clasificar homotecias y calcular sus elementos

Para clasificar una homotecia en E_3, conocida su ecuación matricial, se darán los siguientes pasos:

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c}1&0\\\hline T(O)&M\end{array}\right)$.

2. **Si $M = k\cdot I_3$** , con $k \neq 0, 1$, es decir, si M es una matriz escalar, la transformación es una homotecia afín de razón k.

   a) Si k es un número real positivo $\Rightarrow$ homotecia directa.

   b) Si k es un número real negativo $\Rightarrow$ homotecia inversa.

   c) Si $k = -1$, se trata de una simetría central como se ha dicho en .

   Cálculo de los elementos característicos de la homotecia:

   - **Centro de homotecia:** es el punto doble, obtenido al resolver $(N - I)\,\overline{X} = 0$.
   - **Razón de la homotecia:** es el número real k tal que $M = k\cdot I_3$.

2.3 Procedimiento para calcular las ecuaciones de una homotecia dados sus elementos característicos

- *Elementos característicos:*
  - Centro de la homotecia: C (a, b).
  - Razón de la homotecia: k
- *Ecuaciones:*

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\text{-}a\\y\text{-}b\\z\text{-}c\end{pmatrix}\quad(47)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a-ak & k & 0 & 0 \\ b-bk & 0 & k & 0 \\ c-ck & 0 & 0 & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (48)$$

2.4 Semejanzas en el espacio

Semejanza S de razón $k \neq 0$ es la composición o producto de una homotecia y un movimiento.

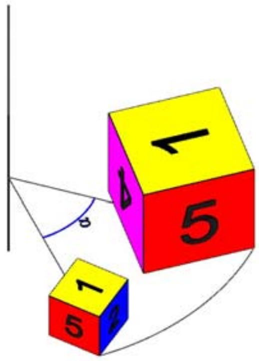


figura 14 Semejanza

- Si k =1, se trata de un movimiento en el espacio.
- Si $k \neq 1$, entonces existe un único punto doble C que se llama centro de la semejanza y en este caso la semejanza se puede descomponer de forma única y conmutativa en el producto de una homotecia de centro C y razón $\pm k$ y un giro que deja invariante al punto C. Esta descomposición se denomina descomposición canónica de la semejanza.

Las semejanzas en el espacio pueden ser:

1. **Semejanza directa:** es el producto de una homotecia, $H_{(C, k)}$, y de un giro, $G_{(e, \alpha)}$, (o viceversa).
   - *Elementos característicos*: el centro C de la semejanza (un único punto doble), el eje e de la semejanza, la razón k de la semejanza y el ángulo α del giro.
2. **Semejanza inversa:** es el producto de una homotecia, $H_{(C, -k)}$, y de un giro, $G_{(e, \alpha)}$, (o viceversa).
   - *Elementos característicos*: el centro C de la semejanza (un único punto doble), el eje e de la semejanza, la razón k de la semejanza y el ángulo α del giro.

2.5 Procedimiento para clasificar semejanzas y calcular sus elementos

Para clasificar una semejanza en E_3, conocida su ecuación matricial, se darán los siguientes pasos:

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$.

2. **Si $M \cdot M^t = p \cdot I_n$,** (p>0), es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k = \sqrt{p}$.

   1) Si $|M| = |kQ| > 0$, la semejanza es directa y la matriz $Q = \frac{1}{k} \cdot M$ es la matriz ortogonal asociada a la rotación.

   Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

   - **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.
   - **Eje de la semejanza:** es la recta afín e que pasa por el centro de la semejanza C y su dirección es la solución de la ecuación $(Q - I)\ X = 0$.
   - **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3 = \det(M)$, es decir, $k = \sqrt{p}$ $(M \cdot M^t = p \cdot I_3)$.
   - **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza } Q = \text{Traza}\left(\frac{1}{k} M\right) = \text{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1 + 2\cos\alpha$$

   Siempre hay dos soluciones "+" y "-" para α (ver pág.87)

   2) Si $|M| = |kQ| < 0$, la semejanza es inversa y la matriz $Q = -\frac{1}{k} \cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento

   Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

   - **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.
   - **Eje de la semejanza:** es la recta afín e que pasa por el centro de la semejanza C y su dirección es la solución de la ecuación $(Q - I)\ X = 0$..
   - **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $-k^3 = \det(M)$, es decir, $k = \sqrt{p}$ $(M \cdot M^t = p \cdot I_3)$.

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza } Q = \text{Traza}\left(\frac{1}{-k}M\right) = \text{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1+2\cos\alpha$$

Siempre hay dos soluciones "+" y "-" para α (ver pág.88)

2.6 Procedimiento para calcular las ecuaciones de una semejanza dados sus elementos característicos

1. Semejanza directa

- *Elementos característicos*:
  - Razón de la semejanza: k
  - Centro de la semejanza: C = (a, b, c) (único punto doble).
  - Eje de la semejanza: e ≡ (x, y, z) = (a, b, c) + t (u, v, w)
  - Ángulo de la semejanza: α

- *Ecuaciones:*
  La ecuación de la semejanza directa respecto de la referencia canónica es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + k\cdot P\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \qquad (49)$$

donde P es la matriz de cambio de una base B adecuada a la base canónica (ver pág. 91)

2. Semejanza inversa

  - Razón de la semejanza: k
  - Centro de la semejanza: C = (a, b, c) (único punto doble).
  - Eje de la semejanza: e ≡ (x, y, z) = (a, b, c) + t (u, v, w)
  - Ángulo de la semejanza: α

- *Ecuaciones:*
  La ecuación de la semejanza directa respecto de la referencia canónica es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - k\cdot P\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \qquad (50)$$

donde P es la matriz de cambio de una base B adecuada a la base canónica (ver pág. 92).

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema

PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS EN EL PLANO

1. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{5} \\ y - \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

2. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

3. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+4 \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

4. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

5. Consideramos los giros G_1 de centro $A_1(1,2)$ y ángulo α_1 =60º y G_2 con centro $A_1(0,-1)$ y ángulo α_2 = 30º:

a) Efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

b) Para α_2 =300º efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

Solución

6. Componer el giro G_2 del problema 5 apartado a) con la simetría axial S_r de eje la recta.

$$r \equiv x + 2y + 4 = 0$$

¿Qué tipo de transformación se obtiene?

Solución

7. Analizar para qué valores de los parámetros a, b y c, la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

es un movimiento. En este caso, clasificarlo.

Solución

8. Hallar las ecuaciones del giro plano G de centro el punto C(2, 3) y ángulo $\alpha = -90^{\circ}$.

Solución

9. Hallar las ecuaciones de la simetría axial plana S de eje la recta $e \equiv y = x - 1$.

Solución

10. Escribir la ecuación de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución

11. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante en el plano cuya descomposición canónica es $S_D = T_{\vec{u}} \circ S_e$ siendo la ecuación del eje de simetría $e \equiv y = 2x - 4$ y el vector traslación $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución

12. Componer el giro G_1 del problema 5 con la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

13. Componer la simetría axial de eje la recta $r \equiv x + 2y + 4 = 0$, del problema 6, con la traslación de vector $\vec{u} = (5,7)$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

14. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = (-3,1)$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

15. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida..

Solución

16. Efectuar el producto de tres simetrías axiales $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, de ejes respectivos:

$e_1 \equiv x = 1$ $e_2 \equiv y = 1$ y $e_3 \equiv x = -1$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

17. Efectuar el producto de cuatro simetrías axiales $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, siendo las tres primeras las mismas que en el problema 16 y S_4 la simetría de eje la recta $e_4 \equiv y - 1$.

Solución

18. Hallar la ecuación del giro que transforma los puntos A(3,1) y B(-1,-2) en los puntos A'(2,2) y B'(5,-2), respectivamente.

Solución

19. Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, determinar la transformación $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.

Solución

20. Determinar el giro que transforma la recta x+y=0 en la recta $\left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(-\sqrt{3}+1\right)y = 2$.

Solución

1. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{5} \\ y - \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T es de la forma X’ = A + M (X – A) donde:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ y } M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Operando X’ = A + M (X – A) = A + MX – MA = (A – MA) + MX = T(O) + MX

$$T(O) = A - MA = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}, \text{ es decir, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sabemos que la ecuación de T también se puede escribir $\overline{X}' = N\overline{X}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Aplicando el procedimiento para su clasificación:

1. $MM^t = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = 1$, luego se trata de un **movimiento directo** del plano.

3. $M \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ T no es la identidad ni una traslación, T es un **giro**.

Elementos característicos: centro C y ángulo de giro α:

Cálculo del centro: C es el único punto doble; se obtiene resolviendo el sistema $(N - I)\overline{X} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 4x - 8y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Por tanto, C (1, -1) es el centro de giro.

Cálculo del ángulo:

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{5} = \cos\alpha \\ \frac{4}{5} = \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 126º\ 52'\ 11.6''}$$

Inicio

2. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T es de la forma X' = T(O) + MX donde $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y el transformado del origen es el punto $T(O) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La ecuación anterior es equivalente : $\overline{X}' = N\overline{X}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplicando el procedimiento de la página 15

1. $MM^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, se trata de un **movimiento inverso** del plano.

3. El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$.

Analizando los rangos:

$$\operatorname{rg}(M-I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=1$$

$$\operatorname{rg}(N-I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=1$$

Luego T es una **simetría axial**

Elementos característico: eje de simetría

$$(N-I)\overline{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow 2-x-y=0$$

El eje de la simetría axial es la recta de ecuación: $e \equiv y = 2 - x$

Inicio

3. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y+4\end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T **no** es de la forma X’ = A + M (X – A) si no X’ = A + M (X +B), entonces debemos operar para llegar a la expresión general X’ = T(O) + MX, es decir:

X’ = A + M (X +B) ⇔ X’ = (A+ MB) + MX, efectuando los cálculos:

(A+ MB) = $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, siendo la ecuación: $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Sabemos que la ecuación de T también se puede escribir $\overline{X}'=N\overline{X}$

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

Aplicamos el procedimiento indicado en página 15 y observamos que $M = I_2$, luego se trata de una **traslación** ya que $T(O) \neq O$.

Elementos característico: vector de la traslación $\vec{u}=\overrightarrow{OT(O)}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

Inicio

4. Clasificar la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Hallar sus elementos característicos.

Solución

La ecuación de T **no** es de la forma X' = A + M (X – A), entonces debemos operar para llegar a la expresión general X' = T(O) + MX, es decir:

X' = A + M (X +B) ⇔ X' = (A+ MB) + MX, efectuando los cálculos:

(A+ MB) = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo la ecuación: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La ecuación anterior es equivalente : $\overline{X}' = N\overline{X}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplicando el procedimiento de la página 15

1. $MM^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, se trata de un **movimiento inverso** del plano.

3. El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$.

Analizando los rangos:

$$\operatorname{rg}(M-I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rg}(N-I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

se observa que el sistema anterior es incompatible. No hay, por tanto, puntos dobles y T es una **simetría deslizante.**

Elementos característico: eje de simetría y vector de traslación

1º) El transformado del origen, según se ha visto, era. $T(O) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = O'$

El punto medio del segmento $\overline{OO'}$ pertenece al eje e de la simetría deslizante y tiene por coordenadas:

$$P = \frac{O+O'}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Su transformado, P', también pertenecerá a dicho eje y el vector $\vec{PP'}$ será, precisamente, el vector traslación $\vec{u}$ de la simetría deslizante.

$$N\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \vec{PP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector de traslación es el (1,1).

2º) El eje de la simetría deslizante pasa por P=(1,0) y es paralelo al vector de traslación $(\vec{u} // e)$, es decir, a los vectores invariantes por M:

$$(M - I)\vec{X} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow y = x$$

Luego, el **eje e** tiene de ecuación $y - 0 = x - 1 \Rightarrow y = x - 1$

Segundo método para el cálculo del eje:

$$S_D = S_e \cdot T_{\vec{u}} \Rightarrow S_e = S_D \cdot T_{-\vec{u}} \Rightarrow N_{S_e} = N_{S_D} \cdot N_{T_{-\vec{u}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El eje e lo constituyen los puntos dobles mediante la simetría axial S_e y son la solución del sistema:

$$(N_{S_e} - I)\overline{X} = 0, \text{ es decir,}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 - x + y = 0 \Rightarrow e \equiv y = x - 1$$

Inicio

5. Consideramos los giros G_1 de centro $A_1(1,2)$ y ángulo $\alpha_1 = 60°$ y G_2 con centro $A_1(0,-1)$ y ángulo $\alpha_2 = 30°$:

a) Efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

b) Para $\alpha_2 = 300°$ efectuar el producto de G_1 por G_2, clasificando y hallando los elementos característicos de la transformación obtenida.

Solución

a) Para componer G_1 con G_2, obtengamos la matriz del producto $N = N_{G_2} \cdot N_{G_1}$.

La ecuación de G_1 es de la forma: $X' = A_1 + M_1 \overrightarrow{A_1X}$

para $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la ecuación de arriba, queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego, $N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Siguiendo los mismos pasos para G_2, se tiene:

$$X' = A_2 + M_2 \overrightarrow{A_2X}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\text{sen}\,\alpha_2 \\ \text{sen}\,\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\text{sen}\,30^\circ \\ \text{sen}\,30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de G_2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego, $N_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Por tanto, $N = N_{G_2} \cdot N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicando el procedimiento indicado en página 15:

1. $MM^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, luego se trata de un **movimiento directo** del plano.

3. $M \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ T no es la identidad ni una traslación, T es un **giro**.

Elementos característicos: centro C y ángulo de giro α:

Cálculo del centro: C es el único punto doble; se obtiene resolviendo el sistema $(N-I)\overline{X} = 0$.

$$(N-I)\bar{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=0 \\ x-y+\frac{3\sqrt{3}-3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $C\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$ es el centro de giro.

Cálculo del ángulo:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=\cos\alpha \\ 1=\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha=90^{\circ}}$$

Luego, $G_2 \cdot G_1$ es otro giro de **centro** $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$ y **ángulo** $\alpha_1+\alpha_2=90^0$.

b)

Por ser $\alpha_1+\alpha_2=60^0+300^0=360^{\circ}$, el producto $G_2 \cdot G_1$ es una **traslación**.

Para obtener el vector traslación, hallemos la matriz $N=N_{G_2}\cdot N_{G_1}$.

En apartado anterior, para el giro G_1 se obtuvo $N_{G_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La ecuación de G_2 es del tipo:

$$X'=A_2+M_2\,\overrightarrow{A_2X}$$

siendo $M_2=\begin{pmatrix} \cos\ \alpha_2 & -\operatorname{sen}\ \alpha_2 \\ \operatorname{sen}\ \alpha_2 & \cos\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\ 300^{\circ} & -\operatorname{sen}\ 300^{\circ} \\ \operatorname{sen}\ 300^{\circ} & \cos\ 300^{\circ} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la ecuación de G_2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

siendo $N_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Multiplicando ambas matrices se obtiene:

$$N = N_{G_2} \cdot N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}-3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $G_2 \cdot G_1$ **es una traslación de vector** $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix}$**.**

Inicio

6. Componer el giro G_2 del problema 5 apartado a) con la simetría axial S_r de eje la recta.

$$\mathbf{r \equiv x + 2y + 4 = 0}$$

¿Qué tipo de transformación se obtiene?

Solución

Busquemos la matriz asociada al producto del giro G_2 por la simetría axial S_r, es decir, $N = N_{S_r} \cdot N_{G_2}$.

Al resolver el problema 5 página 11, se obtuvo:

$$N_{G_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Hallemos ahora N_{S_r}.

La ecuación de S_r es del tipo:

$X' = A + M_{S_r}\overrightarrow{AX}$, siendo A un punto cualquiera de la recta r y M_{S_r} la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, siendo $\frac{\alpha}{2}$ la inclinación de r.

La ecuación del eje puede escribirse en la forma: $r \equiv y = -\frac{1}{2}x - 2$, luego, la pendiente de r es $m_r = -\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Operando en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$4 - 4\cos\alpha = 1 + \cos\alpha \Rightarrow 5\cos\alpha = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Además, $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$.

Como $\frac{\alpha}{2} > 90^\circ$ (pues tg $\frac{\alpha}{2}$ < 0), se verifica que $\alpha > 180^\circ$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

Luego, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$.

Por tanto, $M_{S_r} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Tomamos como punto de r, por ejemplo, el punto A=(0,-2) y la ecuación de S_r queda:

$$S_r \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O bien:

$$S_r \equiv \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{16}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},$$

El producto de los dos movimientos,

$$N = N_{S_r}\cdot N_{G_2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{11}{10} & \frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{11}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & \frac{2}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{10}\end{pmatrix}.$$

Clasificación:

Por ser el producto de un movimiento directo por uno inverso, se trata de un movimiento inverso.

Aplicando el procedimiento para su clasificación:

1. $MM^t=\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{5}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, luego M es ortogonal, y por tanto, la transformación T es un **movimiento.**

2. $|M|=\begin{vmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{5}\end{vmatrix}=-1$, luego se trata de un **movimiento inverso** del plano.

3. El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N-I)\overline{X}=0$.
Analizando los rangos:

$$\operatorname{rg}(M-I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{7}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{3}{5}\end{pmatrix}=1$$

$$\operatorname{rg}(N-I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{11}{10} & \frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{7}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{11}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{10} & -\frac{3\sqrt{3}}{10}-\frac{3}{5}\end{pmatrix}=2$$

Al ser $\operatorname{rg}(M-I)\neq\operatorname{rg}(N-I)$, la transformación producto carece de puntos dobles y es, por tanto, una **simetría deslizante.**

Inicio

7. Analizar para qué valores de los parámetros a, b y c, la siguiente transformación T del plano dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

es un movimiento. En este caso, clasificarlo.

Solución

La aplicación vectorial asociada a T tiene por matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a-1 & a^2 \end{pmatrix}$.

T es un movimiento si y sólo si M es una matriz ortogonal, es decir, si $MM^t = I$.

$$MM^t = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ b & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & a-1+ba^2 \\ a-1+a^2b & (a-1)^2+a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ha de ser $\begin{cases} 1 = 1+b^2 \Rightarrow b = 0 \\ 0 = a-1+ba^2 = a-1 \Rightarrow a = 1 \\ 0 = a-1+ba^2 = 0+0 = 0 \\ 1 = (a-1)^2 + a^4 = 0+1 = 1 \end{cases}$

Luego T es un movimiento para a = 1 y b = 0.

En este caso, queda $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego se trataría de movimientos cuya matriz M asociada es I_2 y por tanto, T es la **transformación identidad** del plano cuando c =0.

Si $c \neq 0$, se trata de la **traslación** de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Inicio

8. Hallar las ecuaciones del giro plano G de centro el punto C(2, 3) y ángulo $\alpha = -90^{\circ}$.

Solución

La ecuación del giro es de la forma: $X' = C + M\overrightarrow{CX}$, donde M es la matriz del giro vectorial asociado a G.

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-90^{\circ}\right) & -\text{sen}\left(-90^{\circ}\right) \\ \text{sen}\left(-90^{\circ}\right) & \cos\left(-90^{\circ}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba, queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

O bien:

$$\begin{cases} x' = -1 + y \\ y' = 5 - x \end{cases}$$

Inicio

9. Hallar las ecuaciones de la simetría axial plana S de eje la recta $e \equiv y = x - 1$.

Solución

La ecuación del eje puede escribirse en la forma $e \equiv y = x - 1$, observándose que la pendiente del eje es m = 1.

Llamando $\frac{\alpha}{2}$ a la inclinación del eje, se verifica, pues, que tg $\frac{\alpha}{2}$ =1. Luego, $\frac{\alpha}{2}$ =45º y $\alpha = 90^{\circ}$.

La matriz de la simetría vectorial asociada a S es:

$$M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & \text{sen}\,90^\circ\\ \text{sen}\,90^\circ & -\cos 90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

La ecuación de la simetría S es de la forma: $X' = A + M\overrightarrow{AX}$, siendo A un punto del eje.

Tomamos como punto A, por ejemplo el (1, 0) y ya queda:

$$S\equiv\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Otra manera de escribir la ecuación matricial de S es:

$$S\equiv\bar{X}'=N\bar{X}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

O bien:

$$\begin{cases}x'=1+y\\y'=-1+x\end{cases}$$

Inicio

10. Escribir la ecuación de la traslación de vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

Solución

La ecuación matricial de una traslación genérica de vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ es de la forma: $\bar{X}'=N\bar{X}$, siendo

$$N=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix}.$$

En el caso del enunciado, la ecuación anterior queda:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&1&0\\6&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Es decir, $\begin{cases}x'=x+5\\y'=y+6\end{cases}$

Inicio

11. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante en el plano cuya descomposición canónica es $S_D = T_{\vec{u}} \circ S_e$ siendo la ecuación del eje de simetría $e \equiv y = 2x - 4$ y el vector traslación $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución

1º) Hallemos en primer lugar la ecuación de la simetría axial S_e:

$S_e \equiv X' = A + M\vec{AX}$, siendo A un punto del eje e y M la matriz de la simetría vectorial asociada. Puede tomarse, por ejemplo, A=(2,0) como punto de e.

$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, siendo $\frac{\alpha}{2}$ la inclinación del eje.

$e \equiv y = 2x - 4 \Rightarrow \text{pte } e = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$. Se verifica, entonces, que:

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2$. Elevando al cuadrado y despejando $\cos\alpha$, queda:

$1 - \cos\alpha = 4(1+\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\frac{4}{5}$. Como $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ (pues $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$), se colige que $\alpha < 180^\circ$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$.

Luego, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$.

Por tanto, $M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

La ecuación de S_e queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\overline{X}' = N_{S_e}\overline{X}\text{ , es decir, } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

2º) Ecuaciones de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$T_{\vec{u}} \equiv \overline{X}' = N_{T_{\vec{u}}}\overline{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

3º) Producto de la simetría por la traslación:

$$S_D \equiv \overline{X}' = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{S_e}\overline{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{21}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{cases} x' = \frac{21}{5} - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

Inicio

12. Componer el giro G_1 del problema 5 con la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Hallemos la matriz $N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{G_1}$.

En el problema 5 página 30 se obtuvo $N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La matriz de la traslación de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es $N_{T_{\vec{u}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}+\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 6-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La transformación producto es un movimiento directo por ser el producto de dos movimientos directos.

Por ser $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ para $\alpha = 60^\circ$, se trata de un **giro** de **ángulo** 60° (algo que se conocía de antemano por la teoría).

El centro será el único punto doble:

$$(N-I)\overline{X}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}+\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 6-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}+7=0 \\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}+12=0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-5\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{3\sqrt{3}+9}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $\left(\dfrac{5-5\sqrt{3}}{2},\dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}\right)$ es el centro del giro

Inicio

13. Componer la simetría axial de eje la recta $r \equiv x + 2y + 4 = 0$, del problema 6, con la traslación de vector $\vec{u}=(5,7)$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Busquemos la matriz del producto $N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{S_r}$.

En la resolución del problema 6 página 14 se obtuvo $N_{S_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{16}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

La matriz de la traslación de vector $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ es $N_{T_{\vec{u}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando ambas matrices se obtiene:

$$N = N_{T_{\vec{u}}} \cdot N_{S_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{17}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{19}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar una simetría axial (movimiento inverso) por una traslación (movimiento directo) se obtiene un movimiento inverso del plano.

El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N-I)\overline{X}=0$.

Analizando los rangos:

$$\operatorname{rg}(M-I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5}\end{pmatrix}=1$$

$$\operatorname{rg}(N-I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{17}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{19}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5}\end{pmatrix}=2$$

Por tanto, el sistema $(N-I)\overline{X}=0$ es incompatible y la transformación producto $T=T_{\vec{u}}\cdot S_r$ es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: eje de la simetría y vector de la traslación

La descomposición canónica de T es de la forma $T=S_e\cdot T_{\vec{v}}=T_{\vec{v}}\cdot S_e$, con e y $\vec{v}$ paralelos.

1º) El **eje** e es la recta que pasa por el punto $P=\dfrac{O+T(O)}{2}=\begin{pmatrix}\frac{17}{10}\\ \frac{19}{10}\end{pmatrix}$ y es paralela a los vectores invariantes por M.

Estos vectores son la solución del sistema:

$$(M-I)\vec{X}=\vec{0}\Leftrightarrow x+2y=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x\ .$$

Así, unas ecuaciones paramétricas del eje son:

$$e\equiv\begin{cases}x=\frac{17}{10}+\lambda\\ y=\frac{19}{10}-\frac{1}{2}\lambda\end{cases}$$

2º) El **vector de traslación** es $\vec{v}=\overrightarrow{PP'}$, siendo $P'=T(P)$.

$$\overline{NP}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{29}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}\Rightarrow P'=\begin{pmatrix}\frac{29}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}$$

Resultando, $\vec{v}=\overrightarrow{PP'}=\begin{pmatrix}\frac{29}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{17}{10}\\ \frac{19}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Inicio

14. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1=(5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2=(-3,1)$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Hallemos en primer lugar las ecuaciones de ambas simetrías para luego efectuar su producto.
La ecuación de S_1 es de la forma:

$$X'=A_1+M_1\,\overrightarrow{A_1X}$$

siendo $M_1=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_1\\ \operatorname{sen}\alpha_1 & -\cos\alpha_1\end{pmatrix}$, para un ángulo α_1 tal que la pendiente de r_1 sea $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}$, es decir, $\frac{2}{5}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_1}{1+\cos\alpha_1}}=\frac{2}{5}\Rightarrow 25(1-\cos\alpha_1)=4(1+\cos\alpha_1)\Rightarrow \cos\alpha_1=\frac{21}{29}.$$

Por otra parte, $\operatorname{sen}\alpha_1>0$ (por ser $\frac{\alpha_1}{2}<90^\circ$, ya que $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}>0$, y, por tanto, $\alpha_1<180^\circ$).

$$\operatorname{sen}\alpha_1=\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}=\frac{20}{29}.$$

Luego, $M_1=\begin{pmatrix}\frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{pmatrix}$ y la ecuación de S_1 es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{44}{29}\\ \frac{110}{29}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{44}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{110}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},\ \text{siendo}\ N_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{44}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{110}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{pmatrix}\ \text{la matriz asociada a}\ S_1.$$

Procediendo de igual manera para S_2, se tiene que:

La ecuación de S_2 es de la forma:

$$X' = A_2 + M_2 \overrightarrow{A_2X}$$

siendo $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & \operatorname{sen}\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_2 & -\cos\alpha_2 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_2 tal que la pendiente de r_2 sea $\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}$, es decir, $-\frac{1}{3}$.

Por ser $\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} < 0$, se verifica que $\frac{\alpha_2}{2} > 90^\circ$, luego, $\alpha_2 > 180^\circ$ y $\operatorname{sen}\alpha_2 < 0$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha_2}{1+\cos\alpha_2}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9(1-\cos\alpha_2) = 1+\cos\alpha_2 \Rightarrow \cos\alpha_2 = \frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{sen}\alpha_2 = -\sqrt{1-\cos^2\alpha_2} = -\frac{3}{5}.$$

Luego, $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ y la ecuación de S_2 es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$, siendo $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ la matriz asociada a S_2.

El producto $S_2 \cdot S_1$ tiene de matriz asociada:

$$N = N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{448}{145} & \frac{24}{145} & \frac{143}{145} \\ -\frac{134}{145} & -\frac{143}{145} & \frac{24}{145} \end{pmatrix}.$$

Por ser los ejes de simetría de S_1 y S_2 (r_1 y r_2, respectivamente) rectas secantes, su **producto** $S_2 \cdot S_1$ es un **giro** G cuyo centro C es el punto de intersección de ambos ejes:

$$\begin{cases} r_1 \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{2} \\ r_2 \equiv \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{23}{11} \\ y = \dfrac{15}{11} \end{cases}$$

El **centro** es el punto $C\left(-\frac{23}{11}, \frac{15}{11}\right)$.

El **ángulo** de giro α se obtiene a partir de la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{24}{145} & \dfrac{143}{145} \\ -\dfrac{143}{145} & \dfrac{24}{145} \end{pmatrix}.$$

Han de ser $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{24}{145} \\ \text{sen}\alpha = -\dfrac{143}{145} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 279^\circ\ 31'\ 38''$.

Inicio

15. Componer las simetrías axiales S_1 y S_2 de ejes las rectas r_1 que pasa por el punto $A_1(2,3)$ y es paralela al vector $\vec{r}_1 = (5,2)$ y r_2 que pasa por el punto $A_2(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectivamente. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

En este problema, la simetría S_2 tiene de eje la recta que pasa por el punto $A_2=(-1,1)$ y es paralela al vector $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La ecuación de S_2 es, entonces, de la forma:

$$X' = A_2 + M_2\, \overrightarrow{A_2X}$$

siendo $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & \text{sen}\,\alpha_2 \\ \text{sen}\,\alpha_2 & -\cos\alpha_2 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_2 tal que $\text{tg}\dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{2}{5}$.

En la solución del problema 14 se obtuvo que, en este caso, es $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$.

Sustituyendo arriba se obtiene la ecuación de S_2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

o bien,

$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{28}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{70}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$, siendo $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{28}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{70}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$ la matriz asociada a S_2.

Para la simetría S_1, que no ha variado respecto al problema 15, ya se obtuvo allí que $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{44}{29} & \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{110}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{pmatrix}$.

La matriz asociada al producto $S_2 \cdot S_1$ es:

$$N = N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{29} & 1 & 0 \\ -\frac{40}{29} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde a una **traslación** (como era de esperar, pues los ejes de ambas simetrías son rectas paralelas) de **vector** $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{16}{29} \\ -\frac{40}{29} \end{pmatrix}$.

Inicio

16. Efectuar el producto de tres simetrías axiales $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, de ejes respectivos:

$e_1 \equiv x = 1$ $e_2 \equiv y = 1$ y $e_3 \equiv x = -1$. Estudiar la transformación obtenida.

Solución

Para efectuar el producto de las tres simetrías, calculemos cada una de sus matrices asociadas N_i, i = 1, 2, 3.

La ecuación de S_1 es de la forma:

$$X' = A_1 + M_1 \overrightarrow{A_1X}$$

siendo A_1 un punto cualquiera del eje e_1, por ejemplo, $A_1=(1,0)$, y M_1 la matriz asociada a la simetría vectorial correspondiente a S_1.

Es $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \text{sen}\,\alpha_1 \\ \text{sen}\,\alpha_1 & -\cos\alpha_1 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_1 tal que la inclinación del eje e_1 sea $\frac{\alpha_1}{2}$.

Como e_1 es paralelo al eje de ordenadas, se verifica que $\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ$ y, por tanto, $\alpha_1 = 180^\circ$.

Sustituyendo en M_1, queda:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \text{sen}\,180^\circ \\ \text{sen}\,180^\circ & -\cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y ya se obtiene la ecuación de S_1:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Procedamos exactamente de la misma forma para S_2 y S_3, pero, expresándolo esta vez de forma esquemática:

$$S_2 \equiv X' = A_2 + M_2\, \overrightarrow{A_2X}$$

$A_2 \in e_2$, por ejemplo, A_2=(0,1)

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha_2 & \text{sen}\ \alpha_2 \\ \text{sen}\ \alpha_2 & -\cos\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = 0^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 0^\circ \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} \cos\ 0^\circ & \text{sen}\ 0^\circ \\ \text{sen}\ 0^\circ & -\cos\ 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Análogamente para S_3: $S_3 \equiv X' = A_3 + M_3\, \overrightarrow{A_3X}$

$A_3 \in e_3$, por ejemplo, A_3=(-1,0)

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha_3 & \text{sen}\ \alpha_3 \\ \text{sen}\ \alpha_3 & -\cos\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\alpha_3}{2} = \text{inclinación de } e_3 = 90^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M_3 = \begin{pmatrix} \cos\ 180^\circ & \text{sen}\ 180^\circ \\ \text{sen}\ 180^\circ & -\cos\ 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_3 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El producto $T = S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$ tiene de matriz asociada:

$$N = N_3 \cdot N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudio de la transformación obtenida:

Al haber multiplicado un número impar de movimientos inversos (simetrías axiales), se ha obtenido otro movimiento inverso.

El conjunto de puntos dobles o invariantes es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$.

Analizando los rangos:

$$rg(M - I) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$rg(N - I) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Al no coincidir los rangos anteriores, el sistema $(N - I)\overline{X} = 0$ es incompatible y la transformación producto es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: eje de la simetría y vector de la traslación

La descomposición canónica de T es de la forma $T = S_e \cdot T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \cdot S_e$, con e y $\vec{v}$ paralelos.

1º) El **eje** e es la recta que pasa por el punto $P = \dfrac{O + T(O)}{2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es paralela a los vectores invariantes por M.

Éstos son la solución del sistema:

$$(M - I)\vec{X} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \ .$$

Luego, un vector director del eje es, por ejemplo, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y unas ecuaciones paramétricas del eje son:

$$e \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 \end{cases}$$

2º) El **vector de traslación** es $\vec{v} = \vec{PP'}$, siendo $P' = T(P)$.

$$N\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P' = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obteniéndose, $\vec{v} = \vec{PP'} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Inicio

17. Efectuar el producto de cuatro simetrías axiales $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, siendo las tres primeras las mismas que en el problema 16 y S_4 la simetría de eje la recta $e_4 \equiv y - 1$.

Solución

Hallemos en primer lugar la matriz N_4 asociada a la simetría S_4 para efectuar posteriormente el producto $N_4 \cdot N_3 \cdot N_2 \cdot N_1$.

La ecuación de S_4 es de la forma:

$$S_4 \equiv X' = A_4 + M_4 \vec{A_4X}$$

siendo A_4 un punto cualquiera del eje e_4, por ejemplo, $A_4=(0,-1)$, y M_4 la matriz asociada a la simetría vectorial correspondiente a S_4.

Es $M_4 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_4 & \operatorname{sen}\alpha_4 \\ \operatorname{sen}\alpha_4 & -\cos\alpha_4 \end{pmatrix}$, para un ángulo α_4 tal que la inclinación del eje e_4 sea $\frac{\alpha_4}{2}$.

Como e_4 es paralelo al eje de abscisas, se verifica que $\frac{\alpha_4}{2} = 0^\circ$ y, por tanto, $\alpha_4 = 0^\circ$.

Sustituyendo en M_4, queda:

$$M_4 = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \operatorname{sen} 0^\circ \\ \operatorname{sen} 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y ya puede escribirse la ecuación de S_4:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, $N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

El producto $S_4 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$ tiene por matriz asociada:

$$N = N_4 \cdot N_3 \cdot N_2 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde a una **traslación** de **vector** $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Obsérvese que al haber multiplicado un número par de movimientos inversos (simetrías axiales), se ha obtenido un movimiento directo.

Inicio

18. Hallar la ecuación del giro que transforma los puntos A(3,1) y B(-1,-2) en los puntos A’(2,2) y B’(5,-2), respectivamente.

Solución

Sea G el giro buscado de centro C(a, b) y ángulo α.

La ecuación de G es de la forma: $X' = C + M\overrightarrow{CX}$

siendo $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Como los puntos A(3, 1) y A’(2, 2) son puntos homólogos, se verifica que:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-a \\ 1-b \end{pmatrix}$$

Análogamente, por ser B’(5, -2) el transformado de B(-1, -2), se verifica también que:

$$\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-a\\-2-b\end{pmatrix}$$

Restando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones matriciales, se obtiene:

$$\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha\\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3=4\cos\alpha-3\text{sen}\,\alpha\\4=4\text{sen}\,\alpha+3\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{sen}\,\alpha=1\\ \cos\alpha=0\end{cases}$$

Por tanto, $\alpha=90^\circ$ y $M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Utilizando de nuevo que A y A' son puntos homólogos, se tiene:

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-a\\1-b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2=a-1+b\\2=b+3-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

El giro buscado G tiene por centro el punto C(2, 1) y ángulo $\alpha=90^\circ$.
Su ecuación es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}.$$

Inicio

19. Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, determinar la transformación $S_D\circ S_C\circ S_B\circ S_A$.

Solución

Supongamos que $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$.

La simetría central S_A coincide con el giro de centro A y ángulo 180º, que tiene por ecuación:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos 180^\circ & -\text{sen}\,180^\circ\\ \text{sen}\,180^\circ & \cos 180^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a_1\\y-a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a_1\\y-a_2\end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_1 & -1 & 0 \\ 2a_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz asociada a S_A es $N_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_1 & -1 & 0 \\ 2a_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si utilizamos una notación similar para los otros tres vértices B, C y D, se verifica igualmente que:

$N_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\,b_1 & -1 & 0 \\ 2\,b_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2c_1 & -1 & 0 \\ 2c_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2d_1 & -1 & 0 \\ 2d_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De manera que la transformación producto $S_D \cdot S_C \cdot S_B \cdot S_A$ tiene de matriz asociada:

$$N = N_D \cdot N_C \cdot N_B \cdot N_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(b_1 - a_1) - 2(c_1 - d_1) & 1 & 0 \\ 2(b_2 - a_2) - 2(c_2 - d_2) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero, por ser A, B, C y D los vértices consecutivos de un paralelogramo, se verifica que los vectores $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ y $\vec{DC} = (c_1 - d_1, c_2 - d_2)$ son iguales; luego, tienen las mismas coordenadas, es decir:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = c_1 - d_1 \\ b_2 - a_2 = c_2 - d_2 \end{cases}$$

Por tanto, es:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el producto $S_D \cdot S_C \cdot S_B \cdot S_A$ es la **transformación identidad** del plano.

Inicio

20. Determinar el giro que transforma la recta x+y=0 en la recta $\left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(-\sqrt{3}+1\right)y=2$.

Solución

El **centro** del giro será la intersección de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(-\sqrt{3}+1\right)y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

El **ángulo** de giro es el que forman las rectas:

$$\cos(\vec{r},\vec{s})=\frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|.|\vec{s}|}=\frac{(1,1)\cdot\left(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^{\circ}$$

Por tanto, se trata de un giro de centro $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y amplitud de 60º.

Inicio

PROBLEMAS DE HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS EN EL PLANO

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema.

21. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

22. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Solución

23. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

24. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

25. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

26. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

27.- Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

28. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

29. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

30.-Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

31. a) Hallar la ecuación de la homotecia directa de centro C(-1,-1) y razón $0<k<1$ que transforma la recta $r \equiv 3x + y = 4$ en la recta $r' \equiv 3x + y = 0$.

b) Razonar si hay, o no, una única homotecia de razón k=1/2 que transforma r en s.

Solución

32. Calcular los centros y las razones respectivas de la homotecia directa y de la homotecia inversa que transforman la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$.

Solución

33. Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, hallar las tangentes comunes exteriores e interiores a las circunferencias dadas en dicho ejercicio.

Solución

34. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son homólogos por una homotecia inversa siendo A(0,-1), B(2,1), A'(-4,11) y B'(-10,5), se pide:

a) La ecuación de dicha homotecia.

b) La ecuación de la elipse homóloga a la de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Solución

35. Sea la homotecia H_1 de centro A(2,-2) y razón k=2/3 :

a) Hallar la ecuación de dicha homotecia y la de su recíproca $(H_1)^{-1}$.

b) Hallar el transformado P' del punto P(6,0) por H_1.

c) Hallar la ecuación de la homotecia de centro P' y razón r =3.

d) Estudiar si el producto de $H_{(P',\ r)} \circ H_{(A,k)}$ es una homotecia y en caso afirmativo calcular el centro y la razón.

Solución

36. El producto de dos homotecias no es siempre una homotecia. Para probarlo con un contraejemplo se propone el siguiente ejercicio:

a) Hallar la ecuación de homotecia de centro C(1,-1) y razón k = 3/5.

b) Hallar el transformado O' del origen por la homotecia anterior.

c) Hallar la ecuación de homotecia de centro O' y razón r = 5/3.

d) Hallar la ecuación del producto $H_{(O',\ r)} \circ H_{(C,k)}$

e) Estudiar qué tipo de transformación es la obtenida en el apartado anterior y dar sus elementos.

Solución

37. a) Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo homólogo al de vértices A(0,0), B(2,0) C(3,2) por la semejanza resultante de aplicar un giro con centro B y ángulo de 135º con la homotecia de centro C y razón $k = 2\sqrt{2}$.

b) Hallar los elementos de la semejanza obtenida en a).

Solución

38. Dada la recta $m \equiv y = \frac{1}{2}x+1$ y el punto A(1,0), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial cuyo eje es la recta m con la homotecia de centro A y razón k = -5

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

39. Dadas las rectas $m \equiv y = (1/2)x-1$ y $m' \equiv y = 2x+2$ y el punto P(0,-1), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial que transforma la recta m en la recta m' con la homotecia de centro P y razón k = 2

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

40. a) Hallar la ecuación de la semejanza directa que transforma los puntos P(0,1) y Q(1,2) en P'(15,-2) y Q'(1,-4) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de dicha semejanza.

Solución

41. a) Hallar la ecuación de la semejanza inversa que transforma los puntos P(0,0) y Q(0, $\sqrt{3}$) en P'(2,- $\sqrt{3}$) y Q'(5,0) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de la semejanza obtenida en a).

Solución

21. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-3&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Solución

Aplicamos el procedimiento para su clasificación. La matriz M asociada a una homotecia del plano euclídeo es escalar, es decir, de la forma:

$$M = kI_2 = k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix} \text{ con } k\in\mathbf{R}\text{-}\{0,1\}$$

pero en esta transformación la matriz M asociada es $M=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\neq 2\,I_2$.

Luego la ecuación dada **no** corresponde a una homotecia del plano.

Inicio

22. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix}x'-2\\y'-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$$

Solución

Primer método:

Si se llama C al punto (2,2) se puede observar que la ecuación matricial dada es una ecuación vectorial de la forma $\overrightarrow{CX'}=2\overrightarrow{CX}$ que corresponde a una **homotecia directa** de **centro C(2,2)** y razón **k=2**.

Segundo método:

Se desarrolla la ecuación dada para ver claramente cuáles son las matrices N y M asociadas:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Aplicamos el procedimiento de la página 15. La matriz M asociada a una homotecia del plano euclídeo es escalar, es decir, de la forma:

$M = kI_2 = k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$ con $k \in$ **R**-{0,1}

La matriz M asociada es $M = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2\, I_2$.

Luego la ecuación dada corresponde a una **homotecia directa** del plano de razón **k=2**.

El centro es el único punto doble, por tanto haciendo x'= x, y' =y en la ecuación dada queda:

$$\begin{pmatrix}x-2\\ y-2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x-2\\ y-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x-2\\ y-2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}x-2\\ y-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow -\begin{pmatrix}x-2\\ y-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}.$$

Luego el **centro** es el punto **C(2,2).**

Inicio

23. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Solución

Se desarrolla la ecuación dada para ver claramente cuáles son las matrices N y M asociadas:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

La matriz asociada es $M = \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} = -3I_2$ luego la ecuación dada corresponde a una **homotecia inversa** del plano de razón **k = -3**.

El centro es el único punto doble, en consecuencia, lo calculamos haciendo x'= x, y'= y en la ecuación dada:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow 4\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4\\ 1/4\end{pmatrix}$$

Por tanto el **centro** de la homotecia es el punto **C(1/4,1/4).**

Inicio

24. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x-1} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Solución

Se desarrolla la ecuación dada:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como se ve la matriz asociada $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ no es escalar, es decir, no existe $k \in$ **R**-$\{0,1\}$ tal que $M=kI_2$,

Luego la ecuación dada **no** corresponde a una homotecia del plano.

Inicio

25. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una homotecia del plano y, en su caso, calcular el centro y la razón:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-6} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M=\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación geométrica correspondiente a la ecuación dada no es escalar es decir, no existe $k \in$ **R**-$\{0,1\}$ tal que $M=kI_2$,

Luego la ecuación dada **no** corresponde a una homotecia del plano.

Inicio

26. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia.

Se halla entonces el producto MM^t teniendo en cuenta que:

- Si $MM^t=I_2$, la matriz M sería ortogonal y la ecuación corresponde a un movimiento del plano (que puede considerarse como una semejanza de razón k=1).
- Si $MM^t= pI_2$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k=\sqrt{p}$ y $Q=\frac{1}{k}M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento (de la descomposición canónica de la semejanza).
- Si $MM^t \neq pI_2\ \forall p \in \mathbf{R}$, entonces la ecuación no corresponde a ningún tipo de movimiento, homotecia o semejanza en general.

En este caso, $MM^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$, luego M es la matriz asociada a una **semejanza** de razón **k** $= \sqrt{4} =$ **2** que se designa por S.

Si $|M| = |kQ| < 0$, la semejanza es inversa (el movimiento es una simetría axial)

Además $|M|$ = - 4<0, luego se trata de una **semejanza inversa**.

En consecuencia $S = S_e \circ H_{(C,2)} = H_{(C,2)} \circ S_e$, siendo $C \in e$ el centro de la semejanza (único punto doble).

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = O$

Para calcular C se resuelve la ecuación $N\ \overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\ \overline{X} = O$, siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-1 & 0 \\ -3 & 0 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+x=0 \\ -3-3y=0 \end{cases}$$, luego el **centro** es el punto **C(-3,-1)**

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^2 = -\det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M\cdot M^t = p\cdot I_2$.

$k = \sqrt{4} = 2$ es la razón de la semejanza inversa.

- **Eje de la semejanza:** es la recta que pasa por el centro C y su dirección es la solución de la ecuación: $Q\cdot X = X \Leftrightarrow (Q - I)X = 0$

Por último el eje e es la recta que pasa por C y su dirección es el conjunto de vectores invariantes que constituyen la solución de la ecuación QX=X⇒(Q-I)X=O⇔(1/kM-I)X=O:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

luego e es la paralela al eje de abscisas por C⇒ **e ≡ y = -1**

Resumiendo, la ecuación dada corresponde a una semejanza inversa del plano de razón k = 2, centro C(-3,-1) y eje e ≡ y = -1.

Inicio

27.- Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz N= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ de la ecuación no corresponde a ninguna transformación del plano

pues debería ser de la forma N= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & B \\ F & C & D \end{pmatrix}$, luego en particular **no** corresponde a una semejanza.

Inicio

28. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia.

Siguiendo un proceso análogo al establecido en el problema nº 26 hallamos el producto MM^t.

$MM^t = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \neq p\, I_2 \ \forall p \in \mathbf{R}$, luego la ecuación dada **no** corresponde ni a un movimiento ni homotecia ni semejanza del plano euclídeo.

Inicio

29. Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

Se desarrolla la ecuación dada:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como se ve la matriz asociada $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ no es escalar luego la ecuación dada no corresponde a una homotecia.

Siguiendo el proceso establecido en el problema nº 26 se halla el producto MM^t.

$MM^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \neq p\, I_2 \ \forall p \in \mathbf{R}$, luego la ecuación dada **no** corresponde ni a un movimiento ni homotecia ni semejanza del plano euclídeo.

Inicio

30.-Estudiar si la siguiente ecuación matricial corresponde a una semejanza del plano y, en caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz $M = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia.

Siguiendo el procedimiento establecido previamente se halla el producto MM^t:

$MM^t = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} = 100\, I_2$, luego M es la matriz asociada a una **semejanza** de razón.

k $= \sqrt{100} =$ **10** que designamos por S.

Si $|M| = |kQ| > 0$, la semejanza es directa (el movimiento es un giro)

Además $|M| = 100 > 0$, luego se trata de una **semejanza directa**.

En consecuencia $S = G_{(C,\alpha)} \circ H_{(C,2)} = H_{(C,2)} \circ G_{(C,\alpha)}$, siendo C el centro de la semejanza (único punto doble).

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\,\overline{X} = 0$.

Para calcular C resolvemos la ecuación $N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\,\overline{X} = O$, siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & -8 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1\text{-}1 & 0 & 0 \\ 15 & -6\text{-}1 & -8 \\ -1 & 8 & -6\text{-}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 15 - 7x - 8y = 0 \\ -1 + 8x - 7y = 0 \end{cases}$$, luego el **centro** es el punto **C(1,1).**

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^2 = \det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M \cdot M^t = p \cdot I_2$.

k $= \sqrt{100} =$ **10**

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula haciendo:

$$M = kQ = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\,\text{sen}\,\alpha \\ k\,\text{sen}\,\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ o bien, } Q = \frac{1}{k} M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

El ángulo α es el que verifica que:

$$\begin{cases} 10\ \cos\alpha = -6 \\ 10\ \text{sen}\alpha = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-6}{10} = -\dfrac{3}{5} \\ \text{sen}\alpha = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Resumiendo, la ecuación dada corresponde a una semejanza directa del plano de razón k = 10, centro C(1,1) y ángulo α definido por su seno y coseno calculados.

Inicio

31. a) Hallar la ecuación de la homotecia directa de centro C(-1,-1) y razón 0<k<1 que transforma la recta r ≡ 3x + y = 4 en la recta r' ≡ 3x + y = 0.

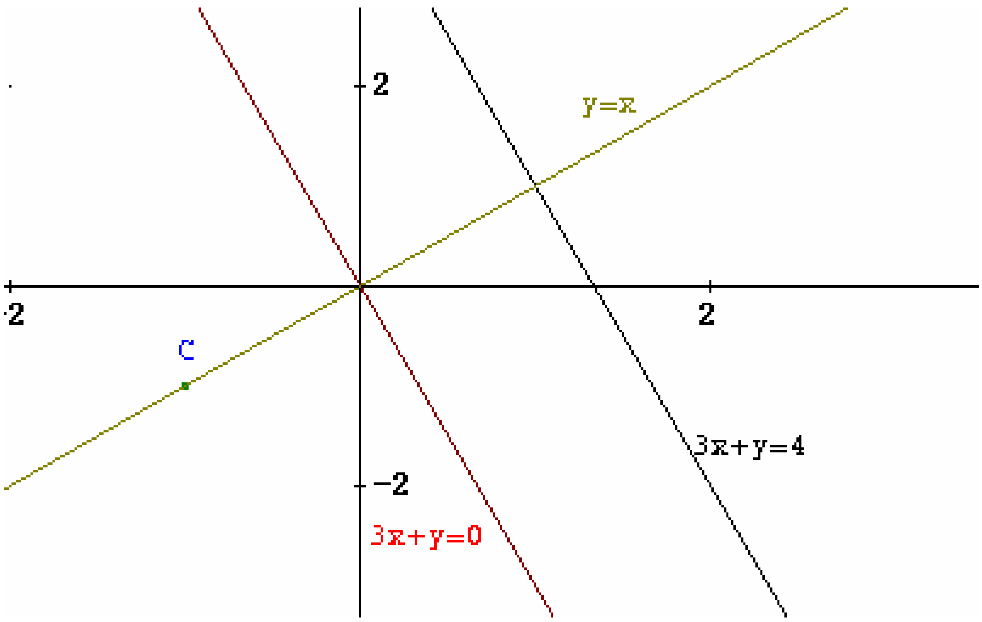
b) Razonar si hay, o no, una única homotecia de razón k=1/2 que transforma r en s.

Solución

a)
Dado que conocemos el centro C de la homotecia se trata de calcular la razón.
Para calcularla bastaría conocer 2 puntos homólogos P y P' pues debe cumplirse que

$$\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}.$$

Ahora bien, se sabe que dos puntos homólogos por una homotecia están alineados con el centro de la homotecia, luego si se considera un punto cualquiera de una de las rectas, por ejemplo el origen O(0,0)∈r' su homólogo X es la intersección con r del recta determinada por los puntos O y C .



La ecuación de la recta determinada por O y C es y = x, su intersección con 3x + y = 4 es el punto X(1,1), luego en nuestro caso P≡X(1,1) se transforma en P'≡O(0,0) y

$$\vec{CP'} = k\,\vec{CP} \Leftrightarrow (1,1) = k(2,2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ 1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \mathbf{k = ½.}$$

La ecuación matricial de la homotecia de centro C y razón ½ es:

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

Comprobación de que todo punto A(a,b) que pertenezca a la recta t que pasa por C(1,1) y es paralela a r y s verifica que $H_{(A,1/2)}$(r) = r'.

La ecuación de t es 3x + y = -4 ⇒ y = -4 – 3x, luego todo punto A de dicha recta es de la forma A(a,-4-3a).

La ecuación de la homotecia de centro A y razón k=1/2 es $\begin{pmatrix} x'-a \\ y'+4+3a \end{pmatrix} = 1/2\begin{pmatrix} x-a \\ y+4+3a \end{pmatrix}$.

Se calcula la transformada de la recta r por esta homotecia.

Para ello se despeja x e y en la ecuación y se sustituye en la ecuación de r ≡ 3x + y = 4.

Al despejar x e y se obtiene $\begin{cases} x = 2x'-a \\ y = 2y'+4+3a \end{cases}$ y sustituyendo en r:

3(2x' –a) + 2y'+ 4+3a = 4⇒ 6x'+2y'= 0⇒ 3x'+y'= 0 que es la ecuación de r' como queríamos probar.

Por tanto hay **infinitas** homotecias de razón ½ que transforman r en r' pero todas ellas deben tener como centro un punto de la recta 3x + y = -4

Inicio

32. Calcular los centros y las razones respectivas de la homotecia directa y de la homotecia inversa que transforman la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 – 6x - 2y + 6 = 0$.

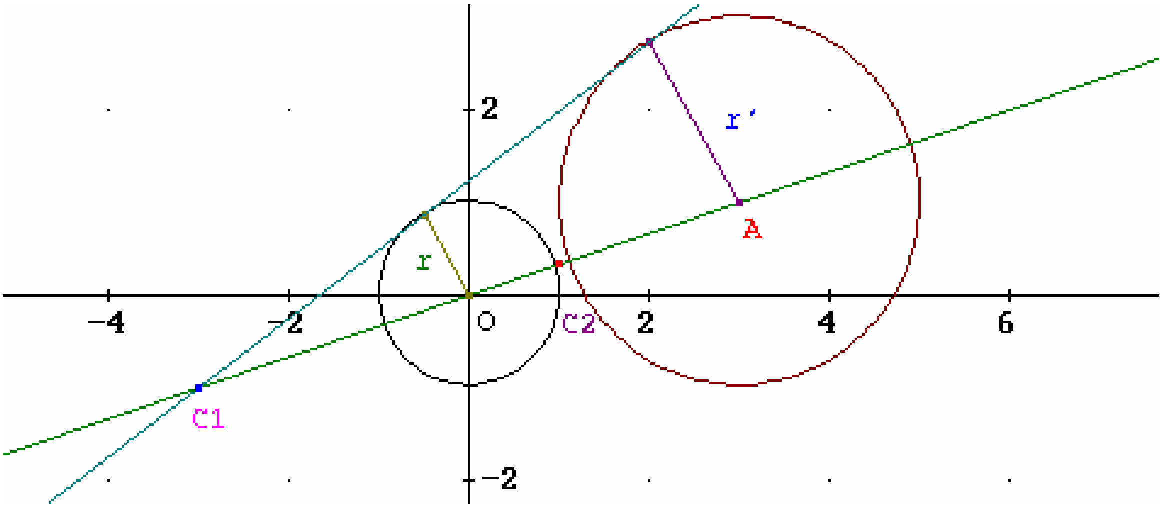
Solución

La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ tiene por centro O(0,0) y radio r = 1.

La circunferencia $x^2 + y^2 – 6x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2= 4$ tiene por centro A(3,1) y radio r' = 2.

Las propiedades de las homotecias nos dicen que hay una homotecia directa y otra inversa que transforman la primera circunferencia en la segunda y que verifican:

- que los centros de ambas circunferencias y homotecias están alineados
- que el centro de la primera circunferencia se transforma en el de la segunda
- que las razones de las homotecias son respectivamente r'/r y –r'/r, como se observa en la figura.



Se designa por C_1 y k_1 el centro y la razón de la homotecia directa y por C_2 y r_2 el centro y la razón de la homotecia inversa.

C_1 verifica que $\overrightarrow{C_1A} = \frac{r'}{r}\overrightarrow{C_1O} \Leftrightarrow$ (x-3,y-1) = 2(x-0,y-0)$\Rightarrow \begin{cases} x-3=2x \\ y-1=2y \end{cases} \Rightarrow C_1(-3,-1)$.

Luego la homotecia directa pedida tiene por **centro C_1(-3,-1)** y razón **k_1=2.**

C_2 verifica que $\overrightarrow{C_1A} = -\frac{r'}{r}\overrightarrow{C_1O} \Leftrightarrow$ (x-3,y-1) = -2(x-0,y-0)$\Rightarrow \begin{cases} x-3=-2x \\ y-1=-2y \end{cases} \Rightarrow C_2(1,1/3)$.

Luego la homotecia inversa pedida tiene por **centro C_2(1,1/3)** y razón **k_2=-2.**

Inicio

33. Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, hallar las tangentes comunes exteriores e interiores a las circunferencias dadas en dicho ejercicio.

Solución

Cálculo de las tangentes exteriores comunes:

Las tangentes exteriores comunes a las circunferencias dadas son las tangentes a ambas circunferencias que pasan por el centro C_1 de la homotecia directa obtenida.

Se las designa por T_1 y T_2.

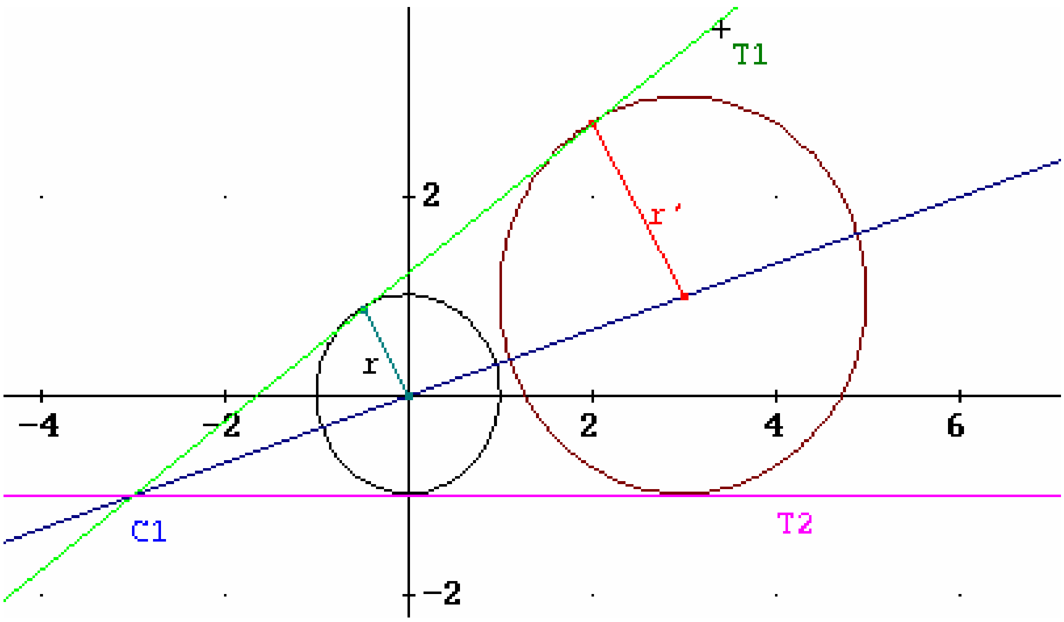
Para hallar sus ecuaciones se impone la condición de que su distancia a O(0,0) es r =1.

Las tangentes exteriores forman parte del haz de rectas que pasan por C_1.

El haz de rectas por C_1 tiene de ecuación $y+1=m(x+3) \Leftrightarrow mx-y+3m-1=0$, luego:

$d(T_1,O)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|m0-0+3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow |3m-1|=\sqrt{m^2+1}$, elevando al cuadrado y despejando m se obtiene m= ¾ y m=0,luego las ecuaciones de las tangentes exteriores son:

$T_1 \equiv y+1=\frac{3}{4}(x+3)$; $T_2 \equiv y+1=0$



<u>Cálculo de las tangentes interiores comunes:</u>

Las tangentes interiores comunes a las circunferencias dadas son las tangentes a ambas circunferencias que pasan por el centro C_2 de la homotecia inversa obtenida.

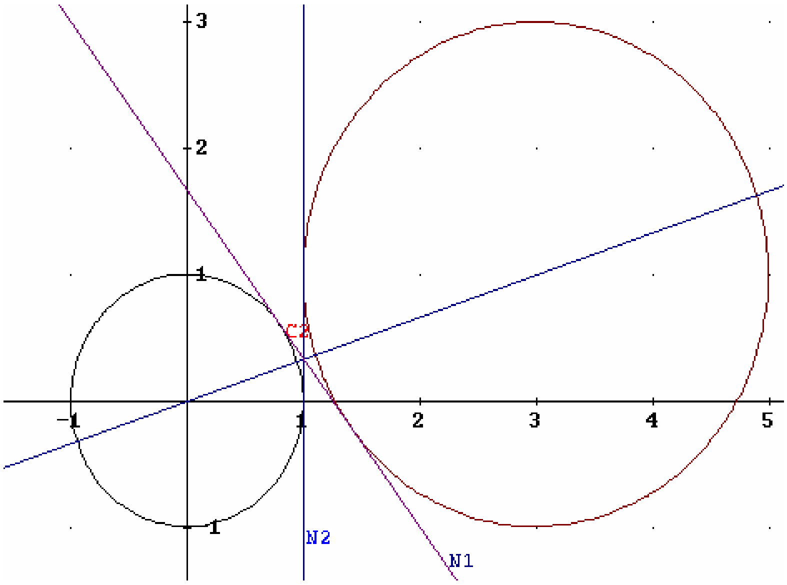
Las designaremos por N_1 y N_2.

Para hallar sus ecuaciones se impone la condición de que su distancia a O(0,0) es r =1.

Las tangentes exteriores forman parte del haz de rectas que pasan por C_2.
El haz de rectas por C_2 tiene de ecuación $y-1/3=m(x-1) \Leftrightarrow mx-y-m+1/3=0$, luego:

$d(N_1,O)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|m0-0-m+1/3|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow |-m+1/3|=\sqrt{m^2+1}$, elevando al cuadrado y despejando se obtiene sólo una solución m= -4/3 pero es conocido que sólo hay una tangente común en el caso de que las circunferencias sean tangentes, lo cual no ocurre en este caso, por tanto la otra tangente ha de ser la recta vertical (m=∞) por C_2 (como se aprecia claramente en la figura) ,luego las ecuaciones de las tangentes interiores son:

$N_1 \equiv y + 1/3 = -4/3(x - 1)$; $N_2 \equiv x = 1$



Inicio

34. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son homólogos por una homotecia inversa siendo A(0,-1), B(2,1), A'(-4,11) y B'(-10,5), se pide:

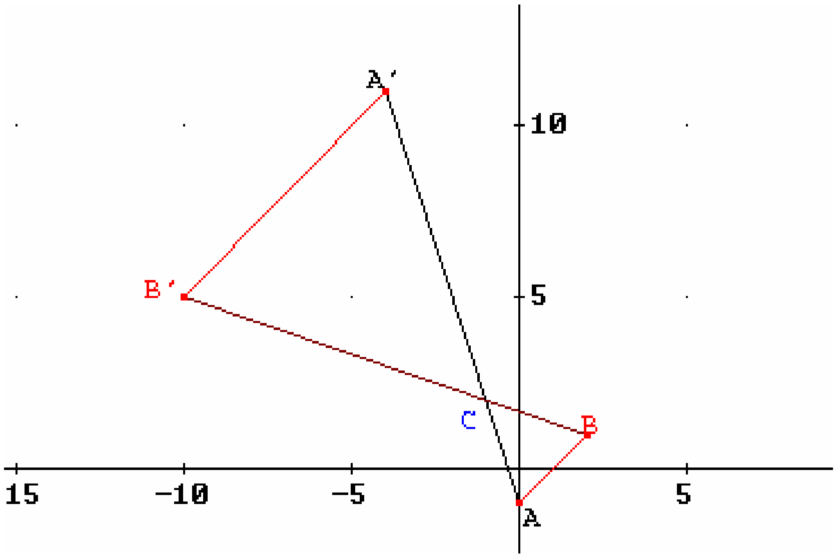
a) La ecuación de dicha homotecia.

b) La ecuación de la elipse homóloga a la de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Solución

a)

Primer método: La homotecia inversa que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$ tiene por centro el punto de intersección de dichos segmentos y por razón $k = -\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$ (ver figura)



La recta AA' tiene por ecuación y + 1= -3x .

La recta BB' tiene por ecuación y-1 = -1/3(x-2).

La intersección de ambas rectas es el punto C(-1,2).

Por otro lado, $|\overline{A'B'}| = |(6,-6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ y $|\overline{AB}| = |(2,2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Luego la homotecia pedida tiene por **centro** el punto **C(-1,2)** y razón **k**= $-\dfrac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ = **-3**.

Su ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Segundo método: Designando por C(a,b) al centro y por k la razón se verifica que

$$\begin{cases} \vec{CA'} = k\,\vec{CA} \\ \vec{CB'} = k\,\vec{CB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4-a, 11-b) = k(0-a, -1-b) \\ (-10-a, 5-b) = k(2-a, 1-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4-a = -ka \\ 11-b = -k-kb \\ -10-a = 2k-ka \\ 5-b = k-kb \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: a = -1, b = 2, k =-3

Luego la homotecia pedida tiene por **centro** el punto **C(-1,2)** y razón **k = -3**, resultado coincidente con el primer método. La ecuación es la obtenida anteriormente.

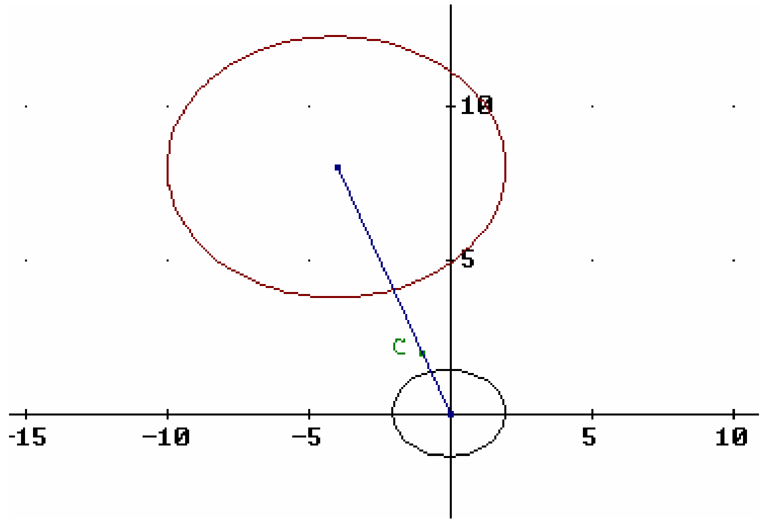
b)

Para hallar la transformada de una curva plana se despeja x e y en una de las ecuaciones matriciales y se sustituyen en dicha curva las expresiones obtenidas.

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&-3&0\\8&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4/3&-1/3&0\\8/3&0&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x'\\ y=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}y'\end{cases}$$

sustituyendo en $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ se obtiene $\frac{(-4/3-1/3x')^2}{4}+\frac{(8/3-1/3y')^2}{2}=1$, simplificando y haciendo x'=x e y'=y, se obtiene que la ecuación de la elipse transformada es:

$$\mathbf{\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-8)^2}{18}=1}$$



Inicio

35. Sea la homotecia H_1 de centro A(2,-2) y razón k=2/3 :

a) Hallar la ecuación de dicha homotecia y la de su recíproca $(H_1)^{-1}$.

b) Hallar el transformado P' del punto P(6,0) por H_1.

c) Hallar la ecuación de la homotecia de centro P' y razón r =3.

d) Estudiar si el producto de $H_{(P',\ r)} \circ H_{(A,k)}$ es una homotecia y en caso afirmativo calcular el centro y la razón.

Solución

a)

La ecuación de H_1 es:

$$\begin{pmatrix}x'-2\\y'+2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

La ecuación de $(H_1)^{-1}$ se obtiene despejando:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\ -\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -1&\frac{3}{2}&0\\ 1&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}$$

b)

El transformado del punto P(6,0) por H_1 es el punto **P'(14/3,-2/3)** pues:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\ -\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{14}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

c)

La ecuación de la homotecia $H_{(p',3)}$ es:

$$\begin{pmatrix}x'-\frac{14}{3}\\ y'+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x-\frac{14}{3}\\ y+\frac{2}{3}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{28}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\text{-}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{28}{3}&3&0\\ \frac{4}{3}&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

d)

El producto $H_{(P',r)}\circ H_{(A,k)}$ tiene como ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{28}{3}&3&0\\ \frac{4}{3}&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\ -\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac{22}{3}&2&0\\ -\frac{2}{3}&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

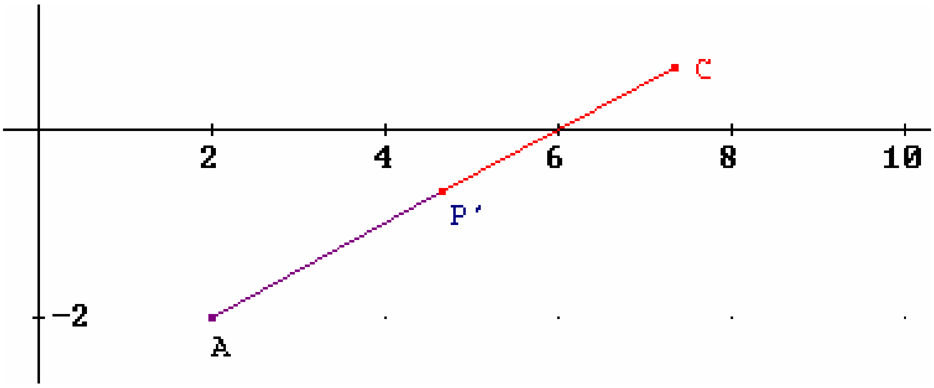
Como se ve su matriz asociada es M= $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ $=2I_2$, luego se trata de una **homotecia directa** de **razón 2**= r·p=2/3·3.

El centro es el punto doble, que se calcula resolviendo la ecuación $N\,\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\,\overline{X}=O\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\ -\frac{22}{3}&2-1&0\\ -\frac{2}{3}&0&2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{22}{3}+x=0\\ -\frac{2}{3}+y=0\end{cases}$$

, luego el centro es el punto **C(22/3,2/3)**

Es decir, el producto $H_{(P',r)} \circ H_{(A,k)}$ es otra homotecia de centro **C(22/3,2/3)** y **razón 2.**
(El centro está alineado con los centros de dichas homotecias y la razón es el producto de las razones).



Inicio

36. El producto de dos homotecias no es siempre una homotecia. Para probarlo con un contraejemplo se propone el siguiente ejercicio:

a) Hallar la ecuación de homotecia de centro C(1,-1) y razón k = 3/5.

b) Hallar el transformado O' del origen por la homotecia anterior.

c) Hallar la ecuación de homotecia de centro O' y razón r = 5/3.

d) Hallar la ecuación del producto $H_{(O',r)} \circ H_{(C,k)}$

e) Estudiar qué tipo de transformación es la obtenida en el apartado anterior y dar sus elementos.

Solución

a)
La ecuación de $H_{(C,3/5)}$ es:

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)
El transformado del origen O(0,0) por $H_{(C,3/5)}$ es el punto **O'(2/5,-2/5)** pues:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0\\-\frac{2}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

c)

La ecuación de la homotecia $H_{(O',5/3)}$ es:

$$\begin{pmatrix}x'-\frac{2}{5}\\y'+\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}x-\frac{2}{3}\\y+\frac{2}{5}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{15}\\\frac{4}{15}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&0\\0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\text{-}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{15}&\frac{5}{3}&0\\\frac{4}{15}&0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

d)

El producto $H_{(O',\,r)}\circ H_{(C,k)}$ tiene como ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{15}&\frac{5}{3}&0\\\frac{4}{15}&0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0\\-\frac{2}{5}&0&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{2}{5}&1&0\\-\frac{2}{5}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

e)

Como vemos la matriz asociada a $H_{(O',\,r)}\circ H_{(C,k)}$ es $M=I_2$ (ya que $r\cdot k=1$), y $N\neq I_3$, luego la ecuación de $H_{(O',\,r)}\circ H_{(C,k)}$ corresponde a una **traslación de vector** $\vec{\mathbf{u}}=\left(\mathbf{\frac{2}{5}},-\mathbf{\frac{2}{5}}\right)$

Inicio

37. a) Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo homólogo al de vértices A(0,0), B(2,0) C(3,2) por la semejanza resultante de aplicar un giro con centro B y ángulo de 135º con la homotecia de centro C y razón k = $2\sqrt{2}$.

b) Hallar los elementos de la semejanza obtenida en a).

Solución

a)

Para hallar los vértices del triángulo semejante (homólogo) al dado debemos calcular las ecuaciones de la semejanza, por ello vamos a hallar previamente las ecuaciones del giro y de la homotecia.

Ecuaciones de $G_{(B,135º)} = G_{(B,3\pi/4)}$:

$$\begin{pmatrix} x'-2\\ y'-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{3\pi}{4} & -\text{sen}\frac{3\pi}{4}\\ \text{sen}\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\ y-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \sqrt{2}+2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

Ecuaciones de $H_{(C,2\sqrt{2})}$:

$$\begin{pmatrix} x'-3\\ y'-2\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}x-3\\ y-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-6\sqrt{2}\\ 2-4\sqrt{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3-6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0\\ 2-4\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

Ecuaciones de la semejanza resultante de la composición $H_{(C,2\sqrt{2})} \circ G_{(B,3\pi/4)}$:

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3-6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0\\ 2-4\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \sqrt{2}+2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2\\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

Los puntos homólogos de los vértices del triángulo dado son:

El homólogo del origen A(0,0) es A'($7-2\sqrt{2}$,v$-4\sqrt{2}-2$) pues

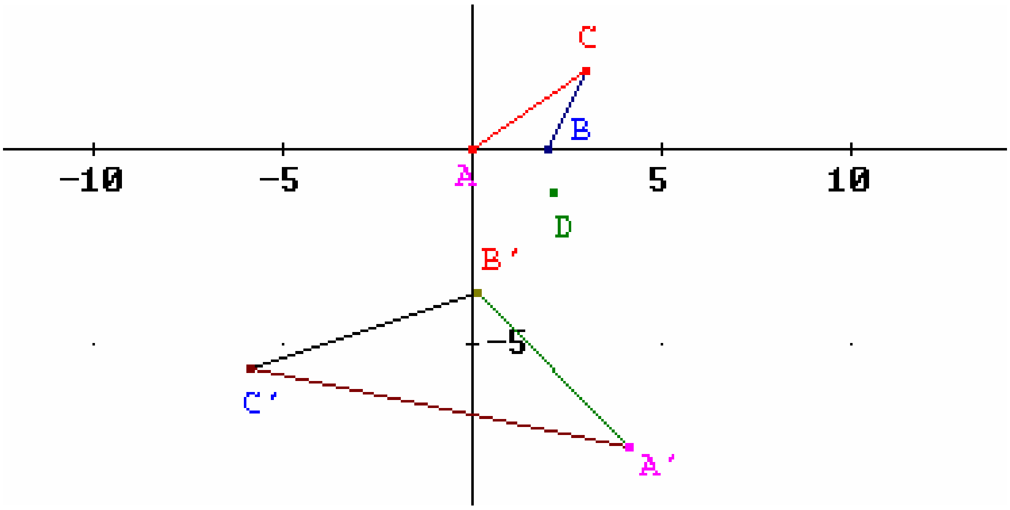
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2\\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 7-2\sqrt{2}\\ -4\sqrt{2}-2\end{pmatrix}$$

El homólogo del vértice B(2,0) es B'($3-2\sqrt{2}$, $2-4\sqrt{2}$) pues

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2\\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3-2\sqrt{2}\\ 2-4\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

El homólogo del vértice C(3,2) es C'($-2\sqrt{2}-3$, $-4\sqrt{2}$) pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2}-3 \\ -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



b)

La semejanza anterior es **directa** pues $|M|=8>0$.

Designando por D su centro y por r su razón, se verifica que $S_{(D;\,r)}=G_{(D;\alpha)}\circ H_{(D,r)}=H_{(D,r)}\circ G_{(D;\alpha)}$, donde:

La razón **k** es la de la homotecia k= $\mathbf{2\sqrt{2}}$ **.**

El **centro** es el único punto doble y se obtiene resolviendo la ecuación

$$N\,\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\,\overline{X}=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7-2\sqrt{2} & -3 & -2 \\ -4\sqrt{2}-2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, obteniéndose

$$\mathbf{D}\left(\frac{2\sqrt{2}+25}{13},\frac{8-16\sqrt{2}}{13}\right)$$

El **ángulo** α es el que verifica que

$$\begin{cases} k\cos\alpha=-2 \\ k\,\text{sen}\alpha=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\alpha=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha=3\pi/4}$$

Inicio

38. Dada la recta $m \equiv y = \frac{1}{2}x+1$ y el punto A(1,0), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial cuyo eje es la recta m con la homotecia de centro A y razón k = -5

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

a)

Se hallan las ecuaciones de la semejanza axial y de la homotecia dada.

Ecuación de la simetría axial S_e:

Es de la forma $X' = A + M\,\overrightarrow{AX}$, donde A es un punto invariante (cualquiera del eje) y $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ donde α es un ángulo que mide el doble que el que forma el eje con el eje de abscisas.

Por ejemplo, el punto A(0,1)∈m, y por definición de pendiente de la recta se tiene $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

Utilizando que $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ y que $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\alpha<\pi$, podemos calcular senα y cosα que valen $\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$ y $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, luego la ecuación de la simetría axial es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Ecuación de la homotecia $H_{(A,-3)}$:

$$\begin{pmatrix}x'-1\\y'-0\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Ecuación de la semejanza $S_{(C,k)}$ resultante del producto $H_{(A,-3)} \circ S_e$:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{8}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\10&-3&-4\\-8&-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

b)

La matriz M= $\begin{pmatrix}-3&-4\\-4&3\end{pmatrix}$ verifica que $|M|$ =-25<0, luego se trata de una **semejanza inversa** de **razón k** $=\sqrt{|-25|}=$ **5.**

Por tratarse de una semejanza inversa existe una recta e’ tal que $S_{(C,k)}= H_{(C,k)}\circ S_{e'} = S_{e'}\circ H_{(C,k)}$

El **centro** es el único punto doble, solución de N $\overline{X}=\overline{X}\Leftrightarrow (N-I)\ \overline{X}=O\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\10&-3-1&-4\\-8&-4&3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}10-4x-4y=0\\-8-4x+2y=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{C}\left(\frac{1}{2},3\right)$$

El eje **e’** es la recta que pasa por C y su dirección es la solución de la ecuación QX=X:

$$QX=X\Leftrightarrow \frac{1}{k}MX=X\Leftrightarrow (\frac{1}{k}M-I)X=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{5}-1&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}y=0\\\frac{4}{5}x-\frac{8}{5}y=0\end{cases}$$

Las dos ecuaciones anteriores son proporcionales y equivalentes a x-2y =0, luego e’ es de la forma $x-2y=c\Rightarrow \frac{1}{2}-2\cdot 3=c\Rightarrow c=-\frac{11}{2}$. Por tanto, **e’≡ x-2y =** $\mathbf{-\frac{11}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}}$

Resumiendo es una **semejanza inversa** de centro $\mathbf{C\left(\frac{1}{2},3\right)}$, **razón k = 5** y **eje e’≡ y =** $\mathbf{\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}}$**.**

Inicio

39. Dadas las rectas m ≡ y =(1/2)x-1 y m'≡ y =2x+2 y el punto P(0,-1), se pide:

a) Hallar la ecuación de la semejanza resultante de componer la simetría axial que transforma la recta m en la recta m' con la homotecia de centro P y razón k = 2

b) Calcular los elementos de la semejanza anterior indicando si se trata de una semejanza directa o inversa.

Solución

a)

Hallamos la ecuación de la semejanza axial y de la homotecia dadas.

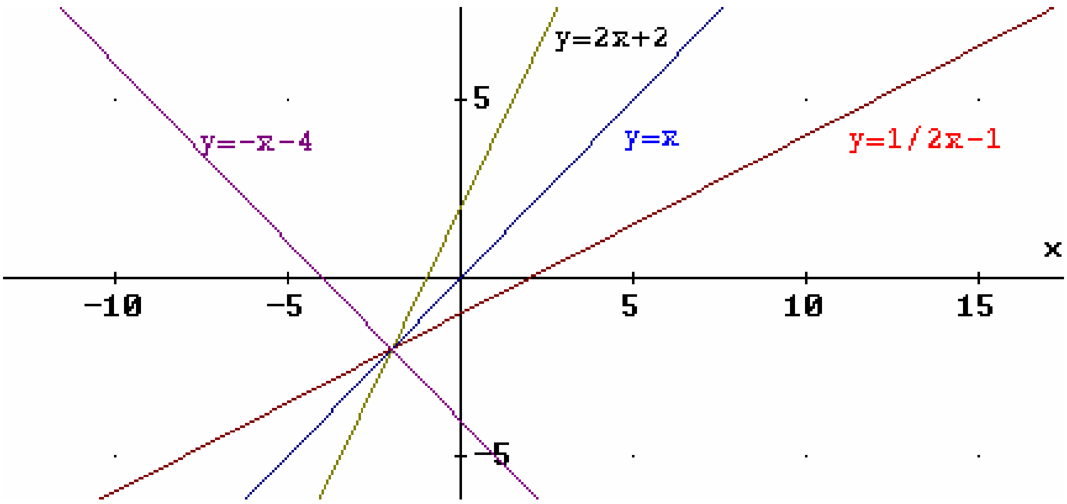
Ecuación de la simetría axial S_e:

La simetría axial que transforma la recta m en la recta m' tiene por eje e la bisectriz de ambas rectas correspondiente al ángulo menor.

Todo punto P(x,y) de la bisectriz, verifica que d(P,m) = d(P,m').

$$m \equiv y = \frac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow x-2y-2=0,\ m' \equiv y = 2x+2 \Leftrightarrow 2x-y+2=0, \text{ luego}$$

$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \equiv -x-y-4=0 \\ b_2 \equiv x-y=0 \end{cases}$$



El eje **e** de la simetría es la bisectriz **y = x**.

Tomando O(0,0)∈e y observando que $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o = \frac{\pi}{4}$, la ecuación de S_e es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuación de la homotecia $H_{(P,2)}$:

$$\begin{pmatrix} x'-0 \\ y'-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuación de la semejanza $S_{(C,k)}$ resultante del producto $H_{(P,2)} \circ S_e$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -3 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

La matriz M=$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ verifica que $|M|$ =-4<0, luego se trata de una **semejanza inversa** de **razón k = $\sqrt{|-4|}$ = 2.**

Por tratarse de una semejanza inversa existe una recta e' tal que $S_{(C,k)} = H_{(C,k)} \circ S_{e'} = S_{e'} \circ H_{(C,k)}$

El **centro** es el único punto doble, solución de $N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N-I)\,\overline{X} = O \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ -3 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{2}y = 0 \\ -3+\sqrt{2}x + \left(-\sqrt{2}-1\right)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C}\left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$$

El **eje e'** es la recta que pasa por C y su dirección es la solución de la ecuación QX=X:

$$QX=X \Leftrightarrow \frac{1}{k}MX=X \Leftrightarrow (\frac{1}{k}M-I)X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}-2\right)x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2}+2\right)y = 0 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones anteriores son proporcionales y equivalentes a $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y =0, luego e' es de la forma $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y = d$\Rightarrow$ $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}$ - (1-$\sqrt{2}$)·= d $\Rightarrow$ d= 1. Por tanto, **e'≡ $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y =1**

Resumiendo es una **semejanza inversa** de centro **C$\left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$, razón k = 2** y **eje e'≡ $\left(\sqrt{2}-1\right)$x-y=1.**

Inicio

40. a) Hallar la ecuación de la semejanza directa que transforma los puntos P(0,1) y Q(1,2) en P'(15,-2) y Q'(1,-4) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de dicha semejanza.

Solución

a)

La ecuación de una semejanza directa del plano euclídeo es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & -B \\ F & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Imponiendo que los pares de puntos P y P', Q y Q' son homólogos calculamos A, B, E y F.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & -B \\ F & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & -B \\ F & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 15 = E - B \\ -2 = F + A \\ 1 = E + A - 2B \\ -4 = F + B + 2A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene como solución: **A = - 8, B = 6, E = 21, F = 6.**

Luego la ecuación de la semejanza es: $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 21 & -8 & -6 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

b)

Designando por $S_{(C;k)}$ la semejanza obtenida en el apartado a), se verifica que:

$S_{(C;\,k)} = G_{(C;\,\alpha)} \circ H_{(C;\,k)} = H_{(C;\,k)} \circ G_{(C;\,\alpha)}$, donde:

C es el **centro** de la semejanza (único punto doble) y se obtiene resolviendo la ecuación

$$N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\,\overline{X} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 21 & -8-1 & -6 \\ 6 & 6 & -8-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 21 - 9x - 6y = 0 \\ 6 + 6x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C}\left(\mathbf{\frac{17}{13}}, \mathbf{\frac{20}{13}}\right)$$

k es la **razón** de semejanza y verifica que: **k** $= \sqrt{|M|} = \sqrt{|100|} =$ **10**

α es el **ángulo** de la semejanza y verifica que:

$$\begin{cases} k\cos\alpha = A \\ k\operatorname{sen}\alpha = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\cos\alpha = -8 \\ 10\operatorname{sen}\alpha = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{cos\alpha} = -\mathbf{\frac{8}{10}} = -\mathbf{\frac{4}{5}} \\ \mathbf{sen\alpha} = \mathbf{\frac{6}{10}} = \mathbf{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

Inicio

41. a) Hallar la ecuación de la semejanza inversa que transforma los puntos P(0,0) y Q(0, $\sqrt{3}$) en P'(2,- $\sqrt{3}$) y Q'(5,0) respectivamente.

b) Hallar la descomposición canónica de la semejanza obtenida en a).

Solución

La ecuación de una semejanza inversa del plano euclídeo es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & B \\ F & B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Imponiendo que los pares de puntos P y P', Q y Q' son homólogos calculamos A, B, E y F.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & B \\ F & B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & A & B \\ F & B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 = E \\ -\sqrt{3} = F \\ 5 = E + \sqrt{3}B \\ 0 = F - \sqrt{3}A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene como solución: **A = - 1, B = $\sqrt{3}$, E = 2, F = - $\sqrt{3}$.**

Luego la ecuación de la semejanza es: $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

b)

Designando por $S_{(C;k)}$ la semejanza obtenida en el apartado a), se verifica que:

$S_{(C;\,k)} = S_e \circ H_{(C;\,k)} = H_{(C;\,k)} \circ S_e$, donde:

C es el **centro** de la semejanza (único punto doble) y se obtiene resolviendo la ecuación

$$N\,\overline{X} = \overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\,\overline{X} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x + \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C(1,\ 0)}$$

k es la **razón** de semejanza y verifica que: **k** = $\sqrt{-|M|} = \sqrt{|-4|} = \mathbf{2}$

e es el **eje** de la semejanza y es la recta que pasa por C y su dirección es la solución de:

$$QX=X \Leftrightarrow \frac{1}{k} MX=X \Leftrightarrow (\frac{1}{k} M\text{-}I)X=O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones anteriores son proporcionales y equivalentes a $\sqrt{3}$ x-y =0, luego e es de la forma $\sqrt{3}$ x-y = d$\Rightarrow$ $\sqrt{3}\cdot 1$- 0=d $\Rightarrow$ d= $\sqrt{3}$.

Inicio

Por tanto, e ≡ $\left(\sqrt{3}\right)$x-y =$\left(\sqrt{3}\right)$

PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

42. Clasificar la transformación del espacio dada por la ecuación matricial, obteniendo sus elementos característicos.

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema.

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&0&1&0\\3&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

43. Obtener la ecuación matricial de la traslación del espacio de vector $\vec{v}=(1,0,0)$.

Solución

44. Demostrar que el producto de dos traslaciones en el espacio es conmutativo.

Solución

45. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

46. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1+\sqrt{3}}{3}&\frac{1-\sqrt{3}}{3}\\\frac{1-\sqrt{3}}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1+\sqrt{3}}{3}\\\frac{1+\sqrt{3}}{3}&\frac{1-\sqrt{3}}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$$

Solución

47. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11}\\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11}\\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Solución

48. En el espacio euclídeo se busca obtener la ecuación matricial correspondiente al giro de ángulo α :

a) alrededor del eje X.
b) alrededor del eje Y.
c) alrededor del eje Z.

Solución

49. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) Giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje Y.

b) Giro de 60º alrededor del eje Y y giro de 30º alrededor del eje X.

Solución

50. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje $e\equiv\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}$

b) giro de 60º alrededor del eje $e\equiv\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}$ **y giro de 30º alrededor del eje X**

Solución

51. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 240º alrededor del eje: $e\equiv\begin{cases}x=1-\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

Solución

52. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 301º 15' alrededor del eje: $e\equiv\begin{cases}3x-4y+2=0\\z=2\end{cases}$

Solución

53. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

54. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos.

Solución

55. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

56. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano z = 0

Solución

57. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano x - 2y = 7

Solución

58. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano

$$40x - 60y - 40\sqrt{3}z = 1$$

Solución

59. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos x = 0 y z = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

60. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos $3y - 4z + 6 = 0$ y $3y - 4z - 4 = 0$. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

61. Obtener la ecuación matricial del producto de la simetría especular de plano $3x - 4z + 5 = 0$ por la traslación de vector $\vec{t} = (15, 0, -20)$. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

62. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial y calcular los elementos principales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

63. Dada la transformación geométrica del espacio euclídeo E_3:

$\overline{X}' = N\,\overline{X}$, siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, clasificarla y hallar sus elementos característicos.

Solución

64. Dada la transformación geométrica de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Clasificarla.

b) Hallar sus elementos característicos.

Solución

65. Clasificar la siguiente transformación geométrica y obtener sus elementos característicos:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

Solución

66. Sea T la transformación geométrica de R^3 de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Obtener los valores de k para los cuales T es un movimiento

b) Clasificar T para aquellos valores de k para los que sea un movimiento

Solución

67. Hallar las ecuaciones de la composición del giro de ángulo π con respecto a la recta r: (0,0,1) + t (0,1,1) con la traslación de vector (1,1,0) y determinar de qué tipo de movimiento se trata.

Solución

68. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una rotación y una traslación del espacio R^3 sea otra rotación y no un movimiento helicoidal?

Solución

69. Sean las simetrías especulares S_1, S_2, S_3, S_4 de planos:

π_1: x-y+z=0, π_2: x-y+z-3=0, π_3:-2x-y+z=0, π_4: 2y+z=0 respectivamente.

Clasificar las trasformaciones:

a) $S_1 o S_2 o S_3$

b) $S_1 o S_2 o S_3 o S_4$

Solución

70. Identificar la transformación T, tal que los puntos A=(1,2,3), B=(1,1,1), C=(-1,2,3) y D=(1,0,2) se transforman en A'=(2,-3,0), B'=(1,-1,0), C'=(2,-3,2), y D'=(0,-2,0) respectivamente.

Solución

71. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante de plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ de E_3:

a) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

b) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

c) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

d) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

72. Estudiar el movimiento resultante de aplicar la simetría respecto del plano $\pi \equiv y-1=0$ y la traslación tal que: T(O)=(1,0,1). ¿Es conmutativo este producto?

Solución

73. Escribir las ecuaciones del movimiento resultante de aplicar la rotación respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$ y de ángulo $\alpha=-90^\circ$ y la traslación de vector (1,0,1).

Solución

74. Determinar la transformación que resulta de aplicar el movimiento helicoidal T_2 y a continuación la simetría deslizante T_1:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad T_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

75. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-2y+2z)+1 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y+2z)+1 \\ z' = \frac{1}{3}(2x+2y+z)+2 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una simetría S respecto de un plano π por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al plano π.

c) Hallar la ecuación de π y el vector $\vec{u}$.

Solución

76. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una simetría especular y una traslación del espacio R^3 sea otra simetría especular y no una simetría deslizante?

Solución

77. Hallar las ecuaciones del movimiento helicoidal de eje $e \equiv \begin{cases} \text{pasa por } A(1,1,1) \\ \text{vector } (0,1,0) \end{cases}$ **y ángulo** $\alpha = -45^\circ$ **y vector** $\vec{u} = (1,1,1)$ **de** E_3**.**

i) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

ii) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

iii) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

iv) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

78. Encontrar las ecuaciones del producto de una rotación de amplitud $\frac{\pi}{2}$ **con respecto a la recta que tiene como vector director a** $\vec{v} = (1,1,0)$ **y pasa por el punto (1,1,1) con la traslación de vector** $\vec{u} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

Solución

79. Una superficie en R^3 tiene de ecuación

$$2x^2 + \sqrt{2}x + 2y^2 + \sqrt{2}y + 2z^2 - 2z = 1 .$$

Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia:
$R' = \left\{ A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right); \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right\}$ **e indicar el tipo de transformación realizada.**

Solución

80. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{13}}{26}y + \frac{\sqrt{13}}{13}z \\ y' = -\frac{3\sqrt{13}}{26}x + \frac{8-9\sqrt{3}}{26}y + \frac{-6-3\sqrt{3}}{13}z \\ z' = -\frac{\sqrt{13}}{13}x + \frac{-6-3\sqrt{3}}{13}y + \frac{9-2\sqrt{3}}{13}z + 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una rotación G respecto de un eje e de amplitud α por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al eje e.

c) Hallar la ecuación de e, el ángulo α y el vector $\vec{u}$.

Solución

81. Una curva en R^3 tiene de ecuación $4x^2-4xy+8xz-11x+y^2-4yz+10y+4z^2-2z+7$. Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia:

$$R' = \left\{ A=(1,0,0);\ \vec{u}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),\ \vec{v}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\ \vec{w}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \right\}$$

indicar el tipo de transformación realizada.

Solución

42. Clasificar la transformación del espacio dada por la ecuación matricial obteniendo sus elementos característicos.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

Según el procedimiento descrito, en este problema se aprecia inmediatamente que la matriz M es la identidad, que, naturalmente es ortogonal y cuyo determinante es 1. Se trata de un **movimiento directo**, sin puntos invariantes puesto que:

$$\text{rg}(M - I) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

mientras que

$$\text{rg}(N - I) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

es decir, es una **traslación**.

Elementos característicos:

El vector de la traslación es el vector $\overrightarrow{OO'}$ y dado que en la primera columna de la ecuación matricial tenemos el transformado del origen $T(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, el vector de la traslación es: $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Otras formas de expresar las ecuaciones de esta transformación son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{o también:} \quad \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \\ z' = z + 3 \end{cases}$$

Inicio

43. Obtener la ecuación matricial de la traslación del espacio de vector $\vec{v} = (1,0,0)$.

Solución

La ecuación general de una traslación es $X' = T(A) + M\overrightarrow{XA}$ siendo A un punto cualquiera del espacio y M la matriz identidad. En concreto, si se toma como punto A el origen del sistema de referencia, cuyo transformado es $T(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que la ecuación pedida es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que se puede expresar también mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

se trata, como puede verse, de una traslación de una unidad en dirección del eje X

Inicio

44. Demostrar que el producto de dos traslaciones en el espacio es conmutativo.

Solución

La ecuación matricial de una traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 1 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si se tiene otra traslación $T_{\vec{w}}$ de vector $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ su ecuación matricial será

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_x & 1 & 0 & 0 \\ w_y & 0 & 1 & 0 \\ w_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se aplican sucesivamente ambas transformaciones primero $T_{\vec{v}}$ y luego $T_{\vec{w}}$

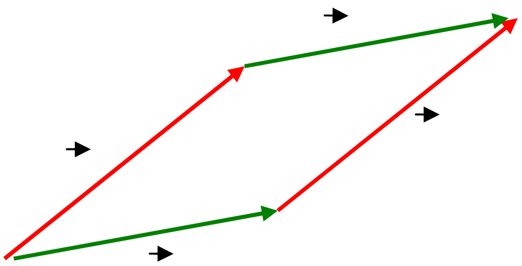
$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x+v_x&1&0&0\\w_x+v_y&0&1&0\\w_x+v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se aplican en el orden inverso, primero $T_{\vec{w}}$ y al resultado, $T_{\vec{v}}$

$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x&1&0&0\\v_y&0&1&0\\v_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\w_x&1&0&0\\w_y&0&1&0\\w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\v_x+w_x&1&0&0\\v_x+w_y&0&1&0\\v_x+w_z&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

siendo la transformación resultante igual en ambos casos.

Gráficamente puede verse en el siguiente dibujo, en el que se ha representado un punto cualquiera del espacio P y su transformado por el producto de ambas traslaciones P''.



Inicio

45. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz M de la transformación vectorial asociada es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

Se calcula $M.M^t = I$ lo cual indica que por ser M ortogonal, la transformación dada es un movimiento.

2. **Calcular el determinante de M**.

$|M| = 1$ por lo que se trata de un movimiento directo en el espacio.

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Cálculo de los puntos invariantes por la transformación.

Estos puntos se obtienen de la ecuación matricial $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X} = 0$

$$(N-I)\overline{X} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula el rango de N-I (matriz ampliada del sistema)

$$\mathrm{rg}(\mathrm{N}-\mathrm{I})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2 \text{ puesto que } \begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1\neq 0$$

La matriz de coeficientes es

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}-\mathrm{I})=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2$$

Como rg(N-I) = rg(N-I) = 2 el sistema es compatible indeterminado, por lo que se trata de una **rotación**.

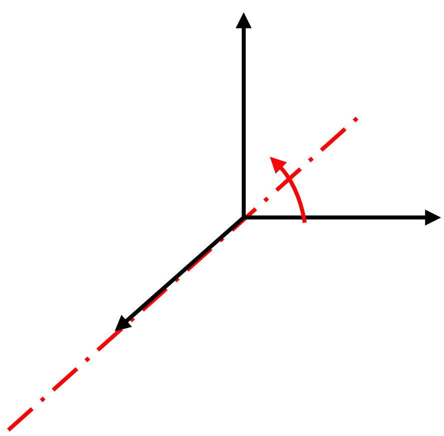
Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

- **Eje de giro:** El conjunto de puntos invariantes forma una recta (el eje de giro). El eje de giro se obtiene de resolver el sistema $\mathrm{N}\overline{\mathrm{X}}=\overline{\mathrm{X}}\Rightarrow(\mathrm{N}-\mathrm{I})\overline{\mathrm{X}}=0$

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$$

ecuaciones del eje X, por tanto se trata de un giro alrededor del eje X del sistema de referencia.



NOTA:
Obsérvese que la matriz M, matriz de la transformación vectorial asociada al giro tiene en su primera columna el vector (1,0,0).

$$M=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \boxed{0} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dado que en la primera columna de la matriz M aparece el vector transformado del primer vector del sistema de referencia (el vector del eje X), se observa que este vector es un vector invariante. Como conclusión, de la observación de la matriz M se podía saber que se trata bien de un giro bien de un movimiento helicoidal, donde el eje es paralelo al eje X.

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo, se toma un vector perpendicular al eje. Como en este caso el eje de giro es el eje X, se puede tomar el vector del eje Y, $\vec{j}=(0,1,0)$ se calcula su transformado por la transformación vectorial de matriz M

$$\vec{j}'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora se calcula el ángulo que forman $\vec{j}$ y $\vec{j}'$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{j}\bullet\vec{j}'}{|\vec{j}||\vec{j}'|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\quad \alpha=\pm 60^{\circ}$$

para ver el signo del giro se calcula el producto vectorial $\vec{j}\wedge\vec{j}'$ si el producto vectorial tiene el sentido del vector director del eje, $\vec{i}=(1,0,0)$ el ángulo es el positivo y en caso contrario, el negativo.

$$\vec{j}\wedge\vec{j}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}$$

por lo que el ángulo de giro es $\alpha = 60^{\circ}$

Inicio

46. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

Se comienza estudiando la matriz M de la transformación vectorial.

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por ser M ortogonal, se trata de un movimiento.

2. **Calcular el determinante de M.**

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1$$

se trata, por tanto de un movimiento directo.

3. **Estudiar el tipo de movimiento:**

Se estudian ahora los puntos invariantes.

Para ello, primero se ordena la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

para calcular los puntos invariantes se impone que X’ = X

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se calcula el determinante de la matriz de coeficientes obteniéndose |M-I|=0 se calculan los menores de orden dos, obteniéndose para el primero de ellos.

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$$

por tanto, rg (M-I)=2

Ahora se calcula el rango de la matriz ampliada del sistema, $\mathrm{rg}\left(I-M\middle|O'\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$ se calculan los menores de 3x3, combinando con la última columna:

$$\begin{vmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$ pues la última columna es -1 por la 1ª

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$ por igual motivo que el menor anterior

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$, calculado

Obteniéndose, por tanto, rg (N-I) = $\mathrm{rg}\left(I-M \middle| O'\right)$ =2, el sistema es compatible indeterminado, luego la transformación dada es un **giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de giro es la solución del sistema que da los puntos invariantes:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

las dos primeras ecuaciones son independientes, como se comprobó al calcular el menor (3,3) de M-I, quedando

$$\begin{cases} -2x+(1+\sqrt{3})y+(1-\sqrt{3})z+(-1+\sqrt{3})=0 \\ (1-\sqrt{3})x-2y+(1+\sqrt{3})z+(-1-\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema queda:

$$e \equiv \begin{cases} x=z+1 \\ y=z+1 \end{cases}$$, ecuaciones del eje de giro

expresando esta recta en forma paramétrica, con parámetro λ queda:

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

recta que pasa por el punto (1,1,0) y cuyo vector director es $\vec{v}=(1,1,1)$

Cálculo del ángulo:

Se toma un vector perpendicular al vector director de la recta. Se elige, por ejemplo, $\vec{w}=(1,0,-1)$

Se calcula el transformado de este vector por la transformación vectorial de matriz M:

$$\vec{w}\,'=M\vec{w}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

se calcula ahora el ángulo formado por $\vec{w}$ y $\vec{w}\,'$ a partir de su producto escalar

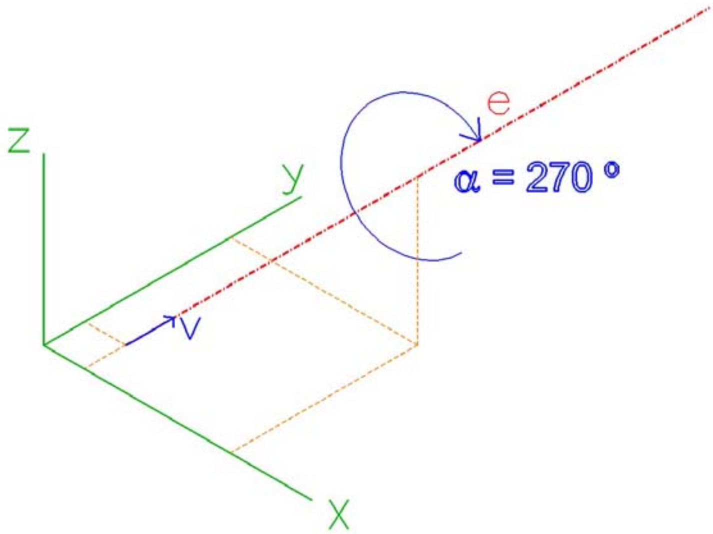
$$\cos\alpha=\frac{\vec{w}\cdot\vec{w}\,'}{\left|\vec{w}\right|\left|\vec{w}\,'\right|}=\frac{(1,0,-1)(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}}=0$$

de donde se obtiene que $\alpha = \pm\, 90^{\circ}$

Para ver el sentido del giro se calcula el producto vectorial de $\vec{w}$ y $\overrightarrow{w'}$ y se ve si tiene igual sentido que $\vec{v}=(1,1,1)$ o el contrario.

$$\vec{w}\wedge\overrightarrow{w'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

como el vector obtenido tiene signo contrario a $\vec{v}$, el ángulo de giro es α = - 90º (ó α = 270º)



Inicio

47. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: M M^t = I.

Si se denomina $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$ y

$M = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{11}-3 & 1-3\sqrt{11} \\ \sqrt{11}-3 & 9 & -\sqrt{11}-3 \\ 1+3\sqrt{11} & \sqrt{11}-3 & 1 \end{pmatrix}$ se comienza estudiando la matriz M. Dado que $M.M^t = I$

2. **Calcular el determinante de M.**

$|M| = \left|\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{11}-3 & 1-3\sqrt{11} \\ \sqrt{11}-3 & 9 & -\sqrt{11}-3 \\ 1+3\sqrt{11} & \sqrt{11}-3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$ se trata de un movimiento directo.

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Se estudian ahora los puntos invariantes de la transformación, que los da la ecuación $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X} = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11}-1 & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{9}{11}-1 & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ para calcular el rango de la matriz N-I, se puede apreciar que la primera y la tercera columna son iguales, por tanto, se calcula el determinante que se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna. Este menor dará el rango de N-I, pero también el de M-I de manera que se puede asegurar que rango(N-I) = rango (M-I), es decir, que el sistema es compatible.

Como $|M-I| = \begin{vmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1-3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{1+3\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{10}{11} \end{vmatrix} = 0$ y, sin embargo, tomando el primer menor,

$\begin{vmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{\sqrt{11}-3}{11} & -\frac{2}{11} \end{vmatrix} = \frac{2}{11} \neq 0 \Rightarrow$ rango(N-I) = rango (M-I) = 2 $\Rightarrow$ se trata de una **rotación**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de rotación es la solución del sistema.

$$\begin{cases} \frac{-\sqrt{11}-3}{11} - \frac{10}{11}x - \frac{\sqrt{11}+3}{11}y + \frac{1-3\sqrt{11}}{11}z = 0 \\ -\frac{2}{11} + \frac{\sqrt{11}-3}{11}x - \frac{2}{11}y - \frac{\sqrt{11}+3}{11}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{11}-3-10x-\left(\sqrt{11}+3\right)y+\left(1-3\sqrt{11}\right)z=0 \\ -2+\left(\sqrt{11}-3\right)x-2y-\left(\sqrt{11}+3\right)z=0 \end{cases}$$

Esta es la ecuación de la recta en el espacio. Para pasarla a paramétricas, se hace despejando x en la primera ecuación $x = -\frac{\sqrt{11}+3}{10}y + \frac{1-3\sqrt{11}}{10}z - \frac{\sqrt{11}+3}{10}$ sustituyendo en la segunda y despejando y en función de z queda $y = -3z-1$ y colocados en la ecuación en x queda x = z. Con lo cual, utilizando z como parámetro de la recta y llamándolo t queda

$$\text{eje} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1-3t \\ z = t \end{cases}$$

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo de giro, se elige un vector perpendicular al eje y se ve en qué vector se transforma mediante la matriz M. Un vector paralelo al eje es (1,-3,1) por lo que uno perpendicular a éste puede ser $\vec{v}=(-1,0,1)$ su transformado es:

$$\vec{v}\,'=M\vec{v}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{11}-3 & 1-3\sqrt{11}\\ \sqrt{11}-3 & 9 & -\sqrt{11}-3\\ 1+3\sqrt{11} & \sqrt{11}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{v}\,'=\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

el ángulo formado por ambos vectores viene de $\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}.\vec{v}\,'}{|\vec{v}|.|\vec{v}\,'|}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=0\ \Rightarrow\ \alpha=\pm 90^{o}$, para ver cuál es el signo correcto, se calcula el producto vectorial

$$\vec{v}\wedge\vec{v}\,'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}}\end{vmatrix}=\frac{2}{\sqrt{11}}\vec{i}-\frac{6}{\sqrt{11}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{11}}\vec{k}$$

dado que este vector es paralelo al eje de giro, el ángulo es $\alpha = 90^{o}$.

Inicio

48. En el espacio euclídeo se busca obtener la ecuación matricial correspondiente al giro de ángulo α :

a) alrededor del eje X.
b) alrededor del eje Y.
c) alrededor del eje Z.

Solución

La ecuación de un giro en el espacio viene dada por X' = A + M (X-A) siendo A un punto del eje de giro, por tanto, un punto invariante de la transformación.

Como es conocido, la ecuación del giro vectorial en una base ortonormal, B, en la que el primer vector tiene la dirección del eje de giro es:

$$M_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha\\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$ siendo α el ángulo del giro.

a) alrededor del eje X

Esta es la matriz de la transformación vectorial en una base cuyo primer vector es el eje X, $\vec{u}=(1,0,0)$ y los otros dos vectores tales que formen con él una referencia ortonormal. Por tanto, en este caso, se pueden tomar $\vec{v}=(0,1,0)$ y $\vec{w}=(0,0,1)$. Es decir, la propia base canónica del espacio.

Por tanto, tomando un punto cualquiera del eje como punto invariante para la ecuación, por ejemplo A = (0,0,0) quedando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \text{ o, simplemente } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y también puede expresarse en la forma $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ o,

en forma de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\alpha - z\,\mathrm{sen}\alpha \\ z' = y\,\mathrm{sen}\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

b) alrededor del eje Y

En este caso, el vector del eje de giro es $\vec{v} = (0,1,0)$ pudiendo tomar, para completar una base ortonormal, los vectores $\vec{u} = (0,0,1)$ y $\vec{w} = (1,0,0)$, comprobándose que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Se esta base la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

Entonces, la matriz del cambio de base a la base canónica es:

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matriz que tiene en columnas los vectores de la base B respecto de la canónica. La matriz del giro en la base canónica será, por tanto,

$$M_c = PM_BP^{-1} \text{ por lo que } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \mathrm{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

y, tomando nuevamente el origen como punto invariante queda la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \mathrm{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ o también } \begin{cases} x' = x\cos\alpha + z\,\mathrm{sen}\alpha \\ y' = y \\ z' = -x\,\mathrm{sen}\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

c) alrededor del eje Z

En este caso, el vector del eje de giro es $\vec{v} = (0,0,1)$ pudiendo tomar, para completar una base ortonormal, los vectores $\vec{u} = (1,0,0)$ y $\vec{w} = (0,1,0)$, comprobándose que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Por el mismo razonamiento anterior, la matriz de cambio de base es:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ y } M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\text{sen}\alpha\\0&\text{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1} \text{ quedando}$$

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\text{sen}\alpha\\0&\text{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow M=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\text{sen}\alpha&0\\\text{sen}\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial de la transformación, tomando otra vez el origen como punto invariante por pertenecer al eje:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\text{sen}\alpha&0\\\text{sen}\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{o también} \quad \begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\,\text{sen}\alpha\\y'=x\,\text{sen}\alpha+y\cos\alpha\\z'=z\end{cases}$$

Inicio

49. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) Giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje Y.

b) Giro de 60º alrededor del eje Y y giro de 30º alrededor del eje X.

Solución

a) En el problema anterior se obtuvieron las ecuaciones correspondientes a los giros alrededor de los ejes coordenados.

Si se llama $G_{(X,30^o)}$ al primero de los giros, su ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos 30^o&-\text{sen}30^o\\0&0&\text{sen}30^o&\cos 30^o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se llama $G_{(y,60^o)}$ al segundo de los giros, su ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 60^o&0&\text{sen}60^o\\0&0&1&0\\0&-\text{sen}60^o&0&\cos 60^o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

El giro buscado tiene como ecuación, aplicando el giro alrededor del eje X, y al resultado, el giro alrededor del eje Y.

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1&0\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ quedando } \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Si se llama $N=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$ y M a la matriz de la transformación vectorial asociada

$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$ se comprueba que $MM^t= I$ y que $|M|=1$ por lo que se trata de un movimiento directo.

Estudiar el tipo de movimiento:

Se calculan ahora los puntos invariantes de la ecuación matricial

$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{\sqrt{3}-2}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}-4}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ para estudiar el sistema se calcula $|M-I|=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{\sqrt{3}-2}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}-4}{4}\end{vmatrix}=0$ como el primer menor de 2x2 es distinto de cero, se tiene que rango(N-I) = rango(M-I) = 2 por tanto, hay una recta de puntos invariantes y el movimiento resultante de la composición de ambos giros **es un giro.**

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de giro se obtiene de resolver el sistema que da los puntos invariantes. Tomando las dos primeras ecuaciones (visto que son independientes) queda

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{3}{4}z=0 \\ \frac{\sqrt{3}-2}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad e \equiv \begin{cases} x=-\sqrt{3}z \\ y=-(\sqrt{3}+2)z \end{cases}$$

es la ecuación del eje. El vector director del eje puede ser $\vec{u}=(\sqrt{3},\sqrt{3}+2,-1)$ y un punto del eje es el origen de coordenadas (lo cual es lógico pues el origen es la intersección de los ejes de los giros iniciales, por tanto, punto invariante de cada uno de los giros).

Cálculo del ángulo:

Se obtiene un vector perpendicular al eje, por ejemplo, $\vec{v}=(1,0,\sqrt{3})$ y se calcula el transformado de $\vec{v}$ por la transformación vectorial asociada $\vec{v}\,'=M\,\vec{v} \Leftrightarrow$

$$\vec{v}\,'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}+2}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}\,'}{|\vec{v}||\vec{v}\,'|}=\frac{\left(1,0,\sqrt{3}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}+2}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\cdot 2}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-1}{4}=\frac{3\sqrt{3}-2}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm\, 66^{\circ}\ 27'\ 06''$$

$$\vec{v}\wedge\vec{v}\,'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}=\frac{3}{2}\vec{i}+\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

como este vector es paralelo a $\vec{u}=(\sqrt{3},\sqrt{3}+2,-1)$ el ángulo es el positivo:

$$\alpha = 66^{\circ}\ 27'\ 06''$$

b)

Ahora,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$ también MM^t= I y que |M|=1 por lo que se trata de un movimiento directo.

Estudiar el tipo de movimiento:

Se calculan ahora los puntos invariantes. $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}-2}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rango (M-I) = 2 pues $|M-I| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}-2}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-4}{4} \end{vmatrix} = 0$ siendo el primer menor distinto de cero por lo tanto, rango(M-I) = rango(N-I) = 2 $\Rightarrow$ se trata de **una rotación**

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

Para calcular el eje se resuelve el sistema $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X} = 0$. Para ello se toman las dos primeras ecuaciones resultantes de la ecuación matricial (pues el menor antes dicho es no nulo) quedando:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}-2}{2}y-\frac{1}{4}z=0 \end{cases}$$ quedando $e\equiv\begin{cases} x=\sqrt{3}z \\ y=\left(\sqrt{3}+2\right)z \end{cases}$ ecuación del eje de rotación.

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo se puede usar ahora la propiedad de que la traza de la matriz M no varía respecto de los cambios de base y vale traza(M) = 1+2 cosα

$$\mathrm{traza}(M)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)-1\right]=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ α = ± 66º 27’ 06’’. Para calcular el signo, se toma un vector perpendicular al eje. Como el vector director del eje puede ser $\vec{u}=(\sqrt{3},\sqrt{3}+2,1)$ un vector perpendicular a éste es $\vec{v}=(-1,0,\sqrt{3})$ su transformado viene dado por:

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

siendo $\vec{v}\wedge\vec{v}'=\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}+\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3},2+\sqrt{3},1\right)$ vector paralelo al vector director del eje

$\Rightarrow$ **α = 66º 27’ 06’’**

NOTA

La conclusión que puede sacarse es que, en general, el producto de dos giros no es conmutativo

50. Se pide obtener los elementos característicos de la transformación geométrica correspondiente a los siguientes productos de dos giros:

a) giro de 30º alrededor del eje X y giro de 60º alrededor del eje $e \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) giro de 60º alrededor del eje $e \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ **y giro de 30º alrededor del eje X**

Solución

En este caso se trata del producto de dos giros de ejes paralelos.
El primero de los giros es el del problema anterior y su ecuación es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 30^{o} & -\text{sen}30^{o} \\ 0 & 0 & \text{sen}30^{o} & \cos 30^{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El segundo tiene por ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60^{o} & -\text{sen}60^{o} \\ 0 & \text{sen}60^{o} & \cos 60^{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) El producto de ambos giros es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

para clasificar esta transformación, se comienza estudiando la matriz M, que es

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cumpliéndose que $MM^t = I$ y $|M| = 1$ $\Rightarrow$ movimiento directo.

Estudiar el tipo de movimiento:

Para obtener los elementos característicos se comienza estudiando los puntos invariantes, resultado de la ecuación matricial $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$ que en este caso queda:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -1\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & -1\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Estudiando el sistema, se observa directamente que rango(M-I) = rango(N-I) = 2 por lo que se puede asegurar que se trata de un **giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

Para obtener el eje se resuelve el sistema, que es equivalente a:

$$e_1 \equiv \begin{cases}\frac{1+\sqrt{3}}{2} - y - z = 0\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} + y - z = 0\end{cases} \Leftrightarrow e_1 \equiv \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ z = \frac{1}{2}\end{cases}$$

este eje es paralelo a los ejes de los giros originales.

Cálculo del ángulo:

Para calcular el ángulo se usa esta vez la propiedad de la traza de la matriz M

Traza(M) = 1+2 cos(α) ⇔ 1 = 1 + 2 cos(α) ⇒ α = ± 90 º.

Para comprobar el signo, se toma un vector perpendicular al eje, por ejemplo, el $\vec{v} = (0,0,1)$ y se calcula su transformado $\vec{v}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ comprobándose fácilmente que $\vec{v} \wedge \vec{v}' = (1,0,0)$ por lo que el ángulo de giro es α = 90 º.

b) El producto de ambos giros es:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & 0 & 0 & -1\\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La matriz M es la misma del apartado anterior, por lo que también se trata de **un giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :

Cálculo del eje del giro:

El eje de giro se obtiene igual que en el apartado anterior resolviendo el sistema $N\overline{X}=\overline{X}\Rightarrow(N-I)\overline{X}=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & 0 & -1 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_2 \equiv \begin{cases} \frac{\sqrt{3}+1}{2}-y-z=0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow e_2 \equiv \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Cálculo del ángulo:

El ángulo de giro es el mismo que en el apartado anterior puesto que la matriz M es la misma que en ese caso luego ángulo de giro es **α = 90 º.**

La **conclusión** que puede sacarse es que el producto de dos giros cuyos ejes son paralelos es otro giro con un nuevo eje paralelo a ambos ejes y con un ángulo de giro igual a la suma de ambos ángulos de giro.

Inicio

51. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 240º alrededor de eje: $e\equiv\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Solución

Como se vio anteriormente, la ecuación de un giro en el espacio viene dada por X' = A + M (X-A) siendo A un punto del eje de giro, por tanto, un punto invariante de la transformación. Como un punto del eje puede ser A=(1,0,0), queda por obtener la matriz M.

En este caso, un vector unitario director del eje es $\vec{u}=\frac{(-1,-1,1)}{|(-1,-1,1)|}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Se elige una referencia ortonormal del espacio que tenga a este vector como primer vector de la base. Los otros dos vectores pueden ser $\vec{v}=\frac{(1,0,1)}{|(1,0,1)|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ que es perpendicular a $\vec{u}$ y el vector $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

La ecuación del giro vectorial en la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es:

$M_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos 240^o&-\operatorname{sen}240^o\\0&\operatorname{sen}240^o&\cos 240^o\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ para pasar de esta matriz en la base B a la matriz en la base canónica se utiliza la matriz del cambio de base de la base B a la canónica del espacio $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, matriz que tiene en columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la canónica.

$$M=PM_BP^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

La ecuación pedida es, por tanto, $X'=A+M(X-A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$ o también

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=y+1\\y'=-z\\z'=-x+1\end{cases}$$

Inicio

52. Se pide obtener la ecuación matricial del giro del espacio de 301º 15' alrededor del eje: $e\equiv\begin{cases}3x-4y+2=0\\z=2\end{cases}$

Solución

La ecuación de un giro en el espacio toma la forma X' = A + M (X-A) siendo A un punto del eje de giro y M la matriz del giro vectorial en la referencia canónica del espacio.

La matriz M_B del giro vectorial es conocida cuando $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es una base ortonormal tal que $\vec{u}$ es de la dirección del eje de giro. Entonces, $M_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$

El primer paso será obtener el vector $\vec{u}$. De las ecuaciones implícitas del eje se puede pasar a las paramétricas, utilizando como parámetro la variable y.

$$e \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ z = 0 \end{cases} \text{ o llamando } \lambda \text{ al parámetro } e \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}.$$

De aquí se obtiene que el vector director de la recta es (4,3,0) y normalizado, $\vec{u} = \frac{(4,3,0)}{|(4,3,0)|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$; un vector perpendicular a éste puede ser $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$, vector unitario que es, por tanto, $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$; siendo el tercer vector de B, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (0,0,-1)$.

La matriz de cambio de base de la base B a la canónica es aquella que tiene por columnas los vectores de la base B es, por tanto, $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ cuya matriz inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz $M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(301^\circ 15') & -\operatorname{sen}(301^\circ 15') \\ 0 & \operatorname{sen}(301^\circ 15') & \cos(301^\circ 15') \end{pmatrix} \Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}51877326 & 0{,}85491187 \\ 0 & -0{,}85491187 & 0{,}51877326 \end{pmatrix}$ ahora se aplica el cambio de base

$$M = PM_BP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}51877326 & 0{,}85491187 \\ 0 & -0{,}85491187 & 0{,}51877326 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8267583735 & 0{,}2309888352 & -0{,}5129471220 \\ 0{,}2309888352 & 0{,}6920148864 & 0{,}6839294959 \\ 0{,}5129471220 & -0{,}6839294959 & 0{,}5187732600 \end{pmatrix}$$

Para obtener la ecuación de la transformación, se elige un punto de la recta, por ejemplo, A = (2,3,2) quedando X' = A + M (X - A) $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8267583735 & 0{,}2309888352 & -0{,}5129471220 \\ 0{,}2309888352 & 0{,}6920148864 & 0{,}6839294959 \\ 0{,}5129471220 & -0{,}6839294959 & 0{,}5187732600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

Inicio

53. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; se comprueba que $MM^t = I$ y $|M| = -1 \Rightarrow$ movimiento inverso en el espacio.

Estudiar el tipo de movimiento:

La ecuación matricial puede expresarse como $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ llamando N a la matriz

$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ los elementos invariantes de la transformación se obtienen de la ecuación matricial $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$ que, desarrollado queda un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas siendo M-I la matriz de coeficientes y N-I la ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

claramente se observa que rango (N-I) = rango (M-I), por lo que el sistema es compatible y que rango (M-I) = 1 con lo que es compatible indeterminado. Se trata, por tanto de una **simetría especular**.

Elemento característico: plano de simetría.

Cálculo del plano de simetría:

El plano de simetría, que es la solución del sistema se obtiene tomando la única ecuación $0-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=0 \Leftrightarrow$ **x+y+z = 0**

Inicio

54. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos.

Solución

Si se denomina $N=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -132 & -23 & -24 & -36 \\ -44 & -24 & 41 & -12 \\ -66 & -36 & -12 & 31 \end{pmatrix}$ y $M=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -23 & -24 & -36 \\ -24 & 41 & -12 \\ -36 & -12 & 31 \end{pmatrix}$.

Se calcula $M.M^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y |M| = -1. Se trata, por tanto, de un **movimiento inverso** del espacio.

Estudiar el tipo de movimiento:

Para calcular los puntos invariantes de la transformación se resuelve el sistema $N\overline{X}=\overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X}=0$

$$\left(\frac{1}{49}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -132 & -23 & -24 & -36\\ -44 & -24 & 41 & -12\\ -66 & -36 & -12 & 31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -132 & -72 & -24 & -36\\ -44 & -24 & -8 & -12\\ -66 & -36 & -12 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -132 & -72 & -24 & -36\\ -44 & -24 & -8 & -12\\ -66 & -36 & -12 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

se trata de un sistema (no homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas). Como se aprecia, la segunda fila es igual a la tercera multiplicada por 3 y también es igual a la cuarta multiplicada por 2. Por tanto, sólo hay una ecuación linealmente independiente $\Rightarrow$ rango(N-I) = rango(M-I) = 1$\Rightarrow$ se trata de una **simetría especular**.

El plano de simetría es la solución del sistema y se puede obtener, por ejemplo, a partir de la tercera ecuación del sistema. $-44-24x-8y-12z=0$ $\Leftrightarrow$ **-6x-2y-3z=11.**

Inicio

55. Clasificar la transformación geométrica del espacio dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Obteniendo además sus elementos característicos

Solución

Comprobemos primero si se trata de un movimiento. La matriz M es

$$M=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

como $M.M^t=I$, se trata de un movimiento. Como |M|=-1 se trata de un movimiento inverso.

Estudiar el tipo de movimiento:

Se busca ahora el subespacio de puntos invariantes, que lo da la ecuación

$N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$, que en este caso queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, como puede observarse, las segunda y cuarta fila son iguales y la tercera es dos veces la segunda por lo que rango(N-I) = rango(M-I) = 1 y el sistema es compatible indeterminado y se trata de una **simetría especular**, cuyo plano de simetría es la solución del sistema(tomando una cualquiera de las ecuaciones):

Elemento característico: plano de simetría.

Cálculo del plano de simetría:

El **plano de simetría**, que es la solución del sistema se obtiene tomando la única ecuación $-\frac{10}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \Leftrightarrow$ **x+2y+z+10 = 0**

Inicio

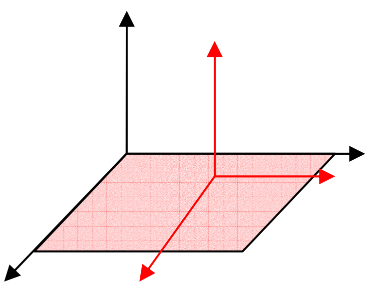
56. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano z = 0

Solución

La ecuación matricial de una simetría especular tiene como expresión X' = A + M (X-A) siendo A un punto del plano de simetría, por tanto, un punto invariante de la transformación.

Como se sabe, eligiendo un sistema de referencia ortonormal del espacio en el cual los ejes coordenados cumplan que el primero es perpendicular al plano de simetría y los otros dos pertenecen a dicho plano, en este sistema, la ecuación matricial de la transformación es:

Una base adecuada para dicho sistema de referencia puede ser $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ siendo $\vec{u} = (0,0,1)$; $\vec{v} = (1,0,0)$ y $\vec{w} = (0,1,0)$, (comprobando que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$)



En este sistema de referencia la matriz de la transformación ortogonal es

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pues el primer vector de la base se transforma en su simétrico (primera columna) y los otros dos (segunda y tercera columna) permanecen invariantes por ser del plano de simetría.

La matriz del cambio de la base B a la base canónica es:

$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ matriz que tiene en columnas los vectores de la base B respecto de la canónica. La matriz del giro en la base canónica será, por tanto, $M_c = PM_BP^{-1}$ por lo que

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Obsérvese que, aunque se ha aplicado un método general, la matriz M se podía haber obtenido directamente pues M contiene en columnas los transformados de los vectores de la base canónica y, como se observa en el gráfico los vectores directores de los ejes X e Y son invariantes por ser del plano de simetría y el vector director del eje Z se transforma en su opuesto por ser perpendicular a dicho plano.

Para escribir la ecuación matricial se toma un punto del plano de simetría, el cual puede ser el origen O=(0,0,0) quedando

$$X' = A + M(X-A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

o también puede expresarse como $\begin{cases}x'=x\\y'=y\\z'=-z\end{cases}$

Inicio

57. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano x - 2y = 7

Solución

La ecuación de la simetría especular en la base canónica del espacio es X' = A + M (X-A) siendo A un punto del plano de simetría.

Si se toma una referencia tal que el eje X sea perpendicular al plano de simetría se conoce la forma que toma la matriz de la transformación vectorial pues si se llama B a dicha base, entonces,

$$M_B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Se puede definir la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ tomando el primer vector unitario y perpendicular al plano, por ejemplo, $\vec{u}=\frac{(1,-2,0)}{|(1,-2,0)|}=\frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}\Rightarrow \vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)$

El segundo vector es un vector cualquiera perpendicular a éste, por ejemplo: $\vec{v}=(0,0,1)$ y el tercero es el producto vectorial de ambos $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$ (comprobándose que $|\vec{w}|=1$).

La matriz de cambio de base de la base B a la canónica es aquella que tiene por columnas los vectores de la base B es, por tanto, $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y la matriz M en la base canónica,

$M_c=PM_BP^{-1}$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(se puede comprobar que se cumple que $M.M^t=I$ y $|M|=-1$ por ser la simetría especular un movimiento inverso del espacio y que la matriz M es simétrica)

Para completar la ecuación se elige un punto invariante, es decir, un punto cualquiera del plano de simetría, por ejemplo, el punto (7,0,0) quedando

$$X'=A+M(X-A)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-7\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{14}{5}\\ -\frac{28}{5}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{14}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ -\frac{28}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Inicio

58. Obtener la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano $40x - 60y - 40\sqrt{3}z = 1$

Solución

La ecuación de la simetría especular en la base canónica del espacio viene dada por X' = A + M (X-A) siendo A un punto del plano de simetría.

Tomando referencia afín cuyo eje X sea perpendicular al plano de simetría la matriz de la transformación en dicha base, es $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se puede definir la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tomando el primer vector unitario y perpendicular al plano, por ejemplo, $\vec{u} = \dfrac{(40,-60,-40\sqrt{3})}{|(40,-60,-40\sqrt{3})|} = \dfrac{(40,-60,-40\sqrt{3})}{100} \Rightarrow \vec{u} = \left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

Tomando un vector cualquiera del plano de simetría (por tanto, perpendicular a $\vec{u}$):

$\vec{v} = \dfrac{\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)}{\left|\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)\right|} \Rightarrow \vec{v} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$ y el último, el producto vectorial de ambos

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \left(\dfrac{4\sqrt{39}}{65}, -\dfrac{6\sqrt{39}}{65}, \dfrac{\sqrt{13}}{5}\right)$ (comprobándose que $|\vec{w}| = 1$). La matriz de cambio de base de la base B a la canónica es aquella que tiene por columnas los vectores de la base B es, por tanto,

$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{4\sqrt{39}}{65} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{6\sqrt{39}}{65} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{13}}{5} \end{pmatrix}$ cuya matriz inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{4\sqrt{39}}{65} & -\frac{6\sqrt{39}}{65} & \frac{\sqrt{13}}{5} \end{pmatrix}$, (obsérvese que $P^{-1} = P^t \Rightarrow$ P es ortogonal).

La matriz M en la base canónica, $M_c = PM_BP^{-1} \Rightarrow$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{4\sqrt{39}}{65} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{6\sqrt{39}}{65} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{13}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{4\sqrt{39}}{65} & -\frac{6\sqrt{39}}{65} & \frac{\sqrt{13}}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{17}{25} & \frac{12}{25} & \frac{8\sqrt{3}}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{12\sqrt{3}}{25} \\ \frac{8\sqrt{3}}{25} & -\frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$ se

comprueba ahora que esta es la matriz de una simetría especular, pues se cumple que es simétrica y es ortogonal ($M.M^t = M^t.M = I$) y que $|M|=-1$

Para completar la ecuación matricial sólo queda elegir un punto perteneciente al plano de simetría, por ejemplo, el punto $A = \left(\frac{1}{40}, 0, 0\right)$ quedando la ecuación matricial:

$$X' = A + M(X - A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{25} & \frac{12}{25} & \frac{8\sqrt{3}}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{12\sqrt{3}}{25} \\ \frac{8\sqrt{3}}{25} & -\frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{40} \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{125} & \frac{17}{25} & \frac{12}{25} & \frac{8\sqrt{3}}{25} \\ -\frac{3}{250} & \frac{12}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{12\sqrt{3}}{25} \\ -\frac{\sqrt{3}}{125} & \frac{8\sqrt{3}}{25} & -\frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

59. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares d planos x = 0 y z = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elemento característicos.

Solución

La simetría de plano z = 0 tiene como ecuación $S_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ como se vio en un problema anterior.

La simetría de plano x = 0 tiene como ecuación $S_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en la que el vector del eje X, perpendicular al plano de simetría se transforma en su inverso y los otros dos vectores de la referencia canónica permanecen constantes.

Antes de seguir con el problema se razonará del siguiente modo. Si S_1 es una transformación inversa (simetría), la matriz de la transformación asociada cumplirá que $|M_1| = -1$ y dado que S_2 es también inversa, su correspondiente matriz M_2 cumplirá también que $|M_2| = -1$. El producto de ambas transformaciones tendrá como matriz $M_1.M_2$. Si ambas matrices son ortogonales su producto $M_1.\ M_2$ cumplirá que $(M_1.\ M_2)(\ M_1.\ M_2)^t = M_1.\ M_2.\ M_2^t.\ M_1^t = M_1.I.\ M_1^t = M_1.\ M_1^t = I$, por lo que el producto de dos transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal. El determinante será $|M_1.M_2| = |M_1|.|M_2| = (-1).(-1) = 1$ por las propiedades de los determinantes. Por lo tanto, se trata de una transformación directa. En general, el producto de un número par de transformaciones inversas es una transformación directa. Siguiendo el razonamiento, si una de las simetrías deja invariante un plano, y la segunda deja invariante otro plano. Si ambos planos tienen intersección, quedará una recta invariante y el movimiento (directo y con una recta invariante) será una rotación. Si ambos planos son paralelos, no habrá elementos invariantes y el movimiento será una traslación como se verá más adelante.

Se procede ahora con el ejercicio en la forma general.
Las transformaciones pueden escribirse también como:

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } S_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matriz N del movimiento es $N = N_1 . N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Estudiar el tipo de movimiento:

Se calculan los puntos invariantes a partir del sistema $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$.

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ estudiando el sistema se observa que rango (M-I) = rango (N-I) = 2 por lo que se trata de un **giro**.

Elementos característicos: eje e y ángulo de giro α :
Cálculo del eje del giro:

El eje se obtiene como solución del sistema y es $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ es decir, el eje Y (evidentemente, la intersección de los planos de simetría).

Cálculo del ángulo:
Para calcular el ángulo de la rotación, se elige un vector perpendicular al eje de giro, por ejemplo, $\vec{v} = (1,0,0)$ y se calcula su transformado $\vec{v}' = M\vec{v} \Rightarrow \vec{v}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puesto que se obtiene que $\vec{v}' = -\vec{v}$, el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ es claramente **α= 180º**

NOTA:
El producto de dos simetrías especulares cualesquiera del espacio no es conmutativo, aunque en este caso concreto si lo es.

Inicio

60. Obtener la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos: 3y - 4 z + 6 = 0 y 3 y – 4 z – 4 = 0. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

Como es conocido, la ecuación matricial de una simetría especular viene dada por X'=A+M(X-A) siendo A un punto cualquiera del plano de simetría y M la matriz de la transformación vectorial asociada.

Si se llama S_1 a la primera simetría y S_2 a la segunda, y las matrices de las transformaciones vectoriales respectivas son M_1 y M_2, el producto de ambas transformaciones tendrá como matriz $M_1.M_2$ cuyo determinante vale $|M_1.M_2|=1$ por lo que se trata de un movimiento directo.
Para obtener la ecuación de S_1, se busca un vector normal al plano de simetría. Tomando los coeficientes del plano se obtiene el vector (0, 3, -4), del que se obtiene el vector unitario

$$\vec{u} = \frac{(0,3,-4)}{|(0,3,-4)|} = \frac{(0,3,-4)}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow \vec{u} = \left(0,\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

Como se puede comprobar, el segundo plano es paralelo al primero, por lo que tienen el mismo vector normal.
Dado que S_1 deja invariantes los puntos del primer plano y S_2 deja invariantes los puntos del segundo y dado que los dos planos no tienen intersección, la transformación resultante no tendrá puntos invariantes.

Se puede calcular ahora la ecuación matricial de S_1:
Un vector perpendicular a $\vec{u}$ puede ser el vector unitario $\vec{v} = \left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ y el tercer vector, producto vectorial de ambos es $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = (1,0,0)$

En la base $B = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, la matriz de la transformación S_1 es $M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El cambio de base de la base B a la canónica viene dado por $X_C=PX_B$ siendo P la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B.

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}$$ .y la matriz M en la base canónica, $M_c=PM_BP^{-1}\Rightarrow$

$$M=\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\ -\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}$$

Tomando un punto cualquiera que cumpla la ecuación del plano, por ejemplo, $A_1=(0,-2,0)$, se puede escribir la ecuación matricial de la simetría S_1:

$$X'=A_1+M(X-A_1)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{36}{25}\\ \frac{48}{25}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$S_1\equiv\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{36}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\ \frac{48}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

(Obsérvese que el punto $O'=\begin{pmatrix}0\\-\frac{36}{25}\\ \frac{48}{25}\end{pmatrix}$ es el simétrico del origen por S_1)

Realizando los mismos pasos para la simetría S_2 se llegará a la misma matriz de la transformación vectorial puesto que los planos son paralelos, y se puede elegir la misma base B.

Igual que se hizo para la transformación anterior, se elige un punto del plano, en este caso, puede ser $A_2=(0,0,-1)$, quedando

$$X'=A_2+M(X-A_2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{24}{25}\\-\frac{32}{25}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$S_2\equiv\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \frac{24}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\-\frac{32}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Ahora, el producto de ambas transformaciones vendrá dado por el producto de sus matrices quedando la nueva transformación:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{36}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\\frac{48}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{24}{25}&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}\\-\frac{32}{25}&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{12}{5}&0&1&0\\\frac{16}{5}&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La clasificación de esta transformación es inmediata pues dado que la matriz M de su transformación vectorial asociada es la identidad, se trata de una **traslación** de vector $\vec{t}=\left(0,-\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$.

Este vector es perpendicular a los dos planos de simetría y su módulo es $|\vec{t}|=4$ que es la distancia de la traslación. Se puede comprobar que la distancia entre ambos planos es 2.

NOTA:
El producto de dos simetrías especulares del espacio cuyos planos son paralelos es una traslación cuya distancia es el doble de la distancia entre ambos planos y cuya dirección es perpendicular a ellos. El sentido es el del primer plano de simetría al segundo plano.
El producto no es conmutativo pues el orden de las simetrías cambia el sentido de la traslación.

Inicio

61. Obtener la ecuación matricial del producto de la simetría especular de plano 3 x - 4 z + 5 = 0 por la traslación de vector $\vec{t}=(15,0,-20)$. Clasificar la transformación resultante y obtener sus elementos característicos.

Solución

Antes que nada, conviene observar que un vector perpendicular al plano de simetría es $\vec{n}=(3,0,-4)$ por lo que el vector de la traslación es paralelo a él, por tanto, perpendicular al plano de simetría. La magnitud de la traslación es $|\vec{t}|=|(15,0,-20)|=25$

Se comienza obteniendo la ecuación matricial de la simetría. Se construye para ello una base B cuyo primer vector sea perpendicular al plano de simetría y los otros dos, perpendiculares entre sí, contenidos en dicho plano. Los tres formando una base ortonormal del espacio. Sea $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ tal que $\vec{u}=\frac{(3,0,-4)}{|(0,3,-4)|}=\frac{(3,0,-4)}{\sqrt{3^2+4^2}}\Rightarrow\vec{u}=\left(\frac{3}{5},0,-\frac{4}{5}\right)$ vector normal al plano y unitario, se puede tomar

$\vec{v}=\left(\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}\right)$ pues es perpendicular al anterior y también unitario; entonces,

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{vmatrix}=-\vec{j}=(0,-1,0).$$

El cambio de base de la base B a la canónica tiene como ecuación $M_c=PM_BP^{-1}$ siendo la matriz

$$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}$$ y la matriz M en la base canónica, $M=PM_BP^{-1}\Rightarrow$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}$$

y tomando un punto cualquiera del plano de simetría, por ejemplo, el (-3,0,-1) se tiene la ecuación de la simetría

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+3\\ y\\ z+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{6}{5} & \frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{8}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

La traslación de vector $\vec{v}=(15,0,-20)$ tiene por ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 15 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -20 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

El producto de ambas transformaciones vendrá dado por:

$$\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{6}{5} & \frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{8}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 15 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -20 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{81}{5} & \frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Para clasificar esta nueva transformación se empieza estudiando su matriz M, pero como ésta es la misma que la de la simetría inicial se puede concluir que se trata de un movimiento inverso del espacio.

Estudiar el tipo de movimiento:

Para clasificarla se estudian sus puntos invariantes, solución del sistema: $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N-I)\overline{X} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{81}{5} & \frac{7}{25}-1 & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{81}{5} & -\frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como se puede ver, la última fila es la primera multiplicada por $-\frac{4}{3}$ por lo que

$\text{rango}(M-I) = \text{rango}\begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix} = 1$ y $\text{rango}(N-I) = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{81}{5} & -\frac{18}{25} & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{108}{5} & \frac{24}{25} & 0 & -\frac{32}{25} \end{pmatrix} = 1$ por ello se trata de un sistema compatible indeterminado, que tiene una sola ecuación independiente. Es, por tanto, una **simetría especular.**

Elemento característico: plano de simetría.

Cálculo del plano de simetría:

El plano de simetría se obtiene de resolver el sistema. Tomando, por ejemplo, la última ecuación:

$\frac{108}{5} + \frac{24}{25}x - \frac{32}{25}z = 0 \Rightarrow 540 + 24x - 32z = 0 \Rightarrow 3x - 4z + \frac{135}{2} = 0$ como puede observarse es un plano paralelo al plano de la primera simetría. Se puede comprobar que la distancia entre ambos planos es 25, la misma magnitud que la traslación.

NOTA:
El producto de una simetría especular del espacio por una traslación de dirección perpendicular a dicho plano es una nueva simetría especular. El nuevo plano de simetría es paralelo al original y la distancia es la magnitud de la traslación, en el sentido del vector de traslación.

Inicio

62. Clasificar la siguiente transformación del espacio dada por la ecuación matricial y calcular los elementos principales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Solución

Podemos escribir la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde O'=(1,0,2) son las coordenadas del punto transformado del origen. Y la ecuación matricial es de la forma X'=O'+MX con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Clasificación:

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M M^t = I$.

$MM^t=I$, luego M es ortogonal, y por tanto nuestra transformación es un **movimiento.**

2. **Calcular el determinante de M**.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$, se trata de un **movimiento inverso.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Puntos invariantes:

Del sistema X=O'+MX se pasa al siguiente (M-I)X=-O', es decir,

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

que por el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$rg(M-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

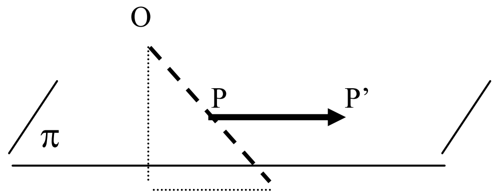
$$\operatorname{rg}\left(M-I\middle|O'\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{array}\right)=2$$

Sistema incompatible, no hay puntos invariantes es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: plano de simetría π y vector de traslación:

Cálculo del plano y el vector:

Producto de una simetría especular y una traslación de vector paralelo.



La simetría deslizante tiene por elementos el vector $\vec{u}=\overrightarrow{PP'}$ y el plano π paralelo y que contiene a P el punto medio del segmento OO'.

O'=T(O)

1º El punto medio entre el origen O y su transformado T(O)=O' pertenece al plano de simetría.

$P=\frac{1}{2}(O+O')=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$. Como el punto P es del plano de simetría, su transformado P' también lo será, y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es el vector de la traslación.

$P'=T(P)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\0\\1\end{pmatrix}$ resultando $\overrightarrow{PP'}=P'-P=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Vector de traslación **(1,0,0).**

2º Para calcular el plano de simetría, buscaremos los vectores invariantes por la transformación ortogonal asociada, es decir, el sistema homogéneo, X=MX que se pasa al siguiente (M-I)X=O, es decir,

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\0&1-1&0\\0&0&-1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow z=0$$

que corresponde al plano vectorial que junto con cualquier punto invariante por la simetría, por ejemplo, P=(1/2,0,1) resulta **z-1=0** como plano de simetría. Siendo la simetría deslizante el producto de la **simetría especular de plano z=1 por la traslación de vector (1,0,0).**

Inicio

63. Dada la transformación geométrica del espacio euclídeo E_3:

$$\overline{X}' = N\,\overline{X} \quad , \quad \text{siendo} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, clasificarla y hallar sus elementos característicos.

Solución

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

De la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ consideramos la submatriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal

2. **Calcular el determinante de M.**

Determinante de M igual a 1, así es un **movimiento directo.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Puntos invariantes:

$N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$ y el sistema incompatible $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puesto que rango(N-I) es distinto del rango(M-I), indica un **movimiento helicoidal**.

Elementos característicos: eje de giro, ángulo de giro y vector de traslación:

El movimiento helicoidal se puede descomponer en el producto de una rotación y una traslación cuyo vector es paralelo a la dirección del eje.

Cálculo del eje del giro:

De la transformación ortogonal $X = MX \Leftrightarrow (M - I)\,X = O$ que es un giro vectorial, obtenemos el eje de rotación como conjunto de vectores invariantes.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = -z\,.$$

La traslación de vector paralelo al eje será proporcional al (1,1,-1).

Cálculo del vector de la traslación:

Si aplicamos la traslación de vector (-t, -t, t) después del movimiento helicoidal resulta un giro. En efecto, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ y si queremos que sea una rotación el sistema de los puntos invariantes debe ser compatible para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 1 & 1-t \\ 1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 1-t \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

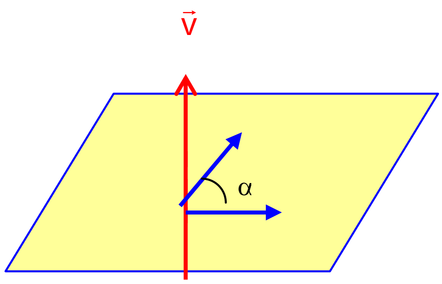
Por consiguiente, la **traslación** es de **vector (2/3,2/3,-2/3)** y el eje de rotación se obtiene de los puntos invariantes por el giro,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{1}{3} \\ y + z = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Cálculo del ángulo:

La traza es invariante $1 + 2\cos\alpha = 0 + 0 + 0 \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm 120^{\circ}$ amplitud del giro o rotación.

Fijada una dirección del eje, por ejemplo, (1,1,-1) podemos determinar el ángulo adecuado (120º ó 240º) mediante el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{PO'}$, siendo P el punto de intersección del eje e con el plano perpendicular que pasa por O y O'=(1/3,1/3,2/3) el transformado por O mediante la rotación.



Eje: $\begin{cases} x - y = \frac{1}{3} \\ y + z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = t \\ z = \frac{1}{3} - t \end{cases}$ intersección con el plano x+y-z=0 resulta t=0 y por consiguiente el punto P(1/3,0,1/3) que da lugar a los vectores $\overrightarrow{PO} = \left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{PO'} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Calculamos el producto escalar $\overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{PO'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right)$ cuyo sentido coincide con el del vector de traslación (2/3,2/3,-2/3), siendo el ángulo el menor (el positivo) **α=120º**, pues corresponde al camino más corto para que la orientación coincida.

Inicio

64. Dada la transformación geométrica de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Clasificarla.

b) Hallar sus elementos característicos.

Solución

a) Podemos escribir la ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde O'=(-6,1,-7) son las coordenadas del punto transformado del origen. Y la ecuación matricial es de la forma X'=O'+MX con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Clasificación:

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

$MM^t=I$, luego M es ortogonal, y por tanto nuestra transformación es un **movimiento.**

2. **Calcular el determinante de M.**

$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1<0$, se trata de un **movimiento inverso.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

Puntos invariantes:

Del sistema $N\overline{X} = \overline{X} \Rightarrow (N - I)\overline{X} = 0$, que por el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\mathrm{rg}(M - I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{rg}(N - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

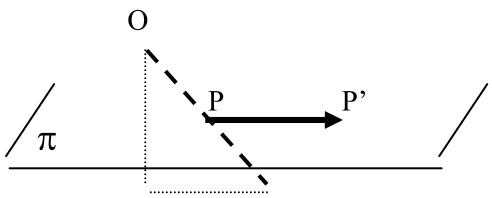
Sistema incompatible, no hay puntos invariantes es una **simetría deslizante.**

b) Cálculo de los elementos de la simetría deslizante:

Elementos característicos: plano de simetría π y vector de traslación:

Cálculo del plano y el vector:

Producto de una simetría especular y una traslación de vector paralelo.



La simetría deslizante tiene por elementos el vector $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$ y el plano π paralelo y que contiene a P el punto medio del segmento OO'.

O'=T(O)

1º El punto medio entre el origen O y su transformado T(O)=O' pertenece al plano de simetría.

$P = \frac{1}{2}(O + O') = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Como el punto P es del plano de simetría, su transformado P' también lo será, y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es el vector de la traslación.

$$P' = T(P) = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ resultando } \overrightarrow{PP'} = P' - P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Vector de traslación **(1/2,1,-1/2).**

2º Para calcular el plano de simetría, buscaremos los vectores invariantes por la transformación ortogonal asociada, es decir, el sistema homogéneo, X=MX que se pasa al siguiente (M-I)X=O, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+z=0$$

que corresponde al plano vectorial que junto con cualquier punto invariante por la simetría, por ejemplo, P=(-3,1/2,-7/2) resulta **x+z+13/2=0** como plano de simetría.

Siendo la simetría deslizante el producto de la **simetría especular de plano x+z+13/2=0 por la traslación de vector (1/2,1,-1/2).**

Inicio

65. Clasificar la siguiente transformación geométrica y obtener sus elementos característicos:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

Solución

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X$$, de aquí la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es ortogonal y simétrica con determinante -1, corresponde a un movimiento inverso (**simetría**).

Estudiar el tipo de movimiento:

Puntos invariantes:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema incompatible, $rg(I-M) \neq rg\left(I-M|O'\right)$ entonces **simetría deslizante**, es decir, el producto de una simetría especular por una traslación de vector paralelo al plano de simetría.

Elementos característicos: plano de simetría π y vector de traslación:

Cálculo del plano y el vector:

Dado un punto cualquiera y su transformado; el punto medio del segmento que determinan pertenece al plano de simetría, por ejemplo, el punto O(0,0,0) y homólogo O'(1,1,0) nos indican un punto (O+O')/2=(1/2,1/2,0) que al aplicarle la simetría deslizante se transforma en el punto:

$$T\left(\frac{O+O'}{2}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{5}{6}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

formando el vector de traslación $\vec{v}=\overrightarrow{\frac{O+O'}{2}T\left(\frac{O+O'}{2}\right)}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

Vectores invariantes:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1-\frac{1}{3}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0$$, que con el punto

(O+O')/2=(1/2,1/2,0) da el plano de simetría **x+y+z=1**

Inicio

66. Sea T la transformación geométrica de R^3 de ecuación:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

a) Obtener los valores de k para los cuales T es un movimiento

b) Clasificar T para aquellos valores de k para los que sea un movimiento

Solución

a) Condición necesaria para que T sea un movimiento es que el determinante sea 1 ó -1,

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\pm1\Rightarrow\frac{k}{2}-\frac{3}{4}=\pm1\Rightarrow k=\begin{cases}\frac{7}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Además la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ debe ser ortogonal.

Si k=7/2, tenemos la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que no es ortogonal, puesto que $MM^t \neq I$.

Si k=-1/2, resulta la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que es ortogonal, pues se cumple que $MM^t = I$, y por consiguiente T es un movimiento.

T es un movimiento inverso para k=-1/2. Buscamos los puntos invariantes por T,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sistema incompatible $rg(M-I) \neq rg\left(N-I\right)$. No hay puntos invariantes por T, luego es una **simetría deslizante.**

Inicio

67. Hallar las ecuaciones de la composición del giro de ángulo π con respecto a la recta r: (0,0,1) + t (0,1,1) con la traslación de vector (1,1,0) y determinar de qué tipo de movimiento se trata.

Solución

En el sistema de referencia $R' \equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,0,1) \in r,\ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) // r,\ \vec{u}_2 = (1,0,0) \perp \vec{u}_1, \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

la ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ 0 & \operatorname{sen}\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ cuya inversa es } \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BGB^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{en R}$$

La ecuación con el punto A (0,0,1) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora se compone con la traslación T de vector (1,1,0) quedando

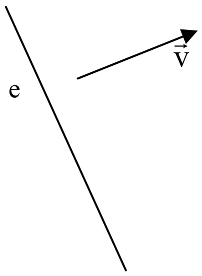
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se trata de un **movimiento helicoidal**

Inicio

68. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una rotación y una traslación del espacio R^3 sea otra rotación y no un movimiento helicoidal?

Solución



Dada la ecuación de la rotación $X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow X' = O' + MX$, sabemos que $X = O' + MX \Leftrightarrow (I - M)X = O'$ es un sistema compatible indeterminado cuya solución es el eje de rotación.
Si a continuación, aplicamos una traslación de vector $\vec{v} = (m, n, p)$, resulta el sistema $(I - M)X = O' + \vec{v}$ que debe cumplir $r(I - M) = r(I - M|O') = r(I - M|O' + \vec{v}) = 2$, por tanto, $r(I - M|\vec{v}) = 2$ y geométricamente los tres planos se cortan en una recta y el vector de traslación $\vec{v}$ será perpendicular al vector director del eje de rotación, puesto que todo determinante de orden tres de la matriz ampliada debe ser cero.

Inicio

69. Sean las simetrías especulares S_1, S_2, S_3, S_4 de planos:

π_1: x-y+z=0, π_2: x-y+z-3=0, π_3:-2x-y+z=0, π_4: 2y+z=0 respectivamente.

Clasificar las trasformaciones:

a) $S_1 o S_2 o S_3$

b) $S_1 o S_2 o S_3 o S_4$

Solución

a) Los puntos invariantes por cada simetría son los de los respectivos planos de simetría, luego los puntos invariantes mediante la transformación producto será la intersección de dichos planos:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible, no hay puntos invariantes y $S_1 o S_2 o S_3$ es el producto de un número impar de movimientos inversos que da un movimiento inverso sin puntos invariantes, resulta una **simetría deslizante.**

b) En este caso, $S_1 o S_2 o S_3 o S_4$ es un número par, por consiguiente un movimiento directo, sin puntos invariantes tenemos un **movimiento helicoidal.**

Inicio

70. Identificar la transformación T, tal que los puntos A=(1,2,3), B=(1,1,1), C=(-1,2,3), D=(1,0,2) se transforman en A'=(2,-3,0), B'=(1,-1,0), C'=(2,-3,2), y D'=(0,-2,0) respectivamente.

Solución

Se cumple que: T(A)=A', T(B)=B', T(C)=C' y T(D)=D' y en forma matricial, escribiendo conjuntamente $T\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ para los cuatro puntos:

$$T\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&1\\2&1&2&0\\3&1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&0\\-3&-1&-3&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&0\\-3&-1&-3&-2\\0&0&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&1\\2&1&2&0\\3&1&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la transformación geométrica T, son:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Se tiene que $|T|=1$ y la matriz $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ es ortogonal, T es un **movimiento directo**.

Estudiar el tipo de movimiento:

Los puntos invariantes o dobles se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=2\neq 3=\text{rg}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

Sistema incompatible, no hay puntos invariantes y T es un **movimiento helicoidal.**

Inicio

71. Hallar las ecuaciones de la simetría deslizante de plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ de E_3:

a) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

b) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

c) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

d) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

a) En el sistema de referencia $R' \equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,0,1)\in\pi,\ \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\perp\pi, \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\perp\vec{u}_1, \vec{u}_3=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1)$$

siendo la base B ortonormal $\left\{\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1), \vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1)\right\}$

b) La ecuación de la simetría especular, con el primer vector ortogonal al plano es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=M_B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c) Se pasa al sistema de referencia:

$$R\equiv\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0), \vec{e}_1=(1,0,0), \vec{e}_2=(0,1,0), \vec{e}_3=(0,0,1)$$

La matriz del cambio de base ortonormal es: $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=M_{Bc}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M_BGM_B^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{en R}$$

d) La ecuación de la simetría especular con el punto A (0,0,1) invariante será:

$$X' = A + M_{Bc}\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A continuación aplicamos la traslación de vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

72. Estudiar el movimiento resultante de aplicar la simetría respecto del plano $\pi \equiv y - 1 = 0$ y la traslación tal que: T(O)=(1,0,1). ¿Es conmutativo este producto?

Solución

Primeramente calculamos las ecuaciones de la simetría especular en el sistema de referencia $R' \equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,1,0) \in \pi,\ \vec{u}_1 = (0,1,0) \perp \pi,\ \ \vec{u}_2 = (0,0,1) \perp \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1,0,0)$$

siendo la base B ortonormal $\{\vec{u}_1 = (0,1,0), \vec{u}_2 = (0,0,1), \vec{u}_3 = (1,0,0)\}$

La ecuación de la simetría especular, con el primer vector ortogonal al plano es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base ortonormal es: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_{Bc}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_B G M_{B^{-1}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en R}$$

La ecuación de la simetría especular con el punto A (0,1,0) invariante será:

$$X' = A + M_{Bc}\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A continuación aplicamos la traslación de vector $\vec{u} = \overrightarrow{OT(O)} = (1,0,1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Estudiar el tipo de movimiento:

Movimiento inverso, del que necesitamos buscar los puntos invariantes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 1 \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

No tiene puntos invariantes, es una **simetría deslizante.**

Elementos característicos: plano de la simetría y vector de traslación:

Cálculo del vector:

Dado un punto cualquiera y su transformado; el punto medio del segmento que determinan pertenece al plano de simetría, por ejemplo, el punto O(0,0,0) y homólogo O'(1,2,1) nos permite obtener un punto (O+O')/2=(1/2,1,1/2) que al aplicarle la simetría deslizante se transforma en el punto:

$$T\left(\frac{O+O'}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

formando el vector de traslación $\vec{v} = \overrightarrow{\frac{O+O'}{2}T\left(\frac{O+O'}{2}\right)} = (1,0,1)$

Cálculo del plano:

Vectores invariantes:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y = 0,$$

que con el punto (O+O')/2=(1/2,1,1/2) da el plano de simetría y=1 y el vector (1,0,1) del enunciado. El plano de simetría es paralelo al vector de traslación, luego el producto es conmutativo.

Inicio

73. Escribir las ecuaciones del movimiento resultante de aplicar la rotación respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ y de ángulo $\alpha = -90^\circ$ y la traslación de vector (1,0,1).

Solución

Primeramente calculamos la ecuación de la rotación en el sistema de referencia $\equiv \{Q, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$Q(0,0,2) \in r,\ \vec{u}_1 = (0,-1,0) \,//\, r,\ \vec{u}_2 = (1,0,0) \perp \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (0,0,1)$$

la ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BGB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en R}$$

La ecuación con el punto A (0,0,2) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora se compone con la traslación T de vector (1,0,1) quedando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En este caso, es una **rotación**, pues el vector de traslación (1,0,1) es perpendicular al eje de rotación. (Véase el ejercicio 68).

Inicio

74. Determinar la transformación que resulta de aplicar el movimiento helicoidal T_2 y a continuación la simetría deslizante T_1:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad T_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

Previamente, colocamos el sistema de cada transformación con una matriz 4x4:

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto:

$$T_1 \circ T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Estudiar el tipo de movimiento:

Resultando un movimiento inverso, por ser $|T_1 \circ T_2| = |T_1||T_2| = (-1)(+1) = -1$, veamos los puntos invariantes:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

cuya solución es: x=1/2, y=0, z=-3/2, lo que determina una **simetría rotacional**.

Inicio

75. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z) + 2 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una simetría S respecto de un plano π por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al plano π.

c) Hallar la ecuación de π y el vector $\vec{u}$.

Solución

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

a) Puntos dobles: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

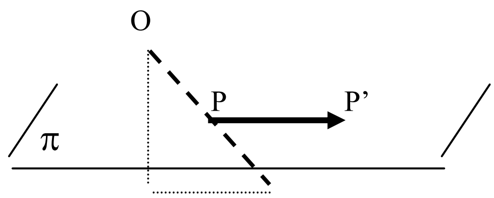
con $\text{rg}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix} = 1 \neq 2 = \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 2 & 6\end{array}\right)$ sistema incompatible.

b) La matriz $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal, ya que $MM^t=I$ y con

$|M|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=-1$ corresponde a un **movimiento inverso** si además por el apartado anterior no tiene puntos dobles es una **simetría deslizante**, es decir el producto de una simetría especular por una traslación de vector paralelo al plano de simetría.

c) No hay puntos invariantes por T, entonces buscamos vectores invariantes por la transformación ortogonal definida por M:

$$M\vec{v}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y-z=0$$



La simetría deslizante tiene por elementos el vector $\vec{u}=\overrightarrow{PP'}$ y el plano π paralelo y que contiene a P el punto medio del segmento OO'.

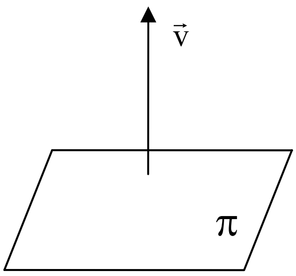
O'=T(O)

En nuestro caso O'=(1,1,2) y P=(O+O')/2=(1/2,1/2,1) debe pertenecer al plano π, luego x+y-z=1/2+1/2-1=0. Y por consiguiente, el vector buscado es el **(1,1,2)**, puesto que el origen O(0,0,0) está en el plano de simetría x+y-z=0.

Inicio

76. ¿Qué condición se debe cumplir para que el producto de una simetría especular y una traslación del espacio R^3 sea otra simetría especular y no una simetría deslizante?

Solución



Dada la ecuación de la simetría X'=MX, sabemos que $X = MX \Leftrightarrow (I-M)X = O$ es un sistema compatible indeterminado cuya solución es el plano de la simetría. Si a continuación, aplicamos una traslación de vector $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$, resulta el sistema $X' = O' + MX$ que corresponde al producto de una simetría por una traslación, para que sea efectivamente una simetría especular debe cumplir que $(I-M)X = O'$ que $r(I-M) = r(I-M|O') = 1$, por tanto, geométricamente los tres planos son coincidentes y el vector de traslación $\vec{v}$ será perpendicular al plano de simetría.

Inicio

77. Hallar las ecuaciones del movimiento helicoidal de eje $e \equiv \begin{cases} \text{pasa por } A(1,1,1) \\ \text{vector } (0,1,0) \end{cases}$ y ángulo $\alpha = -45^\circ$ y vector $\vec{u} = (1,1,1)$ de E_3.

i) Escoger una base ortonormal B del espacio vectorial V_3 adecuada.

ii) Escribir la matriz M_B asociada al movimiento respecto de la base B.

iii) Hallar la matriz M_{Bc} asociada al movimiento respecto de la base canónica.

iv) Escribir las ecuaciones del movimiento respecto de la base canónica.

Solución

i) En el sistema de referencia $R' \equiv \{A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ definido por:

$$A(1,1,1) \in e,\ \vec{u}_1 = (0,1,0) // e,\ \vec{u}_2 = (0,0,1) \perp \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1,0,0)$$

ii) La ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

iii) Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R \equiv \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ siendo } O(0,0,0),\ \vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BGB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{en R}$$

La ecuación con el punto A (1,1,1) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

iv) Ahora se compone con la traslación T de vector (1,1,1) quedando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

78. Encontrar las ecuaciones del producto de una rotación de amplitud $\frac{\pi}{2}$ con respecto a la recta que tiene como vector director a $\vec{v}=(1,1,0)$ y pasa por el punto (1,1,1) con la traslación de vector $\vec{u}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$

Solución

En el sistema de referencia $R'\equiv\{A,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ definido por:

$$A(1,1,1)\in e,\ \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)//e,\ \vec{u}_2=(0,0,1)\perp\vec{u}_1,\ \vec{u}_3=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

La ecuación del giro, con el primer vector invariante es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)&\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\0&-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema de referencia R definido por:

$$R\equiv\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\ \text{siendo}\ O(0,0,0),\ \vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1)$$

La matriz del cambio de base es $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=BGB^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \text{en R}$$

La ecuación con el punto A (1,1,1) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora se compone con la traslación T de vector $\vec{u} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ quedando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Inicio

79. Una superficie en R^3 tiene de ecuación

$$2x^2 + \sqrt{2}x + 2y^2 + \sqrt{2}y + 2z^2 - 2z = 1 .$$

Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia: $R' = \left\{ A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right); \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right\}$ **e indicar el tipo de transformación realizada.**

Solución

Las ecuaciones del cambio de sistema de referencia son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Despejando y sustituyendo en la ecuación de la superficie, resulta: $x'^2+y'^2+z'^2=1$ una esfera de centro el nuevo origen y radio 1.

Todo cambio de sistema de referencia es una transformación afín que se puede descomponer en el producto de una traslación de ejes por un cambio de base $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y en este caso podemos observar que la matriz $M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal, ya que $MM^t=I$, luego se trata de un movimiento.

Estudiar el tipo de movimiento:

Buscamos puntos invariantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}=2\neq 3=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ es un sistema incompatible con $|M|=1$, se trata de un **movimiento helicoidal**

Inicio

80. Sea la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{3\sqrt{13}}{26}y + \dfrac{\sqrt{13}}{13}z \\ y' = -\dfrac{3\sqrt{13}}{26}x + \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26}y + \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13}z \\ z' = -\dfrac{\sqrt{13}}{13}x + \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13}y + \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13}z + 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que T no tiene puntos dobles.

b) Demostrar que T es el producto de una rotación G respecto de un eje e de amplitud α por una traslación de vector $\vec{u}$ paralelo al eje e.

c) Hallar la ecuación de e, el ángulo α y el vector $\vec{u}$.

Solución

a) Escribiremos el sistema en forma matricial de la forma X'=O'+MX:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ -\dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\dfrac{\sqrt{13}}{13} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{con } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ -\dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\dfrac{\sqrt{13}}{13} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \text{ y } O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. **Comprobar que M es una matriz ortogonal**, es decir: $M\,M^t = I$.

2. **Calcular el determinante de M**.

Consideramos la matriz cuadrada M que es ortogonal, puesto que $MM^t=I$, con determinante 1, así es un **movimiento directo.**

3. **Estudiar el tipo de movimiento**:

El sistema $X = O' + MX \Leftrightarrow (M-I)X = -O' \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1 & \dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ -\dfrac{3\sqrt{13}}{26} & \dfrac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\dfrac{\sqrt{13}}{13} & \dfrac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con rango(M-I)=2 y rango(M-I/-O')=3 por el teorema de Rouché-Fröbenius es incompatible indica que T no tiene puntos dobles y es un **movimiento helicoidal**.

b) El movimiento helicoidal se puede descomponer en el producto de una rotación y una traslación cuyo vector es paralelo a la dirección del eje.

Elementos característicos: eje e, ángulo de giro α y vector de traslación:

Cálculo del eje del giro:

De la transformación ortogonal, X'=MX

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que es un giro vectorial, obtenemos el eje de rotación como conjunto de vectores invariantes,

$$X = MX \Leftrightarrow (M-I)X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es la recta vectorial **x=0; y=2λ; z=-3λ**.

Cálculo del vector:

La traslación de vector paralelo al eje será proporcional al (0, 2, -3).

Si aplicamos la traslación de vector (0, -2t, 3t) después del movimiento helicoidal resulta un giro. En efecto, $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + MX + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 1+3t \end{pmatrix} + MX$ y si queremos que sea una rotación el sistema, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 1+3t \end{pmatrix} + MX$, de los puntos invariantes debe ser compatible para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada. $r(M-I) = r\left(M-I \middle| -O'+\vec{u}\right) = 2$.

$$rg\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & 2t \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 & -1-3t \end{array}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ 2t & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -1-3t & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{13}$$

Por consiguiente, la traslación es de vector $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix}$ y el eje de rotación se obtiene de los puntos invariantes por el giro,

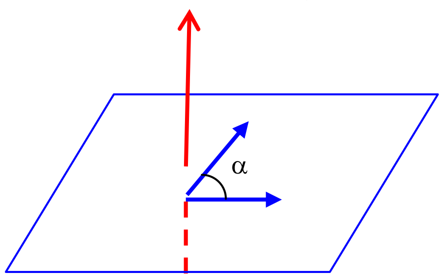
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 1+3t \end{pmatrix} + MX = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix} + MX$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{8-9\sqrt{3}}{26}-1 & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} \\ -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-6-3\sqrt{3}}{13} & \frac{9-2\sqrt{3}}{13}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{13} \\ -\frac{4}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{39}}{13} \\ 3y+2z=1 \end{cases}.$$

Cálculo del ángulo:

La traza es invariante $1+2\cos\alpha = 1-\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm 150^{\circ}$ amplitud del giro o rotación.

Fijada una dirección del eje, por ejemplo, (0, 2, -3) podemos determinar el ángulo adecuado (150º ó -150º) mediante el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{PO'}$, siendo P el punto de intersección del eje e con el plano perpendicular que pasa por O=(0,0,0) y O'=(0, 6/13, 4/13) el transformado por O mediante la rotación.



Eje: $\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}-\dfrac{\sqrt{39}}{13} \\ 3y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}-\dfrac{\sqrt{39}}{13} \\ y=2t \\ z=\dfrac{1}{2}-3t \end{cases}$ intersección con el plano 2y-3z=0 resulta t=3/26 y por consiguiente el punto $P\left(\dfrac{2\sqrt{13}}{13}-\dfrac{\sqrt{39}}{13},\dfrac{3}{13},\dfrac{2}{13}\right)$ que da lugar a los vectores

$\overrightarrow{PO}=\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}+\dfrac{\sqrt{39}}{13},-\dfrac{3}{13},-\dfrac{2}{13}\right)$ y $\overrightarrow{PO'}=\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}+\dfrac{\sqrt{39}}{13},\dfrac{3}{13},\dfrac{2}{13}\right)$. Calculamos el producto escalar

$$\overrightarrow{PO}\wedge\overrightarrow{PO'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{39}}{13} & -\dfrac{3}{13} & -\dfrac{2}{13} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{39}}{13} & \dfrac{3}{13} & \dfrac{2}{13} \end{vmatrix}=\left(0,\dfrac{8\sqrt{13}-4\sqrt{39}}{169},\dfrac{6\sqrt{39}-12\sqrt{13}}{169}\right)$$

cuyo sentido coincide con el del vector de traslación **(0,2,-3)**, siendo el ángulo el menor (el positivo), pues corresponde al camino más corto para que la orientación coincida.

Inicio

81. Una curva en R^3 tiene de ecuación $4x^2-4xy+8xz-11x+y^2-4yz+10y+4z^2-2z+7$ Determinar la ecuación de esta superficie, respecto del nuevo sistema de referencia:

$$R'=\left\{A=(1,0,0);\ \vec{u}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),\ \vec{v}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\ \vec{w}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$$

indicar el tipo de transformación realizada.

Solución

Las ecuaciones del cambio de sistema de referencia son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Despejando y sustituyendo en la ecuación de la curva, resulta: $x'=y'^2$ una parábola.

Todo cambio de sistema de referencia es una transformación afín que se puede descomponer en el producto de una traslación de ejes por un cambio de base $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y en este caso podemos observar que la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es ortogonal y simétrica, ya que $MM^t=I$, luego se trata de un movimiento.

Estudiar el tipo de movimiento:

Buscamos puntos invariantes:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un sistema incompatible con $|M| = -1$, se trata de una **simetría deslizante**.

Inicio

PROBLEMAS DE HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS EN EL ESPACIO

Mediante marcadores puede escoger el tipo de problema

82. Sea T una transformación afín definida por sus ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= -2+2x \\ y' &= 2+2y \\ z' &= -2+2z \end{aligned}$$

a) Clasificar T y hallar sus elementos característicos.

b) Hallar los vértices y el área del triangulo transformado del triángulo de vértices: A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(2, 1, 2).

Solución

83. Demostrar que la composición de una homotecia y una traslación es una homotecia.

Solución

84. Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -3+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}z \\ y' = -2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z \\ z' = -1+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z \end{cases}$$

Solución

85. Encontrar dos homotecias cuya composición sea una traslación.

Solución

86. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

87. Hallar las ecuaciones de las homotecias que transforman, el pentágono regular P de centro O(-1, -1, -1) y lado 2 en el pentágono regular P' de centro O'(3, 3, 3) y lado 6.

Solución

88. Estudiar si la siguiente ecuación corresponde a una semejanza del espacio. En caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

89. Clasificar la transformación resultante de aplicar la semejanza del problema 85 por la semejanza del problema 87.

Solución

90. Hallar la ecuación matricial, de la transformación resultante de componer, el giro de ángulo π y eje la recta (x,y,z)=(0,0,1)+t(0,1,1), seguido de la homotecia de centro C(0,0,1) y razón k=5.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

91. Hallar las ecuaciones que definen la transformación resultante, de componer, una homotecia de centro $C(-1, 0, 1)$ y razón $k=-5$ seguida de una rotación de ángulo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

92. Estudiar y hallar los elementos característicos de la transformación producto $S_\pi \circ H_{C,K}$, siendo, la ecuación del plano de simetría $\pi \equiv y-1=0$, el centro $C(0, 1, 0)$ y la razón de la homotecia $k=-3$ ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

93. Hallar el centro de la homotecia producto de dos homotecias, cuando dicho producto no es una traslación. Demostrar que los tres centros están alineados.

Solución

94. Hallar las ecuaciones de una semejanza inversa, de razón $k=4$, de centro el punto $C(1, 1, 1)$, de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y cuyo eje de semejanza es la recta $e \equiv (x,y,z) = (1, 1, 1) + t(1, 1, 0)$.

Solución

95. Estudiar la transformación geométrica T, tal que los puntos A = (0, -1.5, 0.13), B = (0.5, -0.3, -1.3), C = (-0.3, 0.7, 0.9) y D = (0, 0.9, 0.15) se transforman en A' = (-6, 7.5, 3.35), B' = (-8.5, 1.5, 10.5), C' = (-4.5, -3.5, -0.5), y D' = (-6, -4.5, 3.25) respectivamente.

Solución

82. Sea T una transformación afín definida por sus ecuaciones:

$$x' = -2 + 2x$$
$$y' = 2 + 2y$$
$$z' = -2 + 2z$$

a) Clasificar T y hallar sus elementos característicos.

b) Hallar los vértices y el área del triangulo transformado del triángulo de vértices: A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(2, 1, 2).

Solución

a)

1. **Determinar la matriz N =** $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$.

Si al sistema de ecuaciones que define T le añadimos la ecuación trivial 1=1, este sistema en forma matricial se puede expresar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow N\overline{X} = \overline{X}'$$

2. **Si $M = k \cdot I_3$** , con k ≠ 0, 1, es decir, si M es una matriz escalar, la transformación es una homotecia afín de razón k.

La matriz M de la transformación ortogonal que define T puede escribirse de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así pues, se trata de una **homotecia**.

Cálculo de los elementos característicos de la homotecia:

- **Razón de la homotecia:** es el número real k tal que $M = k \cdot I_3$.
- **Centro de homotecia:** es el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\ \overline{X} = 0$.

Es la solución del sistema:

$$(N-I)\overline{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}.$$

Por tanto, T es una **homotecia directa** de **centro O(2, -2, 2) y razón 2.**

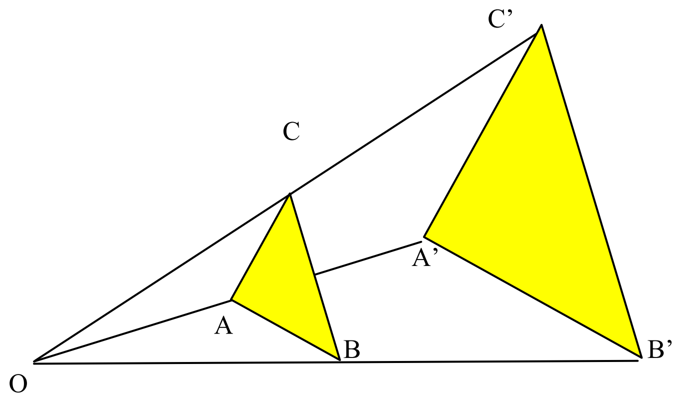
b) Los vértices A' B' C' transformados de A, B y C son:

$$A'=NA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B'=NB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C'=NC=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A'(2,\ 2,\ \text{-}2),\ B'(2,\ 6,\ \text{-}2),\ C'(2,\ 4,\ 2).$$



Homotecia de centro O y razón 2

El área de un triángulo cualquiera ABC, se obtiene fácilmente con la fórmula

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(4,\ 0,\ 0)\right|=2\ u^2,\ \text{ y }\ S_{A'BC'}=2^2 S_{ABC}=2^2\cdot 2=8\ u^2$$

Inicio

83. Demostrar que la composición de una homotecia y una traslación es una homotecia.

Solución

Las matrices de las homotecias y de las traslaciones de orden 3 son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ respectivamente}$$

La matriz del producto será, según el orden de composición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a+ka' & k & 0 & 0 \\ b+kb' & 0 & k & 0 \\ c+kc' & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

es una homotecia de razón k y de centro $C = \left(\frac{a+ka'}{1-k}, \frac{b+kb'}{1-k}, \frac{c+kc'}{1-k} \right)$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a'+a & k & 0 & 0 \\ b'+b & 0 & k & 0 \\ c'+c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

es una homotecia de razón k y de centro $C = \left(\frac{a+a'}{1-k}, \frac{b+b'}{1-k}, \frac{c+c'}{1-k} \right)$

Vemos pues que la composición (en cualquier orden) es una homotecia de igual razón que la homotecia de partida, pero la composición no es conmutativa por tener distinto centro cada una de las homotecias resultantes, ya que, el trasformado del origen es distinto en cada caso.

Inicio

84. Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación T dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = -3 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}z \\ y' = -2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \end{cases}$$

Solución

1. Determinar la matriz $N = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline T(O) & M \end{array}\right)$.

La matriz de la transformación geométrica es:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -2 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

2. Si $M \cdot M^t = p \cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k = \sqrt{p}$ y la matriz $Q = \frac{1}{k} \cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

por tanto, observamos que T no es un movimiento ($M \cdot M^t \neq I$).

Si $|M| = |kQ| > 0$, la semejanza es directa

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow k = \sqrt[3]{8} = 2$$

y por tanto, la transformación T es una **semejanza directa de razón k=2** y Q es la matriz de un giro.

Si hacemos $k = \sqrt{4} = 2$, la matriz M se puede expresar de la forma $M = k\,Q$.

$$M = kQ \Rightarrow Q = \frac{1}{k}M \;\Rightarrow\; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3 = \det(M)$, es decir, $k = \sqrt{|p|}$ tal que $M \cdot M^t = p \cdot I_3$.

Ya calculada **k=2.**

- **Centro de la semejanza:** el punto doble obtenido al resolver $(N - I)\,\overline{X} = 0$.

Por ser el centro C un punto invariante de la semejanza, C es la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{4}{3}; \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

luego, $C\left(3, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ **es el centro de semejanza.**

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema $Q\,X = X \;\Leftrightarrow\; (Q - I)\,X = 0$

El vector $\vec{e}$ del eje de semejanza, es una solución particular no nula, del sistema de ecuaciones lineales $(Q - I)X = 0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este sistema de ecuaciones tiene por solución general, $x = 2z, \quad y = z$, siendo $(2,\ 1,\ 1)$ una solución particular de dicho sistema.

Así pues, $(x,y,z) = \left(3, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) + (2,\ 1,\ 1)t$, es una ecuación del eje de semejanza.

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza Q=Traza}\left(\frac{1}{k}M\right) = \text{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

El ángulo α de la semejanza ha de verificar:

$$1 + 2\cos\alpha = \text{traza}(Q) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -1 \;\Rightarrow\; 1 + 2\cos\alpha = -1 \text{ y por tanto, } \alpha = \pi .$$

Inicio

85. Encontrar dos homotecias cuya composición sea una traslación.

Solución

Consideremos las matrices de dos homotecias:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & k' & 0 & 0 \\ b' & 0 & k' & 0 \\ c' & 0 & 0 & k' \end{pmatrix}$$

la matriz de su composición será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & k & 0 & 0 \\ b & 0 & k & 0 \\ c & 0 & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & k' & 0 & 0 \\ b' & 0 & k' & 0 \\ c' & 0 & 0 & k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a + ka' & kk' & 0 & 0 \\ b + kb' & 0 & kk' & 0 \\ c + kc' & 0 & 0 & kk' \end{pmatrix}$$

que corresponde a la matriz de una traslación de vector $(a+ka',\ b+kb',\ c+kc')$ si y sólo si $kk'=1$, luego debemos componer homotecias cuyas razones cumplan que k=1/k'.

Inicio

86. Clasificar la siguiente transformación del espacio obteniendo sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

Solución

Si $M\cdot M^t = p\cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k=\sqrt{p}$ y la matriz $Q=\frac{1}{k}\cdot M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M\cdot M^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I$$

Si $|M| = |kQ| < 0$, la semejanza es inversa

Por ser, $|M| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 < 0$ y $Q = \frac{1}{\sqrt[3]{-27}}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal, se trata de una **semejanza inversa de razón** $k = \left|\sqrt[3]{-27}\right| = 3$.

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3 = -\det(M)$, es decir, $k=\sqrt{|p|}$ tal que $M\cdot M^t = p\cdot I_3$.

Ya calculada **k=3.**

- **Centro de semejanza:** es el punto doble obtenido al resolver $(N-I)\,\overline{X} = 0$.

El centro de esta semejanza es su único punto doble y por lo tanto, la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&-2&-2\\1&-2&2&-1\\3&-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-2&-2&-2\\1&-2&1&-1\\3&-2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x-2y-2z=0\\1-2x+y-z=0\\3-2x-y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=0\\z=-1\end{array}\right..$$

Luego el punto $C(1,\ 0,-1)$ es el **centro de semejanza.**

Por tratarse de una semejanza inversa de centro C y razón k=3, puede descomponerse en el producto de un giro, cuyo eje pasa por C, y una homotecia inversa de centro C y razón -3.

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema Q X = X $\Leftrightarrow$ (Q – I) X = 0

En este caso, $Q=\dfrac{1}{-k}M$, para que efectivamente Q corresponda a un giro.

Por lo tanto, el eje de giro es la recta que pasa por el punto $C(1,\ 0,-1)$ y tiene como vector dirección un vector invariante por Q.

Resolviendo el sistema:

$$(Q-I)X=0\ \Rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

se obtiene la solución general $\left\{\begin{array}{l}x=2z\\y=z\end{array}\right.$, y una solución particular $\vec{e}=(2,\ 1,\ 1)$.

Luego una ecuación del eje de semejanza es:

$$x=1+2t\ ,\ \ y=t\ ,\ \ z=-1+t\ .$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza Q=Traza}\left(\frac{1}{-k}M\right)=\text{Traza}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\text{sen}\,\alpha\\0&\text{sen}\,\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

El ángulo α de la semejanza ha de verificar:

$$1+2\cos\alpha = \text{traza}(Q) = \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3} = -1 \Rightarrow \cos\alpha = -1 \text{ y por tanto, } \alpha = \pi .$$

Inicio

87. Hallar las ecuaciones de las homotecias que transforman, el pentágono regular P de centro O(-1, -1, -1) y lado 2 en el pentágono regular P' de centro O'(3, 3, 3) y lado 6.

Solución

Existe una h omotecia directa y u na homotecia i nversa que transform a el pentágono P en el pentágono de centro P'.

Si el pentágo no P, se tran sforma por una hom otecia en el pentág ono P', el centro $O(-1,-1,-1)$, se transforma en el centro $O'(3, 3, 3)$ y el lado $\ell = 2$ en el lado $\ell' = 6$. Por lo tanto, las razones de la s posibles homotecias son $k = \pm\frac{\ell'}{\ell} = \pm 3$.

Si $k = 3$ se trata de una homotecia directa y si $k = -3$ de una homotecia inversa.

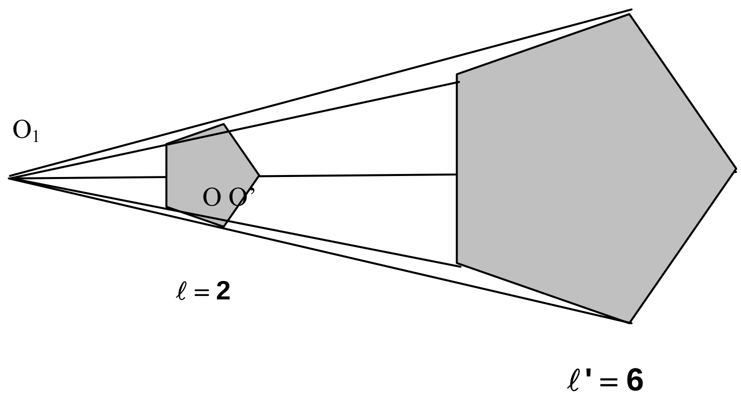
La ecuación general de las homotecias es:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&k&0&0\\b&0&k&0\\c&0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\(1-k)a&k&0&0\\(1-k)b&0&k&0\\(1-k)c&0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Cálculo de la homotecia directa, sustituimos $k = 3$ y las coordenadas de O y O'

$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2a&3&0&0\\-2b&0&3&0\\-2c&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ resolviendo el sistema } \begin{cases}3=-2a-3\\3=-2b-3\\3=-2c-3\end{cases} \text{ nos queda} \Rightarrow (a,\ b,\ c) = (-3,\ -3\ -3)$$

luego, la homotecia de razón 3 y centro $O_1(-3, -3, -3)$ transforma el pentágono P en el pentágono P'.

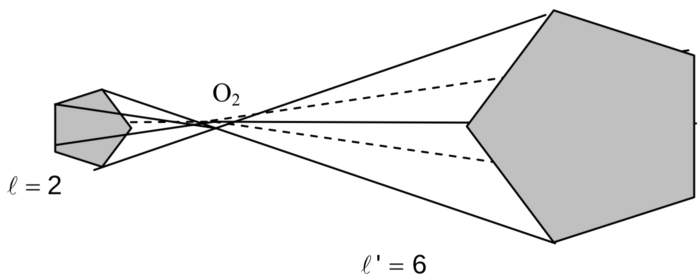


Homotecia de centro O_1 y razón k=3

Cálculo de la homotecia inversa $k = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4a & -3 & 0 & 0 \\ 4b & 0 & -3 & 0 \\ 4c & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (a,\ b,\ c) = \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2} \right)$$

luego, la homotecia de razón -3 y centro $O_2\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2} \right)$ transforma el pentágono P en el pentágono P'.



Inicio

Homotecia de centro O_2 y razón k= - 3

88. Estudiar si la siguiente ecuación corresponde a una semejanza del espacio. En caso afirmativo, calcular sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución

Si $M \cdot M^t = p \cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es $k = \sqrt{p}$ y la matriz $Q = \frac{1}{k} M$ es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M\cdot M^t=\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&0&0\\0&\frac{1}{9}&0\\0&0&\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\frac{1}{9}I$$

Si $|M|=|kQ|>0$, la semejanza es directa

$|M|=\begin{vmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\neq\pm1$ no es un movimiento, tampoco una homotecia, ya que la matriz no es escalar, la ecuación del enunciado corresponde a la ecuación de una **semejanza directa de razón** $k=\left|\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right|=\frac{1}{3}$.

Calculamos la matriz $Q=\frac{1}{k}M=\frac{1}{\sqrt[3]{|M|}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3=\det(M)$, es decir, $k=\sqrt{p}$ tal que $M\cdot M^t=p\cdot I_3$.

Ya calculada **k=1/3.**

- **Centro de semejanza:** es el punto doble obtenido al resolver $(N-I)\overline{X}=0$.

El centro de esta semejanza es el único punto doble:

$$\overline{X}=N\overline{X}\Leftrightarrow(N-I)\overline{X}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\1&-\frac{2}{9}&-\frac{8}{9}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{7}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}0-\frac{7}{9}x+\frac{2}{9}y+\frac{1}{9}z=0\\1-\frac{2}{9}x-\frac{8}{9}y+\frac{2}{9}z=0\\1+\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}y-\frac{7}{9}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{5}{4}\\z=1\end{cases}$

$$C\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ 1\right).$$

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema Q X = X $\Leftrightarrow$ (Q – I) X = 0

La matriz ortogonal del giro que compone esta semejanza es la matriz $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, obtenida anteriormente.

El eje de giro es la recta que pasa por C y tiene como vector dirección, un vector invariante por Q.

$$(Q-I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

y una solución particular del sistema anterior es, $\vec{u} = (1,\ 0,\ 1)$.

Así pues, la ecuación del eje de giro en forma paramétricas es:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza } Q = \text{Traza}\left(\frac{1}{k}M\right) = \text{Traza} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1 + 2\cos\alpha$$

El ángulo α de la semejanza es solución de la ecuación:

$$1 + 2\cos\alpha = \text{traza}(Q) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 + 2\cos\alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \text{ y por tanto, } \alpha = \pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Inicio

89. Clasificar la transformación resultante de aplicar la semejanza del problema 85 por la semejanza del problema 87.

Solución

Sea T la semejanza del problema 85 de ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&-2&-2\\1&-2&2&-1\\3&-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Sea T' la semejanza del problema 87 de ecuación

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\1&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

La ecuación de la transformación producto $S=T'\circ T$ será:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\1&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&-2&-2\\1&-2&2&-1\\3&-2&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

y m ultiplicando las m atrices anterior es obtenem os la ecuació n m atricial del producto de las semejanzas dadas

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{5}{9}&\frac{-8}{9}&-\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\\frac{16}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\\\frac{13}{9}&-\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Clasificación de transformación producto $S=T'\circ T$.

Por ser $|M| = \begin{vmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = -1$, y M una matriz ortogonal, se trata de una simetría especular, deslizante o rotacional.

Estudiar el tipo de movimiento:

Estudiemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\overline{X} = N\overline{X} \Leftrightarrow (N - I)\overline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{-8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{16}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por ser $rg(N - I) = rg(M - I) = 3$ se trata de un sistema compatible determinado y $S = T' \circ T$ es una **simetría rotacional.**

Inicio

90. Hallar la ecuación matricial, de la transformación resultante de componer, el giro de ángulo π y eje la recta (x,y,z)=(0,0,1)+t(0,1,1), seguido de la homotecia de centro C(0,0,1) y razón k=5.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

Se trata de obtener las ecuaciones de la transformación $T = H_{C,k} \circ G_{r,\alpha}$.

La ecuación del $G_{r,\alpha}$ se obtuvo en el problema 67.

$$G_{r,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La ecuación de la homotecia $H_{C(0,0,1),k=5}$ es:

$$H_{C(0,0,1),k=5} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}.$$

Ambas ecuaciones pueden escribirse de la forma:

$$G_{r,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H_{C,K} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y la ecuación de la composición en el orden dado será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

multiplicando las matrices de orden 4 anteriores, se obtiene la ecuación matricial de la transformación T

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ o bien, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En este caso el **producto es conmutativo**, por ser el centro de la homotecia un punto del eje de giro.

T es la composición de una homotecia directa y un giro, además, el centro de la homotecia es un punto del eje de giro, por tanto, T es una semejanza directa, de razón 5, de centro $C(0, 0, 1)$ y cuyo eje y ángulo coincide con el eje de giro.

Inicio

91. Hallar las ecuaciones que definen la transformación resultante, de componer, una homotecia de centro $C(-1, 0, 1)$ y razón $k = -5$ seguida de una rotación de ángulo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ respecto del eje $e \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$.

Hallar los elementos característicos de la transformación producto. ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

Se trata de obtener las ecuaciones de la transformación $T = G_{e,\alpha} \circ H_{C,k}$.

La ecuación del $G_{e,\alpha}$ se obtuvo en el problema 73.

$$G_{e,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La ecuación de la homotecia $H_{C(-1,0,1),k=-5}$ es:

$$H_{C(-1,0,1),k=-5} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}.$$

Ambas ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$G_{r,\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H_{C,K} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La ecuación de la composición en el orden dado será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

si multiplicamos las matrices anteriores se obtiene la ecuación matricial de la transformación T

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&0&0&-5\\0&0&-5&0\\8&5&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix},\text{ o bien, }\begin{cases}x'=2-5z\\y'=-5y\\z'=8+5x\end{cases}.$$

En este caso el producto no es conmutativo, ya que, el centro de la homotecia no es un punto del eje de giro.

T es la composición de una homotecia inversa y un giro, además, el centro de homotecia no es un punto del eje de giro, por tanto, T es una **semejanza inversa, de razón 5 y ángulo** $-\frac{\pi}{2}$**.**

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza inversa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que k^3 = - det(M), es decir, $k=\sqrt{|p|}$ tal que $M\cdot M^t=p\cdot I_3$.

Ya dada **k=5.**

- **Centro de semejanza:** es el punto doble obtenido al resolver (N – I) $\overline{X}$ = 0.

El centro de semejanza es el único punto doble, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}x=2-5z\\y=-5y\\z=8+5x\end{cases}$$

por tanto, $C\left(-\frac{19}{13},\ 0,\ \frac{9}{13}\right)$.

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema $Q\,X = X \Leftrightarrow (Q-I)\,X=0$

En este caso, $Q=\frac{1}{-k}M$, para que efectivamente Q corresponda a un giro.

$$(Q-I)X=0 \text{ siendo } Q=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}0&0&-5\\0&-5&0\\5&0&0\end{pmatrix} \text{ es:}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow (x,y,z)=(0,\ t,\ 0),$$

Luego una ecuación del eje de semejanza es $\begin{cases} x = -\dfrac{19}{13} \\ y = 0 + t \\ z = \dfrac{9}{13} \end{cases}$.

Inicio

92. Estudiar y hallar los elementos característicos de la transformación producto $S_\pi \circ H_{C,K}$, siendo, la ecuación del plano de simetría $\pi \equiv y - 1 = 0$, el centro C(0, 1, 0) y la razón de la homotecia $k = -3$ ¿Es conmutativo dicho producto?

Solución

La ecuación de la homotecia $H_{C(0,1,0),k=-3}$ es:

$$H_{C(0,1,0),k=-3} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación del S_π se obtuvo en el problema 72.

$$S_\pi \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se trata de obtener las ecuaciones de la transformación $T = S_\pi \circ H_{C,k}$.

Las ecuaciones de la homotecia y simetría, se pueden escribirse de la forma

$$H_{C,K} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$S_\pi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y la ecuación de la composición en el orden dado será:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\4&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

multiplicando las matrices anteriores se obtiene la ecuación matricial de la transformación T

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\-2&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix},\text{ o bien, }\begin{cases}x'=-3x\\y'=-2+3y\\z'=-3z\end{cases}.$$

En este caso el producto es conmutativo, ya que, el centro de la homotecia es un punto del plano de simetría.

T es la composición de una homotecia inversa y una simetría especular, por tanto, T es una **semejanza directa**, de razón 3, y centro $C(0,\ 1,\ 0)$.

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema $Q\,X = X \iff (Q-I)\,X = 0$

$$(Q-I)X=0 \text{ siendo } Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

La solución de $(Q-I)X=0$ es:

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow (x,y,z)=(0,\ t,\ 0)$$

por tanto, una ecuación del eje de semejanza será

$$\begin{cases}x=0\\y=1+t\\z=0\end{cases}.$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza Q=Traza}\left(\frac{1}{k}M\right)=\text{Traza}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\text{-sen }\alpha\\0&\text{sen }\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=1+2\cos\alpha$$

Por ser la traza de la matriz Q (matriz del giro) un invariante

$-1+1-1=1+2\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos(-1) = 180^{\circ}$, por tanto, $\alpha = 180^{\circ}$ es el ángulo de semejanza.

Inicio

93. Hallar el centro de la homotecia producto de dos homotecias, cuando dicho producto no es una traslación. Demostrar que los tres centros están alineados.

Solución

Sean T_0, T_1 dos homotecias de centros $C_0(a_0, b_0, c_0)$, $C_1(a_1, b_1, c_1)$ y razones k_0, k_1, respectivamente.

Las ecuaciones de estas homotecias son:

$$T_0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_0 \\ y-b_0 \\ z-c_0 \end{pmatrix}$$

y

$$T_1 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-b_1 \\ z-c_1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de estas homotecias son:

$$T_0 \quad \rightarrow \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0(1-k) & k_0 & 0 & 0 \\ b_0(1-k) & 0 & k_0 & 0 \\ c_0(1-k) & 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \quad \rightarrow \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1(1-k_1) & k_1 & 0 & 0 \\ b_1(1-k_1) & 0 & k_1 & 0 \\ c_1(1-k_1) & 0 & 0 & k_1 \end{pmatrix}$$

La composición $T = T_0 \circ T_1$ tendrá por matriz:

$$N = N_0 N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)a_1 & K_0 k_1 & 0 & 0 \\ b_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)b_1 & 0 & K_0 k_1 & 0 \\ c_0(1-k_0)+k_0(1-k_1)c_1 & 0 & 0 & K_0 k_1 \end{pmatrix}$$

Además $k = k_0 k_1 \neq 1$ para que T no sea una traslación. El centro de T es la solución del sistema $(N - I)\overline{X} = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0(1-k_0) + k(1-k_1)a_1 + \left(k_0k_1 - 1\right)x = 0 \\ b_0(1-k_0) + k(1-k_1)b_1 + \left(k_0k_1 - 1\right)y = 0 \\ c_0(1-k_0) + k(1-k_1)c_1 + \left(k_0k_1 - 1\right)z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$C(x,y,z) = \left(\frac{a_0(1-k_0)+k_0\left(1-k_1\right)a_1}{1-k_0k_1}, \frac{b_0(1-k_0)+k_0\left(1-k_1\right)b_1}{1-k_0k_1}, \frac{c_0(1-k_0)+k_0\left(1-k_1\right)c_1}{1-k_0k_1}\right) =$$

$$= \frac{1-k_0}{1-k_0k_1}\left(a_0, b_0, c_0\right) + \frac{k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1}\left(a_1, b_1, c_1\right)$$

por tanto:

$$C = \frac{1-k_0}{1-k_0k_1}C_0 + \frac{k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1}C_1$$

Ahora debemos imponer la condición para que C, C_0 y C_1 estén alineados, es decir, para que los vectores $\overrightarrow{C_0C_1}$ y $\overrightarrow{C_0C}$ sean proporcionales. Lo más fácil es verificar que el producto vectorial de los vectores es el vector nulo.

$$\overrightarrow{C_0C_1} = \left(a_1 - a_0,\ b_1 - b_0,\ c_1 - c_0\right)$$

$$\overrightarrow{C_0C} = \left(\frac{\left(a_1 - a_0\right)k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1}, \frac{\left(b_1 - b_0\right)k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1}, \frac{\left(c_1 - c_0\right)k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1}\right) =$$

$$= \frac{k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1}\left(a_1 - a_0,\ b_1 - b_0,\ c_1 - c_0\right)$$

la igualdad anterior nos permite concluir que los centros C, C_0 y C_1 están alineados.

La ecuación anterior es una interpolación lineal de los centros de las homotecias de partida, pues

$$\frac{1-k_0}{1-k_0k_1} + \frac{k_0\left(1-k_1\right)}{1-k_0k_1} = 1.$$

Vemos así que el centro de T está alineado con los de T_0 y T_1.

Inicio

94. Hallar las ecuaciones de una semejanza inversa, de razón $k=4$, de centro el punto $C(1,\ 1,\ 1)$, de ángulo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ y cuyo eje de semejanza es la recta $e\equiv(x,y,z)=(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 0)$.

Solución

Una semejanza inversa es la composición de un giro y una homotecia inversa, así,

$$S(C,k,e,\alpha)=H(C,K)\circ G(e,\alpha)\ \text{ con }\ C\in e\,.$$

La ecuación matrici al del giro de eje $e\equiv(x,y,z)=(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 0)$ y ángulo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ fue obtenida en el problema 78 es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La ecuación de la homotecia, en forma matricial, de centro C y razón $k=-4$ es:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&-4&0&0\\5&0&-4&0\\5&0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

La composición $T=T_0\circ T_1$ tendrá por matriz:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5&-4&0&0\\5&0&-4&0\\5&0&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\5-2\sqrt{2}&-2&-2&2\sqrt{2}\\5+2\sqrt{2}&-2&-2&-2\sqrt{2}\\1&-2\sqrt{2}&2\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Inicio

95. Estudiar la transformación geométrica T, tal que los puntos A = (0, -1.5, 0.13), B = (0.5, -0.3, -1.3), C = (-0.3, 0.7, 0.9) y D = (0, 0.9, 0.15) se transforman en A' = (-6, 7.5, 3.35), B' = (-8.5, 1.5, 10.5), C' = (-4.5, -3.5, -0.5), y D' = (-6, -4.5, 3.25) respectivamente.

Solución

Se cumple que: T(A)=A', T(B)=B', T(C)=C' y T(D)=D' y en forma matricial, escribiendo conjuntamente $N\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ para los cuatro puntos:

$$N\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0.5&-0.3&0\\-1.5&-0.3&0.7&0.9\\0.13&-1.3&0.9&0.15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-6&-8.5&-4.5&-6\\7.5&1.5&-3.5&-4.5\\3.35&10.5&-0.5&3.25\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-6&-8.5&-4.5&-6\\7.5&1.5&-3.5&-4.5\\3.35&10.5&-0.5&3.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0.5&-0.3&0\\-1.5&-0.3&0.7&0.9\\0.13&-1.3&0.9&0.15\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la transformación geométrica T, son:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-6&-5&0&0\\0&0&-5&0\\4&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La matriz asociada es $M=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$ = -5 I.

Luego se trata de una **homotecia** inversa del espacio E_3.

Cálculo de los elementos característicos de la homotecia:

- **Razón de la homotecia:** es el número real k tal que $M = k\cdot I_3$.

La razón es $k=\sqrt[3]{-125}$ = **-5.**

- **Centro de homotecia:** es el punto doble obtenido al resolver (N – I) $\overline{X}$ = 0.

Es la solución del sistema:

$$(N-I)\overline{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Inicio