INTEGRALES IMPROPIAS

La integral se dice **impropia** si ocurre al menos uno de los siguientes casos:

- a o b o ambos son infinitos.
- La función f(x) no está acotada (se hace infinita) en uno o más puntos del intervalo [a,b].

Ejemplos: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$; $\int_0^{2} \frac{1}{x-1}dx$; $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

En el primer caso se llama integral impropia de 1ª especie.

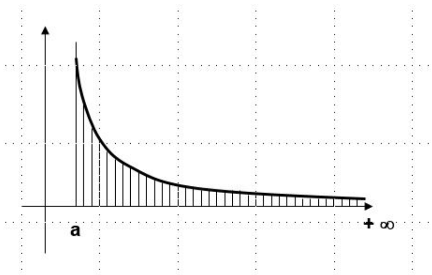
En el segundo caso integral impropia de 2ª especie.

Si ocurren ambos casos a la vez se llama integral impropia de 3ª especie.

INTEGRACIÓN EN INTERVALOS NO ACOTADOS (PRIMERA ESPECIE)

a) Sea $a \in R$ y una función integrable Riemann en todo [a,x], $\forall x \geq a \in R$. Diremos que $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^{k} f(x)dx$ cuando este límite existe y es finito, en cuyo caso la integral impropia es **convergente**. Si el límite anterior fuera infinito diríamos que la integral impropia es **divergente** y si carece de límite (no existe) que la función **no tiene integral**.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^{k} f(x)\,dx = \begin{cases} I \in \text{Real} \Rightarrow \text{Convergente} \\ \infty \Rightarrow \text{Divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{No hay integral} \end{cases}$$



- *Ejemplos:*

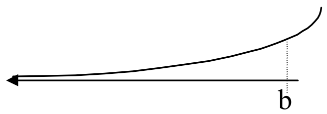
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k}+1\right) = 1 \Rightarrow \text{Convergente}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{k\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{k\to\infty}\left(2\sqrt{k}-2\right) = \infty \Rightarrow \text{Divergente}$$

$\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} \cos x\,dx = \lim_{k\to\infty}[\operatorname{sen} x]_0^k = \lim_{k\to\infty}(\operatorname{sen} k - \operatorname{sen} 0) = \text{no existe} \Rightarrow$ La función cosx no tiene integral en el intervalo $[0,+\infty)$.

b) Sea $b \in R$ y una función integrable Riemann en todo [x,b], $\forall x \leq b \in R$. Diremos que $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{b} f(x)dx$ cuando este límite existe y es finito, en cuyo caso la integral impropia es **convergente**. Si el límite anterior fuera infinito diríamos que la integral impropia es **divergente** y si carece de límite (no existe) que la función **no tiene integral**.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{k}^{b} f(x)\,dx = \begin{cases} I \in \text{Real} \Rightarrow \text{Convergente} \\ \infty \Rightarrow \text{Divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{No hay integral} \end{cases}$$



- Ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^{1/3}}dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{-1} x^{-1/3}dx = \lim_{k\to-\infty} \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{k}^{-1} = \frac{3}{2}\lim_{k\to-\infty}\left(1-k^{2/3}\right) = -\infty \Rightarrow \text{Divergente}$$

c) Por último, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente cuando lo sean ambas integrales.

- Ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x}dx = \lim_{k_1\to-\infty} \int_{k_1}^{0} e^{x}dx + \lim_{k_2\to\infty} \int_{0}^{k_2} e^{x}dx + = \lim_{k_1\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{k_1}^{0} + \lim_{k_2\to\infty}\left[e^{x}\right]_{0}^{k_2} = \infty \Rightarrow \text{Divergente}$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES NO ACOTADAS (SEGUNDA ESPECIE)

La función f(x) presenta una discontinuidad (no está acotada) en [a,b].

a) Sea una función definida en un intervalo (a,b] integrable Riemann en todo [x,b] siendo $a < x \leq b$ y tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ a<x}} f(x) = \pm\infty$. Diremos que $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_{x}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ cuando esté límite existe y es finito, en cuyo caso la integral impropia es **convergente**. Si el límite anterior fuera infinito diríamos que la integral impropia es **divergente** y si carece de límite (no existe) que la función **no tiene integral**.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \begin{cases} I \in \text{Real} \Rightarrow \text{Convergente} \\ \infty \Rightarrow \text{Divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{No hay integral} \end{cases}$$

- *Ejemplos:*

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|x|\right]_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1 - \ln\varepsilon\right) = \infty \Rightarrow \text{ Divergente}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 \Rightarrow \text{ Convergente}$$

b) Sea una función definida en un intervalo [a,b) integrable Riemann en todo [a,x] siendo $a \le x < b$ y tal que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \pm\infty$.

Diremos que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ cuando esté límite existe y es finito, en cuyo caso la integral impropia es **convergente**. Si el límite anterior fuera infinito diríamos que la integral impropia es **divergente** y si carece de límite (no existe) que la función **no tiene integral**.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \begin{cases} I\in \text{Real} \Rightarrow \text{ Convergente} \\ \infty \Rightarrow \text{ Divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{ No hay integral}\end{cases}$$

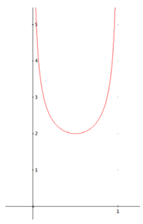
c) Si la función está definida en (a,b) con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, siendo integrable en todo intervalo contenido en (a,b) diremos que la integral es convergente cuando lo sean simultáneamente las integrales de f en los intervalos (a,c] y [c,b).

- *Ejemplo:*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{0+\varepsilon_1}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1/2}^{1-\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\text{arcsen}(2x-1)\right]_{\varepsilon_1}^{1/2} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[\text{arcsen}(2x-1)\right]_{1/2}^{1-\varepsilon_2} = -\text{arcsen}(-1) + \text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$

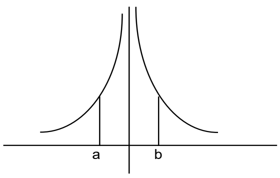
Convergente



d) Por último, f(x) está acotada $\forall x \in [a,b]$ **excepto** en un punto c $\in$ (a,b).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

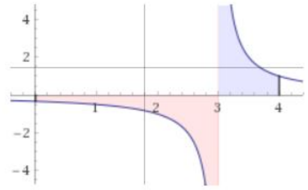
en caso de ser ambos límites finitos la integral del primer miembro es **convergente.**



- *Ejemplo:*

$$\int_0^4 \frac{1}{x-3}dx = \int_0^3 \frac{1}{x-3}dx + \int_3^4 \frac{1}{x-3}dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_0^{3-\varepsilon_1} \frac{1}{x-3}dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{3+\varepsilon_2}^4 \frac{1}{x-3}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left[\ln|x-3| \right]_0^{3-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left[\ln|x-3| \right]_{3-\varepsilon_2}^4 = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\ln|-\varepsilon_1| - \ln|-3| \right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left(\ln 1 - \ln \varepsilon_2 \right) = -\infty + \infty$$



INTEGRALES EN INTERVALOS NO ACOTADOS DE FUNCIONES NO ACOTADAS. (TERCERA ESPECIE)

Se trata de una integral con intervalo no acotado, y función no acotada en un número finito de puntos.

Descomponemos la integral en suma de las integrales de los tipos anteriores. Es convergente si todas las integrales de los sumandos son convergentes

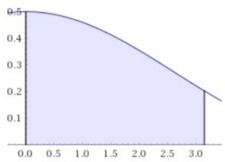
- *Ejemplo:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k_1 \to -\infty} \int_{k_1}^{c} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{c}^{0-\varepsilon_1} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{0+\varepsilon_2}^{d} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{k_2 \to \infty} \int_{d}^{k_2} \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= \lim_{k_1 \to -\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{k_1} \right) + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{c} \right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \lim_{k_2 \to \infty} \left(-\frac{1}{k_2} + \frac{1}{d} \right) = \infty \Rightarrow \text{Divergente}$$

NOTA:

- *Ejemplo* de una integral que no es impropia: $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$, puesto que $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$



Propiedad de las Integrales Impropias

Nos referiremos a las integrales impropias de 1ª especie, pero son válidas para las de 2ª y 3ª especie.

Sea f(x) y g(x) dos funciones continuas en $[a,\infty)$ y supongamos que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergen, entonces: $\int_a^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ y es convergente $\forall \alpha, \forall \beta \in R$.

CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

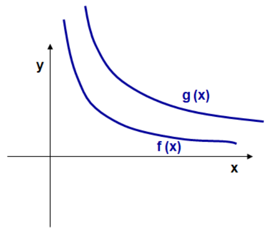
Integrales en intervalos no acotados $\int_a^{\infty} f(x)dx$ (1ª especie)

1. Criterio de comparación:

Sean f(x) y g(x) tales que $0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall x \geq a$

i) Si $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge

ii) Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge



2. Criterio de comparación en el límite:

Sean f(x) y g(x) tales que $0 \leq f(x), 0 \leq g(x), \ \forall x \geq a$ y $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

i) Si $A \in R, \ A \neq 0$ entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.

ii) Si A=0 y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge

iii) Si A=∞ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge

3. Corolario:

Sea f(x) tal que $0 \leq f(x), \ \forall x \geq a$ y $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1/x^p} = A$

i) Si $A \in R, \ A \neq 0$ y p>1, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

ii) Si $A \in R, \ A \neq 0$ y $p \leq 1$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge.

iii) Si A=0 y p>1, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

iiii) Si $A = \infty$ y $p \leq 1$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Puesto que sabemos que $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \textit{converge} \text{ si } p > 1 \\ \textit{diverge} \text{ si } p \leq 1 \end{cases}$ con a>0.

NOTA: Criterios análogos son válidos para $-\infty$

CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

Integrales de funciones no acotadas $\int_a^b f(x)dx$ con f(x) no acotada en x=a (2ª especie)

1. Criterio de comparación:

Sean f(x) y g(x) tales que $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \in (a,b]$

i) Si $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge

ii) Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)dx$ diverge

2. Criterio de comparación en el límite:

Sean f(x) y g(x) tales que $0 \le f(x), 0 \le g(x),\ \forall x \in (a,b]$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

i) Si $A \in R,\ A \ne 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.

ii) Si A=0 y $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge

iii) Si A=∞ y $\int_a^b g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge

3. Corolario:

Sea f(x) tal que $0 \le f(x),\ \forall x \in (a,b]$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{1/(x-a)^p} = A$

i) Si $A \in R,\ A \ne 0$ y p<1, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.

ii) Si $A \in R,\ A \ne 0$ y $p \ge 1$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

iii) Si A=0 y p<1, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.

iiii) Si $A = \infty$ y $p \ge 1$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Puesto que sabemos que $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \textit{converge} \text{ si p<1} \\ \textit{diverge} \text{ si } p \ge 1 \end{cases}$

NOTA: Criterios análogos son válidos cuando f(x) no está acotada en x=b.

INTEGRALES EULERIANAS

1) Función gamma de Euler

Sea $p \in R,\ p>0$. Sea $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ la **función gamma de Euler**. Esta integral es convergente y recibe el nombre de **integral euleriana de 1ª especie.**

$$R^{+} \xrightarrow{\Gamma} R$$

$$p \to \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

La función gamma, Γ, está bien definida, es decir, la integral impropia es convergente $\forall\ p>0$. En efecto, aplicando el criterio de comparación en el límite a cada una de las integrales:

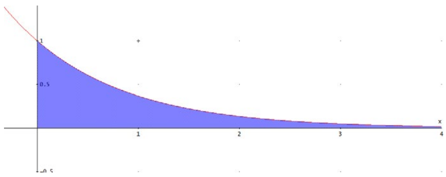
$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^{1} e^{-x} x^{p-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x} x^{p-1}}{1/x^{\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha} x^{p-1}}{e^{x}} \in R \ \text{ con } \alpha<1 \text{ resulta convergente.}$$

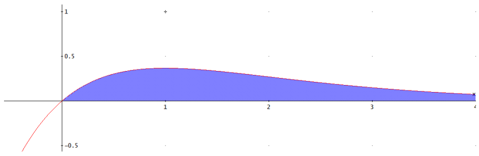
$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x} x^{p-1}}{1/x^{\alpha}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{\alpha} x^{p-1}}{e^{x}} \in R \ \text{ con } \alpha>1 \text{ resulta convergente.}$$

Podemos ver los siguientes valores de p en particular:

$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-x} dx = \lim_{k\to\infty} \left(-e^{-k} + e^{0}\right) = 1$, se corresponde con la función de densidad de la exponencial.

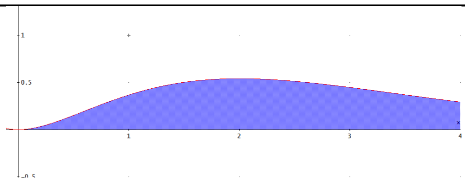


$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-x} x dx = \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^{k} = \lim_{k\to\infty} \left(-e^{-k}(k+1) + e^{-0}(0+1)\right) = 1$$



$$\Gamma(3) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{3-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2} dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-x} x^{2} dx = \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-x}(x^{2}+2x+2)\right]_0^{k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(-e^{-k}(k^{2}+2x+2) + 2\right) = 2$$



$p \geq 1$, se trata de una integral impropia de primera especie;

0<p<1 es una integral impropia de tercera especie.

Propiedades:

1.- $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

Demostración:

Resolvemos la integral $I = \int e^{-x}x^{p-1}dx$ por partes

$$\begin{matrix} u = x^{p-1} \Rightarrow du = (p-1)x^{p-2}dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix} \Rightarrow I = -e^{-x}x^{p-1} + (p-1)\int e^{-x}x^{p-2}dx$$

Luego,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-x}x^{p-1}dx = \lim_{k\to\infty}\left[-e^{-x}x^{p-1}\right]_0^k + (p-1)\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-2}dx = (p-1)\Gamma(p-1)$$

2.- $\Gamma(p) = (p-1)!$ **si** $p \in N$

Demostración:

Por la propiedad anterior:

$$\begin{aligned} &\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) \\ &\Gamma(p-1) = (p-2)\Gamma(p-2) \\ &\Gamma(p-2) = (p-3)\Gamma(p-3) \\ &\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ luego,} \\ &\Gamma(3) = 2\Gamma(2) \\ &\Gamma(2) = 1\Gamma(1) \\ &\Gamma(1) = 1 \end{aligned}$$

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) = \ldots = (p-1)(p-2)(p-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = (p-1)!$$

3.- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\text{sen}(\pi p)}$**, si 0<p<1.**

4.- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demostración:

En la propiedad 3 sustituyendo p=1/2 se obtiene:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi/2)} = \pi \Rightarrow \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Hay muchas funciones de densidad (*variables aleatorias*) que son o dependen de una función ***gamma: Normal, Uniforme, Exponencial***, $\chi_n^2, \ldots$

Véase, por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

2) Función beta de Euler

Sea $p, q \in R,\ p,q>0$. Sea $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ la **función beta de Euler**. Esta integral es convergente y recibe el nombre de **integral euleriana de 2ª especie.**

$$R^+ \times R^+ \xrightarrow{\beta} R$$
$$(p,q) \to \beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

La función beta, β, está bien definida, es decir, la integral impropia es convergente $\forall\ p,q>0$.

En efecto: si p y q ≥ 1, se trata de una integral definida. En caso contrario mediante la comparación en el límite $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = 1 \neq 0$ y la integral $\int_0^1 x^{p-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx$ es convergente para p>0.

Análogamente, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = 1 \neq 0$ y la integral $\int_0^1 (1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-q}}dx$ es convergente para q>0.

Podemos ver el siguiente caso cuando p=q=1/2 en particular:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{1/2-1}(1-x)^{1/2-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \pi \text{ (resuelta en la página 3)}$$

Propiedades:

1.- $\beta(p,q) = \beta(q,p)$

Demostración:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \underset{y=1-x}{=} -\int_1^0 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dy = \int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dy = \beta(q,p)$$

2.- $\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1}x \cos^{2q-1} x dx$

Demostración:

Resolvemos la integral por un cambio de variable:

$$x = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow dx = 2\operatorname{sen}t\cos t dt \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t = 1 \Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^{2p-2}t\cdot\cos^{2q-2}t\cdot 2\cdot\mathrm{sen}t\cdot\cos t\cdot dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^{2p-1}t\cdot\cos^{2q-1}t\cdot dt$$

Si ahora calculamos $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}dt=\pi$

3.- $\beta(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Si ahora calculamos $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)}=\pi\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$