EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

TEMA 1: EL ESPACIO AFÍN

TEMA 2: EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

TEMA 3: EL ESPACIO EUCLÍDEO

TEMA 1: EL ESPACIO AFÍN

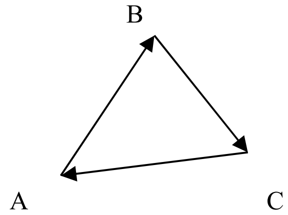
EL ESPACIO AFÍN

Definición: Sean $\mathbf{E}^3$ el conjunto de puntos del espacio, $V^3(R)$ el espacio vectorial real de los vectores libres del espacio, y $\begin{array}{l}\varphi: \mathbf{E}^3 \mathbf{x} \mathbf{E}^3 \to \mathbf{V}^3(\mathrm{R}) \\ (\mathrm{A,B}) \to \varphi(\mathrm{A,B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{array}$ una aplicación que verifica:

I) "Relación de Chasles" Si A, B, y $C \in \mathbf{E}^3$.

$\varphi(A,B) + \varphi(B,C) + \varphi(C,A) = \vec{0}$ o también

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$



II) $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{E}^3, \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}$, existe un único punto $B \in \mathbf{E}^3$ tal que $\varphi(A,B) = \vec{v}$.

Entonces a la terna ($\mathbf{E}^3$, $V^3(R)$, φ) se le denomina **espacio afín** y se escribe $\boldsymbol{A}^3$.

Los elementos del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ son los puntos del espacio ordinario. En ocasiones, se suele "identificar" el espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ con el conjunto de puntos $\mathbf{E}^3$, lo que no es correcto, pero si permisible, para simplificar la notación.

Definición: La **dimensión** del espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado $V^3(R)$.

Definición: Diremos que los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** (o **linealmente dependientes**) si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Propiedades:

1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B$;

2) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$;

3) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Demostración:

1) De la segunda condición de la definición: II) $\forall A \in \mathbf{E}^3, \forall \vec{0} \in V$, existe un único punto $B \in \mathbf{E}^3$ tal que $\varphi(A,B) = \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow B = A$.

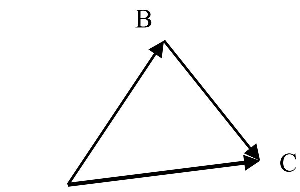
2) De la relación de Chasles $\varphi(A,A) + \varphi(A,A) + \varphi(A,A) = \vec{0}$

o también $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

3) Ahora $\varphi(A,B)+\varphi(B,A)+\varphi(A,A)=\vec{0}$ o también $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ y de aquí $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

4) Análogamente, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$,

$\underset{3)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, que constituye la definición de suma vectorial.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

SUBESPACIO AFINES

Definición: Sea $\boldsymbol{A^3}$ = ($\mathbf{E^3}$, $V^3(R)$, φ) un espacio afín. Sea **F** un subconjunto no vacío de $\mathbf{E^3}$, se dice que ***B***=(**F**,V(**F**), φ) es un **subespacio afín** de $\boldsymbol{A^3}$ si existe un punto $A \in F$ tal que V(**F**)=$\left\{\overrightarrow{AX} / X \in F\right\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $V^3(R)$.

Al subespacio afín también se le denomina **variedad lineal afin o variedades lineales**.

Proposición: El subespacio afín es independiente del punto que se tome.

Demostración:

Sea el subespacio afín ***B*** del espacio afín $\boldsymbol{A^3}$. Si $P,Q \in \boldsymbol{B}$ entonces $\left\{\overrightarrow{\mathbf{PX}} / \mathbf{X} \in \mathbf{B}\right\}=\left\{\overrightarrow{\mathbf{QX}} / \mathbf{X} \in \mathbf{B}\right\}$.

En efecto:

$$\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QX}=-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QX} \in \left\{\overrightarrow{\mathbf{PX}} / \mathbf{X} \in \mathbf{B}\right\}$$

$$\overrightarrow{QX}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PX}=-\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PX} \in \left\{\overrightarrow{\mathbf{QX}} / \mathbf{X} \in \mathbf{B}\right\}$$

Al subespacio vectorial V(**F**) se le denomina **subespacio vectorial asociado** al subespacio afín. ***B***.

Definición: La **dimensión** del subespacio afín es la dimensión del subespacio vectorial asociado.

Definición: Sean $\boldsymbol{A^3}$ un espacio afín, A un punto de **E** y W un subespacio vectorial de $V^3(R)$. Entonces ***B***=(**F**,W, φ) es un subespacio afín de $\boldsymbol{A^3}$, siendo **F**=$\left\{X \in E / \overrightarrow{AX} \in W\right\}$

Al subespacio vectorial W se le llama **dirección** de **F**.

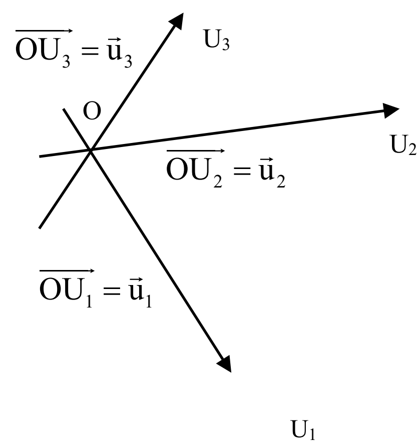
Al subespacio afín ***B***=(**F**,W, φ) que contiene al punto A y de dirección W se le expresa de forma simplificada: ***B***=A+W

Clasificación de los subespacios afines:

Si dim $\boldsymbol{B} = 0$ $\quad X = A$ punto.
Si dim $\boldsymbol{B} = 1$ $\quad X = A + t\vec{v}$ recta.
Si dim $\boldsymbol{B} = 2$ $\quad X = A + t\vec{v} + s\vec{w}$ plano.
Si dim $\boldsymbol{B} = 3$ $\quad X = A + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A^3}$ espacio total

SISTEMAS DE REFERENCIA

Definición: Sea $\boldsymbol{A^3}$ un espacio afín y $\mathfrak{R} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos, se dice que R constituye un **sistema de referencia** del espacio afín $\boldsymbol{A^3}$ cuando los vectores $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3}$ forman una base de $V^3(R)$. O es el **origen** del sistema de referencia.



Si $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OU_3} = \vec{u}_3$ entonces se tiene $\mathfrak{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia.

Definición: Sea $\mathfrak{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín, si $A \in \mathbf{E^3}$ al vector libre $\overrightarrow{OA}$ se le denomina **vector de posición** del punto A.

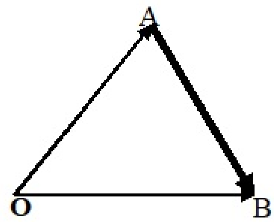
Proposición: Sean $\boldsymbol{A^3}$, $\mathfrak{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una referencia afín y R^3 el espacio vectorial real de dimensión 3. Entonces la aplicación c: $\mathbf{E^3} \rightarrow R^3$ definida por c(A)=(x,y,z) son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OA}$ respecto de la base B= $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$es biyectiva.

Demostración:
Para cada punto A se obtiene el vector de posición que respecto a la base B= $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es $\overrightarrow{OA} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = (x, y, z)$, es decir, $\begin{array}{l} E^3 \xrightarrow{\varphi_o} V^3(R) \xrightarrow{i} R^3 \\ A \rightarrow \overrightarrow{OA} \rightarrow (x, y, z) \end{array}$ **,** luego $c = i \circ \varphi_0$ que es biyectiva por ser composición de aplicaciones biyectivas.

Definición: Con la misma notación, se dice que (x,y,z) son las **coordenadas** del punto A respecto del sistema de referencia R si c(A)=(x,y,z).

Corolario 1: Las coordenadas vectoriales de $\overrightarrow{OA}$ son las coordenadas afines del punto A.

Corolario 2: Las coordenadas de un vector libre $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo B menos las coordenadas del origen A, es decir, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

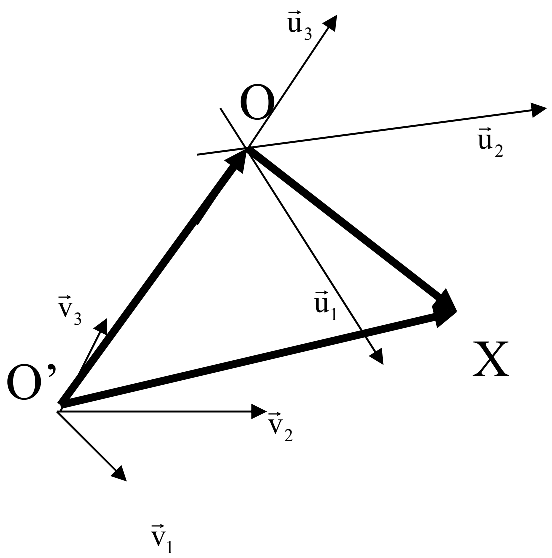


CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA

Sean $\mathfrak{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $\mathfrak{R}' = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dos sistemas de referencia del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{O'O} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$$



Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ y $\overrightarrow{O'X} = (x', y', z')$ respecto de $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$ respectivamente, luego $\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX}$.

$$\overline{O'O} + \overline{OX} = \underbrace{a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3}_{\overline{O'O}} + \underbrace{x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3}_{\overline{OX}} =$$

$$= ax'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 + z'\vec{v}_3 = \overline{O'X}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow [x]_{R'} = A.[x]_R$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{R}'$, que considerando la matriz A por bloques será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ c & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overrightarrow{O'O} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$, siendo P la matriz del cambio de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Para obtener el cambio de sistema de referencia de $\mathfrak{R}'$ a $\mathfrak{R}$, basta despejar en la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \overrightarrow{O'O} & P\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -P^{-1}\,\overrightarrow{O'O} & P^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ P^{-1}\,\overrightarrow{OO'} & P^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

Casos particulares:

I) Si la base no cambia, es decir, $\vec{u}_1=\vec{v}_1,\vec{u}_2=\vec{v}_2,\vec{u}_3=\vec{v}_3$ resulta:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$ una "**traslación**"

II) Si los orígenes coinciden(O=O'), es decir a=b=c=0 resulta:

$$\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a_{11}&a_{21}&a_{31}\\0&a_{12}&a_{22}&a_{32}\\0&a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$ un "**cambio de base**" vectorial.

Proposición: Todo cambio de referencia en el espacio afín es igual al producto de una "traslación" por un "cambio de base".

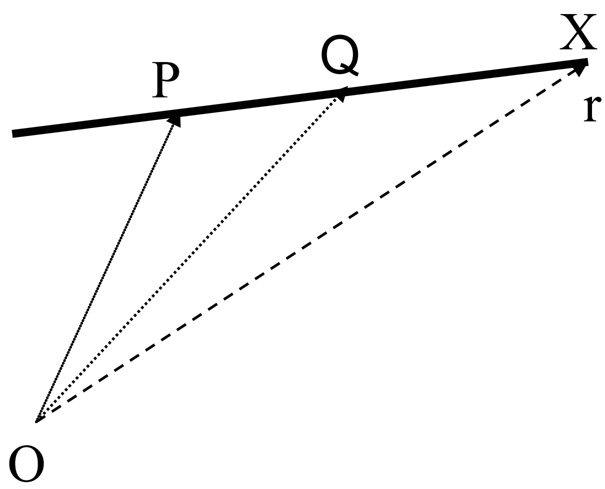
Demostración:

En efecto:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&a_{11}&a_{21}&a_{31}\\b&a_{12}&a_{22}&a_{32}\\c&a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a_{11}&a_{21}&a_{31}\\0&a_{12}&a_{22}&a_{32}\\0&a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a_{11}&a_{21}&a_{31}\\0&a_{12}&a_{22}&a_{32}\\0&a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

LA RECTA EN EL ESPACIO

Una recta queda determinada por dos puntos P y Q distintos. Si X es un punto cualquiera de la recta y $\mathfrak{R}=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia del espacio afín, la ecuación vectorial de la recta es $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\,\overrightarrow{PQ}$ y sus ecuaciones paramétricas para $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$, y $X=(x_1,x_2,x_3)$ respecto de $\mathfrak{R}$, son: $\begin{cases} x_1=p_1+t(q_1-p_1)\\ x_2=p_2+t(q_2-p_2)\\ x_3=p_3+t(q_3-p_3)\end{cases}$



Sea $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un **vector director** de la recta, es decir, un vector de la dirección de la recta entonces la ecuación vectorial es $X=P+t\vec{v}$ y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1=p_1+tv_1\\ x_2=p_2+tv_2\\ x_3=p_3+tv_3\end{cases}$.

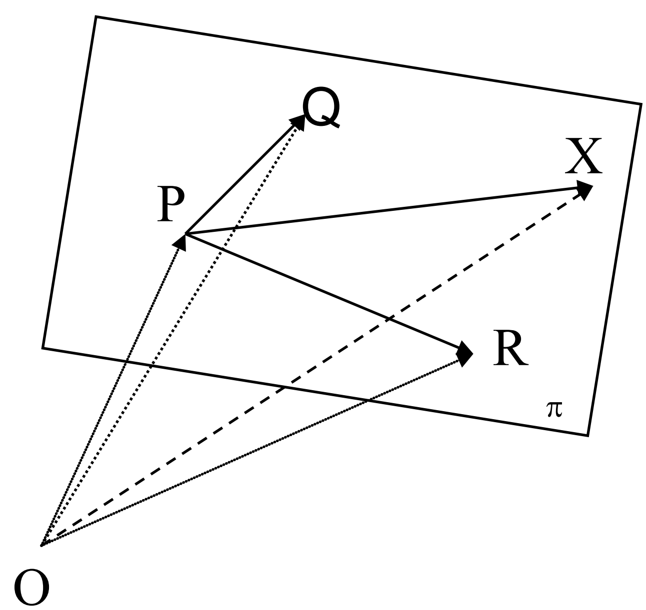
De donde eliminando el parámetro t queda en forma continua: $\dfrac{x_1-p_1}{v_1}=\dfrac{x_2-p_2}{v_2}=\dfrac{x_3-p_3}{v_3}$.

EL PLANO EN EL ESPACIO

Sea el sistema de referencia $\mathfrak{R}=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$

Un plano queda determinado por tres puntos P, Q y R no alineados, cualquier punto coplanario con ellos verifica $X=P+t\,\overrightarrow{PQ}+s\,\overrightarrow{PR}$.

De la ecuación vectorial, para $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$, $R=(r_1,r_2,r_3)$ y $X=(x_1,x_2,x_3)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1=p_1+t(q_1-p_1)+s(r_1-p_1)\\ x_2=p_2+t(q_2-p_2)+s(r_2-p_2)\\ x_3=p_3+t(q_3-p_3)+s(r_3-p_3)\end{cases}$



Si consideramos un punto P y dos vectores linealmente independientes $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ el plano queda determinado de forma vectorial por $X=P+t\vec{v}+s\vec{w}$ y por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1=p_1+tv_1+sw_1 \\ x_2=p_2+tv_2+sw_2 \\ x_3=p_3+tv_3+sw_3 \end{cases}$ de donde eliminando los parámetros t y s queda:

$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2-p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3-p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}=0$, la ecuación general, cartesiana o implícita del plano $\boxed{ax_1+bx_2+cx_3+d=0}$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean los planos:

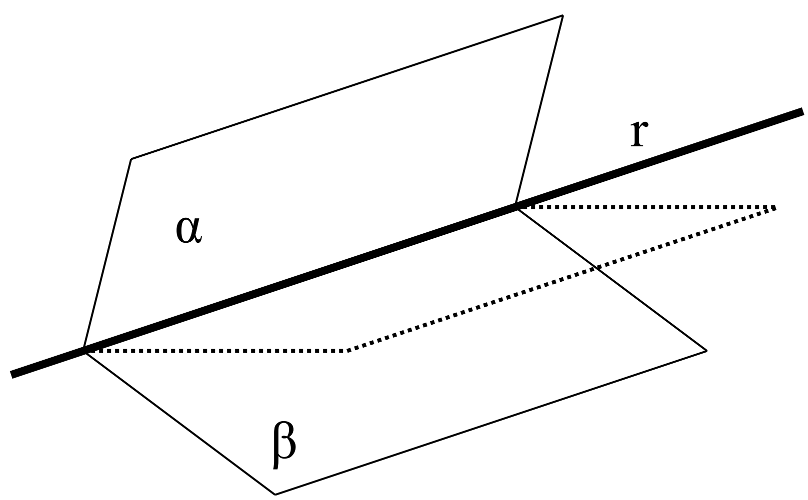
$\alpha \equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_0$ con $(a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0)$;

$\beta \equiv b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=b_0$ con $(b_1,b_2,b_3)\neq(0,0,0)$ considerando:

$r(A)=r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $\quad r(A^*)=r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \end{pmatrix}$

- Si r(A) = r(A*) = 2 el sistema es compatible indeterminado y los dos planos son **secantes**, es decir se cortan según una recta.

NOTA: Toda recta queda identificada como intersección de dos planos secantes mediante sus ecuaciones cartesianas. Denominamos "**haz de planos**" que contienen a una recta a la combinación lineal de dos planos cualesquiera que contengan a dicha recta: $\lambda(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-a_0)+\mu(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3-b_0)=0$.



- Si r(A) = 1; y r(A*) = 2 el sistema es incompatible y los dos planos son **paralelos**.
- Si r(A) = r(A*) = 1 el sistema es compatible indeterminado y los dos planos son **coincidentes**.

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Sean los planos:

$\alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0$ con $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$;

$\beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0$ con $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$;

$\gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0$ con $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ con:

$$r(A) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \qquad r(A^*) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$$

- Si r(A) = r(A*) = 3 el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un **punto**.
- Si r(A) = 2; y r(A*) = 3 el sistema es incompatible y se presentan dos subcasos:
  - I) Si todas las submatrices de orden 2x3 son de rango dos. Los planos se cortan dos a dos.
  - II) Si todas las submatrices de orden 2x3 son de rango dos, salvo una que es de rango uno. Dos planos son paralelos y el tercero les corta.
- Si r(A) = r(A*) = 2 el sistema es compatible indeterminado y se presentan dos subcasos:
  - III) Si todas las submatrices de orden 2x4 son de rango dos. Los tres planos se cortan formando una recta. En este caso, dos planos constituyen lo que se denomina un "haz de planos".
  - IV) Si todas las submatrices de orden 2x4 son de rango dos, salvo una que es de rango uno. Dos planos son coincidentes y el tercero les corta.
- Si r(A) =1; r(A*) = 2 el sistema es incompatible y se presentan dos subcasos:
  - V) Si todas las submatrices de orden 2x4 son de rango dos. Los tres planos son paralelos.
  - VI) Si todas las submatrices de orden 2x4 son de rango dos, salvo una que es de rango uno. Dos planos son coincidentes y el tercero paralelo.
- Si r(A) = r(A*) = 1 el sistema es compatible indeterminado y los tres planos son **coincidentes**.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean las rectas r y s determinadas por los planos:

$$r\begin{cases} \alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0 \text{ con } (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0) \\ \beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0 \text{ con } (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0) \end{cases}$$

$$s\begin{cases} \gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0 \text{ con } (c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0) \\ \delta \equiv d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = d_0 \text{ con } (d_1, d_2, d_3) \neq (0,0,0) \end{cases} \text{con:}$$

$$r(A) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \qquad r(A^*) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_0 \end{pmatrix}$$

- Si r(A*) = 4. Las dos rectas se **cruzan**, pues no están en el mismo plano.

- Si $r(A^*) \neq 4$. Las dos rectas son **coplanarias** y se presenta los siguientes subcasos:
  - Si $r(A) = r(A^*) = 3$. Las dos rectas se cortan en un **punto**.
  - Si $r(A) = 2$; $r(A^*) = 3$. Las dos rectas son **paralelas**.
  - Si $r(A) = r(A^*) = 2$. Las dos rectas son **coincidentes**.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO

Sean la recta r determinada por los planos α y β y el plano γ:

$\alpha \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_0$ con $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$;

$\beta \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_0$ con $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$;

$\gamma \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_0$ con $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ con:

$$r(A) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \qquad r(A^*) = r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$$

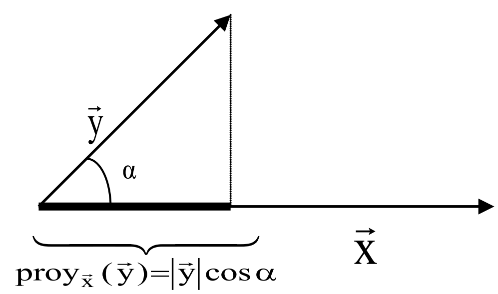
- Si $r(A) = r(A^*) = 3$. La recta es **incidente** con el plano.
- Si $r(A) = 2$; $r(A^*) = 3$. La recta es **paralela** al plano.
- Si $r(A) = r(A^*) = 2$. La recta esta **contenida** en el plano.

TEMA 2: EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

PRODUCTO ESCALAR

Definición: Sea $V^3(R)$ el espacio vectorial de los vectores libres del espacio sobre el cuerpo R. Llamamos **producto escalar** en $V^3(R)$ a la aplicación: $\begin{array}{l} V^3(R) \times V^3(R) \to R \\ (\vec{x},\vec{y}) \to \vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha \end{array}$ siendo α el ángulo que forman, en un punto cualquiera, un representante de $\vec{x}$ y otro de $\vec{y}$ con $0 \le \alpha \le \pi$. El número real $|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha$ se llama producto escalar de $\vec{x}$ por $\vec{y}$.

Proposición: El producto escalar de dos vectores es el producto del módulo de un vector por la **proyección** del otro sobre él. Además, $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$, el producto escalar de $\vec{x}$ por $\vec{y}$ es un número positivo, negativo o cero según que el ángulo que formen $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sea agudo, obtuso o recto respectivamente.



Demostración:

$$\vec{x}.\vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\alpha = |\vec{x}|\,\text{proy}_{\vec{x}}(\vec{y})$$

Propiedades del producto escalar

1) Si $\vec{x} = \vec{0}$ o $\vec{y} = \vec{0}$ o $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son perpendiculares, entonces $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$.

Demostración:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos 90^{o} = 0$$

2) Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$ si y sólo si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son perpendiculares.

Demostración:

$$0 = \vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{0} \\ \text{ó} \\ \vec{y} = \vec{0} \\ \text{ó} \\ \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^{o} \end{cases}$$

3) Conmutativa: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x},\ \forall \vec{x},\vec{y} \in V^3$

Demostración:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos(\vec{x},\vec{y})=|\vec{y}|.|\vec{x}|.\cos(\vec{y},\vec{x})=\vec{y}\cdot\vec{x}$$

4) Distributiva respecto de la suma: $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$, $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3$

Demostración:

Mediante la proyección de los vectores $\vec{y},\vec{z}$ e $\vec{y}+\vec{z}$ sobre el vector $\vec{x}$:

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=|\vec{x}|.|\vec{y}+\vec{z}|.\cos(\vec{x},\vec{y}+\vec{z})=|\vec{x}|\operatorname{proy}_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z})=|\vec{x}|\left(\operatorname{proy}_{\vec{x}}(\vec{y})+\operatorname{proy}_{\vec{x}}(\vec{z})\right)=$$

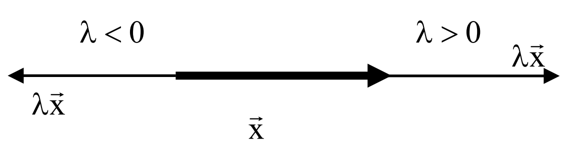
$$=|\vec{x}|\operatorname{proy}_{\vec{x}}(\vec{y})+|\vec{x}|\operatorname{proy}_{\vec{x}}(\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$$

5) Pseudoasociativa: $\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})=(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot(\lambda\vec{y})=(\vec{x}\cdot\vec{y})\lambda,\ \forall\vec{x},\vec{y}\in V^3,\forall\lambda\in R$

Demostración:

$$\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})=\lambda|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos\alpha=\lambda.|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\lambda.\cos(\vec{x},\vec{y})=$$

$$=\left\{\begin{array}{lll}|\vec{x}|.|\vec{y}|.\lambda.\cos(\lambda\vec{x},\vec{y}) & \text{si} & \lambda>0\\ 0 & \text{si} & \lambda=0\\ |\vec{x}|.|\vec{y}|.\lambda.\left(-\cos(\lambda\vec{x},\vec{y})\right) & \text{si} & \lambda<0\end{array}\right\}=|\vec{x}|.|\vec{y}|.|\lambda|.\cos(\lambda\vec{x},\vec{y})=(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y}$$



6) Si $\vec{x}\neq\vec{0}$, entonces $\vec{x}\cdot\vec{x}>0$; $\vec{x}\cdot\vec{x}=0$ si y sólo si $\vec{x}=\vec{0}$.

Demostración:

$$\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|.|\vec{x}|.\cos\alpha=|\vec{x}|.|\vec{x}|.\cos(\vec{x},\vec{x})=|\vec{x}|.|\vec{x}|.\cos 0^{\circ}=|\vec{x}|^2\geq 0$$

Antes de pasar a enunciar el resto de las propiedades del producto escalar necesitamos dar la siguiente definición: Para cada $\vec{x}\in V^3$, llamamos **norma** de $\vec{x}$: $\|\vec{x}\|=+\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=+\sqrt{|\vec{x}|^2}=|\vec{x}|$, es decir, la norma de un vector coincide con su módulo. Más generalmente, se define norma en V^3 como cualquier aplicación: $\begin{array}{c}V^3(R)\ \to R\\ \vec{x}\to\|\vec{x}\|\end{array}$ que verifiquen las siguientes condiciones:

1) $\|\vec{x}\|\geq 0$;

2) $\|\vec{x}\|=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$;

3) $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$;

4) $\|\lambda\cdot\vec{x}\|=|\lambda|.\|\vec{x}\|$

En particular, la aplicación: $\begin{array}{c} V^3 \to R \\ \vec{x} \to |\vec{x}| \end{array}$, que asocia a cada vector su módulo, es una norma sobre V^3.

7) Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| < \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in V^3$.

Demostración:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \left|\|\vec{x}\|.|\vec{y}|.\cos\alpha\right| = \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|.\underbrace{|\cos\alpha|}_{\leq 1} \leq \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|$$

8) Desigualdad de Minkowski: $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in V^3$

***Demostración*:**

Aplicando la desigualdad anterior $\vec{x}\cdot\vec{y} \leq |\vec{x}\cdot\vec{y}| < \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|$

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|^2 + 2.\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2.|\vec{x}|\cdot|\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

y de aquí: $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in V^3$

Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de V^3. Sean $\vec{x},\vec{y} \in V^3$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ e $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$. Entonces: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 & \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 & \vec{u}_1\cdot\vec{u}_3 \\ \vec{u}_2\cdot\vec{u}_1 & \vec{u}_2\cdot\vec{u}_2 & \vec{u}_2\cdot\vec{u}_3 \\ \vec{u}_3\cdot\vec{u}_1 & \vec{u}_3\cdot\vec{u}_2 & \vec{u}_3\cdot\vec{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Definición: Un espacio vectorial V^3 en el que se ha definido el producto escalar se dice que es un **espacio vectorial euclídeo.**

ORTOGONALIDAD

Definición: Se dice que los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

Teorema de Pitágoras

Dos vectores de un espacio vectorial euclídeo son ortogonales si, y sólo si el cuadrado de la norma de su suma es igual a la suma de los cuadrados de sus normas; es decir: $|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \Leftrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{y}$.

Demostración:

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in V^3 \; |\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

Proposición: Tres vectores ortogonales dos a dos y distintos del vector nulo forman una base del espacio vectorial V^3.

Demostración:
Supongamos que los tres vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ son ortogonales dos a dos no nulos y además linealmente dependientes, entonces $\lambda_1\vec{x}+\lambda_2\vec{y}+\lambda_3\vec{z}=\vec{0},\ \exists\lambda_i\neq 0$. Si multiplicamos escalarmente los dos miembros por $\vec{x}$, obtenemos $\lambda_1(\vec{x}\cdot\vec{x})+\lambda_2(\vec{x}\cdot\vec{y})+\lambda_3(\vec{x}\cdot\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{0}=0$ y como $(\vec{x}\cdot\vec{y})=0$, $(\vec{x}\cdot\vec{z})=0$, resulta $\lambda_1(\vec{x}\cdot\vec{x})=0$ y como $\vec{x}\neq\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=0$. Análogamente se obtiene $\lambda_2=0,\lambda_3=0$ y los tres vectores son linealmente independientes y constituyen una base de V^3.

Definición: Decimos que la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\|=1,\ i=1,2,3$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\ \text{y que: }\begin{cases}|\vec{u}_i|=1\Rightarrow\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i=1\\ \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j=0\ \text{ si } i\neq j\end{cases}$$

Con la misma notación anterior, si la base B es ortonormal la expresión analítica del producto escalar de $\vec{x}$ por $\vec{y}$ es: $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

Por tanto, el módulo de un vector es $|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ cuando la base es ortonormal.

Definición: Sea V un espacio vectorial euclídeo y F y G dos subconjuntos de V, se dice que F y G son **ortogonales** (escribimos F⊥G) si y solo si todo vector de F es ortogonal a cualquier vector de G.

Teorema: F y G son ortogonales si y solo si los subespacios vectoriales que generan lo son. En particular en V^3 se verifica:
1) Dos rectas vectoriales son ortogonales si y solo si lo son sus vectores directores.
2) Una recta vectorial es ortogonal a un plano vectorial si y solo si el vector director de la recta es ortogonal a una base del plano.
Demostración:

Sean $F=\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\}$ y $G=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q\}$ dos subconjuntos de vectores de un espacio vectorial V. Se cumple que $F\perp G\Leftrightarrow\ <F>\perp<G>$. Veamos la demostración:

Por ser $<F>,\ <G>$ subespacios ortogonales todos su vectores son ortogonales entre sí. $F\perp G$.

Recíprocamente, todo vector del subespacio $<F>$ es de la forma $\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_p\vec{u}_p$ y $\mu_1\vec{v}_1+\ldots+\mu_q\vec{v}_q$ es un vector del subespacio $<F>,\ <G>$. Efectuando el producto:

$(\lambda_1\vec{u}_1+\ldots+\lambda_p\vec{u}_p)(\mu_1\vec{v}_1+\ldots+\mu_q\vec{v}_q)=\lambda_1\vec{u}_1\mu_1\vec{v}_1+\ldots+\lambda_p\vec{u}_p\mu_q\vec{v}_q=\lambda_1\mu_1(\vec{u}_1\vec{v}_1)+\ldots+\lambda_p\mu_q(\vec{u}_p\vec{v}_q)=0$, y por tanto $F\perp G \Leftrightarrow <F>\perp<G>$

Proposición: La intersección de dos subespacios ortogonales es $\{\vec{0}\}$.

Demostración:

Si $\vec{u}\in F\cap G$ con $F\perp G \Leftrightarrow <F>\perp<G>$, resulta que $\vec{u}\in F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}\in F\\ \vec{u}\in G\end{cases} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2=0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$

Consecuencia: En V^3 dos planos nunca son subespacios ortogonales.

Definición: Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

Demostración:

$F^{\perp}=\{\vec{v}\in V / \vec{v}\cdot\vec{u}=0, \forall\vec{u}\in F\}$ es un subespacio vectorial de V, ya que cumple la caracterización de los subespacios vectoriales, es decir, $\forall\lambda,\mu\in R \;\; \forall\vec{v},\vec{w}\in F^{\perp} \Rightarrow \lambda\vec{v}+\mu\vec{w}\in F^{\perp}$.

Puesto que: $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})=\lambda\left(\overset{\in F}{\vec{u}}\cdot\overset{\in F^{\perp}}{\vec{v}}\right)+\mu\left(\overset{\in F}{\vec{u}}\cdot\overset{\in F^{\perp}}{\vec{w}}\right)=\lambda.0+\mu.0=0$

Teorema: Si F es un subespacio vectorial de V, se verifica:

1) $(F^{\perp})^{\perp}=F$ (Si F no es un subespacio vectorial de $(F^{\perp})^{\perp}\supset F$)

2) $F\oplus F^{\perp}=V$

3) $\dim F^{\perp}=\dim V-\dim F$

Demostración:

Como $F^{\perp}=\{\vec{v}\in V / \vec{v}\cdot\vec{u}=0, \forall\vec{u}\in F\}$ resulta $(F^{\perp})^{\perp}=\{\vec{u}\in V / \vec{v}\cdot\vec{u}=0, \forall\vec{v}\in F^{\perp}\}$ y cualquier vector de F lo es de $F^{\perp}$.

Veamos que $F+F^{\perp}=V$:

Sea una base ortonormal $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_r\}$ del subespacio vectorial F, se puede prolongar hasta conseguir una base ortonormal $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_r,\vec{e}_{r+1},...,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V; siendo $\{\vec{e}_{r+1},...,\vec{e}_n\}$ un sistema libre por ser vectores de una base y además sistema generador del subespacio vectorial $F^{\perp}$.En efecto.

$\forall\vec{v}\in F^{\perp}\ \exists x_1,...,x_n\in R / \vec{v}=x_1\vec{e}_1+...+x_r\vec{e}_r+x_{r+1}\vec{e}_{r+1}+...+x_n\vec{e}_n$ con $\vec{v}\cdot\vec{u}=0\ \forall\vec{u}\in F$, en particular con $\vec{e}_1\in F$, se cumple que:

$$0=\vec{v}\cdot\vec{e}_1=\left(x_1\vec{e}_1+...+x_r\vec{e}_r+x_{r+1}\vec{e}_{r+1}+...+x_n\vec{e}_n\right)\cdot\vec{e}_1=x_1\vec{e}_1\vec{e}_1+...+x_r\vec{e}_r\vec{e}_1+x_{r+1}\vec{e}_{r+1}\vec{e}_1+...+x_n\vec{e}_n\vec{e}_1=x_1.$$

Análogamente multiplicando escalarmente por $\vec{e}_2,...,\vec{e}_r$ resulta $x_2=...=x_n=0\Rightarrow$ $\vec{v}=x_{r+1}\vec{e}_{r+1}+...+x_n\vec{e}_n$ que prueba que $\{\vec{e}_{r+1},...,\vec{e}_n\}$ es un sistema generador de $F^{\perp}$ y por lo tanto base, siendo la $\dim F^{\perp}$=n-r=dimV-dimF y además como $F\cap F^{\perp}=\{\vec{0}\}$ la suma $F+F^{\perp}=V$ es suma directa y se tiene que $F\oplus F^{\perp}=V$.

Consecuencias:

1) El ortogonal de toda recta (subespacio vectorial de dimensión 1) es un hiperplano (subespacio de dimensión n-1). Por tanto, en V^3, el ortogonal de una recta es un plano y viceversa.

2) Todo vector $\vec{u}\in V$ se puede descomponer de manera única en la forma, $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$ donde $\vec{u}_1\in F,\vec{u}_2\in F^{\perp}$.

ÁNGULO DE DOS VECTORES

Por definición $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\cos(\vec{x},\vec{y})$, de aquí se obtiene: $\cos(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|}$.

Si los vectores están referidos a una base ortonormal, entonces:

$$\cos(\vec{x},\vec{y})=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Definición: Si $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3$, siendo $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de V^3, se llaman **cosenos directores de** $\vec{x}$ a los cosenos de los ángulos que forma $\vec{x}$ con los vectores de la base.

Si la base es ortonormal, los cosenos directores son:

$$\cos(\vec{x},\vec{u}_1)=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}};\ \cos(\vec{x},\vec{u}_2)=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}};\ \cos(\vec{x},\vec{u}_3)=\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

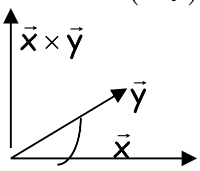
y se verifica entonces que : $\cos^2(\vec{x},\vec{u}_1)+\cos^2(\vec{x},\vec{u}_2)+\cos^2(\vec{x},\vec{u}_3)=1$.

PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Se llama **producto vectorial** en V^3 a una aplicación: $\begin{array}{l} V^3 \times V^3 \to V^3 \\ (\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow \vec{x}\times\vec{y} \end{array}$ tal que:

1) $|\vec{x}\times\vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}|\text{sen}\alpha$.

2) La dirección del vector $\vec{x}\times\vec{y}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{x}$ e $\vec{y}$.



3) El sentido del vector $\vec{x}\times\vec{y}$ viene determinado por la "ley del sacacorchos": es el sentido de avance de un sacacorchos que gire intentando llevar el vector $\vec{x}$ a la posición de vector $\vec{y}$ según el ángulo menor de 180º.

Nota: *Habitualmente tenemos dos notaciones para el producto vectorial* $\vec{x}\times\vec{y}$; o también, $\vec{x}\wedge\vec{y}$.

Expresión analítica del producto vectorial

Sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3. Sean $\vec{x},\vec{y}\in V^3$ tales que $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3$ e $\vec{y}=y_1\vec{u}_1+y_2\vec{u}_2+y_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{u}_1+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\vec{u}_2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{u}_3=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Demostración:

Buscamos un vector $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, que respecto a la base ortonormal será: $\vec{w}=w_1\vec{u}_1+w_2\vec{u}_2+w_3\vec{u}_3$ cuyas coordenadas deben verificar el siguiente sistema:

$\vec{x}\perp\vec{w} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{w}=x_1w_1+x_2w_2+x_3w_3=0$

$\vec{y}\perp\vec{w} \Leftrightarrow \vec{y}\cdot\vec{w}=y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3=0$

Y cuyo módulo satisface la ecuación $|\vec{x}\times\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2.|\vec{y}|^2.\text{sen}^2\alpha=|\vec{x}|^2.|\vec{y}|^2.(1-\cos^2\alpha)=|\vec{x}|^2.|\vec{y}|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2$

resolviendo el sistema se obtiene: $\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{u}_1+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\vec{u}_2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{u}_3=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

Propiedades del producto vectorial

1) Si $\vec{x}=\vec{0}$ o $\vec{y}=\vec{0}$ o $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son paralelos (linealmente dependientes), entonces $\vec{x}\times\vec{y}=\vec{0}$.

Demostración:

Si son paralelos forman un ángulo de 0º: $|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\text{sen}\,\alpha=|\vec{x}|.|\vec{y}|.\text{sen}0º=0 \Rightarrow \vec{x}\times\vec{y}=\vec{0}$

2) Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son perpendiculares, entonces $|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{x}|.|\vec{y}|$

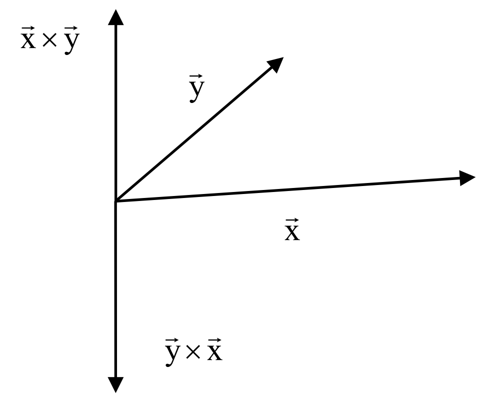
Demostración:

Si son perpendiculares forman un ángulo de 90º: $\left|\vec{x}\times\vec{y}\right| = \left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|.\operatorname{sen}\alpha = \left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|.\operatorname{sen}90º = \left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|$

3) $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}\ ,\ \forall\vec{x},\vec{y}\in V^3$

Demostración:

Aunque sus módulos son iguales, sus sentidos son opuestos.



4) Distributiva respecto de la suma:

$\vec{x}\times\left(\vec{y}+\vec{z}\right) = \vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}\ ;\ \left(\vec{y}+\vec{z}\right)\times\vec{x} = \vec{y}\times\vec{x}+\vec{z}\times\vec{x}\quad \forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3$.

Demostración:

Es consecuencia de las propiedades de los determinantes, puesto que, si escribimos las coordenadas respecto de una base ortonormal o métrica, se verifica:

$$\vec{x}\times\left(\vec{y}+\vec{z}\right) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$$

5) Pseudoasociativa: $\lambda\left(\vec{x}\times\vec{y}\right) = \left(\lambda\vec{x}\right)\times\vec{y} = \vec{x}\times\left(\lambda\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\times\vec{y}\right)\lambda\ \forall\vec{x},\vec{y}\in V^3, \forall\lambda\in R$.

Demostración:

$$\lambda\left(\vec{x}\times\vec{y}\right) = \lambda\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(\lambda\vec{x}\right)\times\vec{y}$$

6) $\vec{x}\times\left(\vec{y}\times\vec{z}\right) \neq \left(\vec{x}\times\vec{y}\right)\times\vec{z}$. No es asociativo.

Demostración:

Veamos un contraejemplo: Si $\vec{x}=\vec{y}\neq\vec{z}$ tenemos que el vector $\vec{x}\times\left(\vec{y}\times\vec{z}\right)$ es distinto al vector cero y perpendicular al $\vec{x}$ y en cambio $\left(\vec{x}\times\vec{y}\right)\times\vec{z} = \vec{0}\times\vec{z} = \vec{0}$

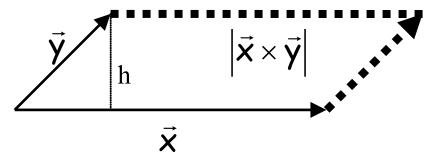
7) $\left|\vec{x}\times\vec{y}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2.\left|\vec{y}\right|^2 - \left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)^2$

Demostración:

$$\left|\vec{x}\times\vec{y}\right|^2 = \left|\vec{x}\right|^2.\left|\vec{y}\right|^2.\operatorname{sen}^2\alpha = \left|\vec{x}\right|^2.\left|\vec{y}\right|^2.\left(1-\cos^2\alpha\right) = \left|\vec{x}\right|^2.\left|\vec{y}\right|^2 - \left(\left|\vec{x}\right|^2.\left|\vec{y}\right|^2.\cos^2\alpha\right) = \left|\vec{x}\right|^2.\left|\vec{y}\right|^2 - \left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)^2$$

Interpretación geométrica del producto vectorial

Se verifica lo siguiente: el módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es igual al área del paralelogramo construido con un representante de $\vec{x}$ y uno de $\vec{y}$ por un punto.



$$|\vec{x}\times\vec{y}| = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\operatorname{sen}\alpha = |\vec{x}|.h = \text{área}$$

PRODUCTO MIXTO

Definición: Se llama **producto mixto** en V^3 a una aplicación:

$$V^3 \times V^3 \times V^3 \to R$$
$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \longrightarrow [\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})$$

Expresión analítica del producto mixto

Sea $B = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3. Sean $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V^3$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$; $\vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$ y $\vec{z} = z_1\vec{u}_1 + z_2\vec{u}_2 + z_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3)\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto mixto

1) $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}$, $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V^3$

Demostración:

Es consecuencia de las propiedades de los determinantes, puesto que, si escribimos las coordenadas respecto de una base ortonormal o métrica, se verifica:

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

2) $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = [\vec{y},\vec{z},\vec{x}] = [\vec{z},\vec{x},\vec{y}] = -[\vec{y},\vec{x},\vec{z}] = -[\vec{x},\vec{z},\vec{y}] = -[\vec{z},\vec{y},\vec{x}]$ $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V^3$

Demostración:

Intercambiando las filas:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

3) $\left[\vec{x}+\vec{x}',\vec{y},\vec{z}\right]=\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]+\left[\vec{x}',\vec{y},\vec{z}\right]\ \ \forall\vec{x},\vec{x}',\vec{y},\vec{z}\in V^3$

Demostración:

$$\left[\vec{x}+\vec{x}',\vec{y},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix} x_1+x'_1 & x_2+x'_2 & x_3+x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]+\left[\vec{x}',\vec{y},\vec{z}\right]$$

4) $\lambda\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\left[\lambda\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\left[\vec{x},\lambda\vec{y},\vec{z}\right]=\left[\vec{x},\vec{y},\lambda\vec{z}\right]\ \ \forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3,\forall\lambda\in R$

Demostración:

El escalar λ multiplica a una fila o una columna exclusivamente.

$$\lambda\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\lambda\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=\left[\lambda\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right].$$

5) $\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=0\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son coplanarios

Demostración:

$$\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y},\vec{z}\text{ son linealmente dependientes }\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y},\vec{z}\text{ son coplanarios}$$

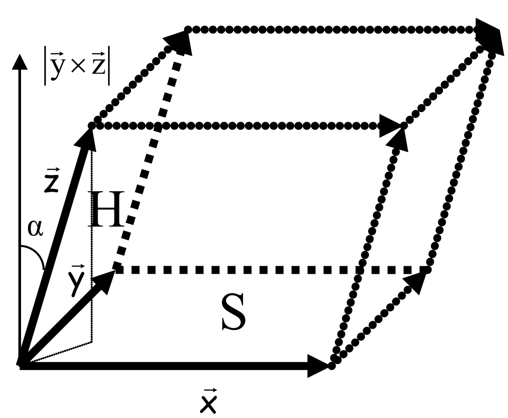
6) Dos rectas $X=P+t\,\vec{v}$ y $X=Q+t\vec{w}$ son coplanarias $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v},\vec{w}\right]=0$.

Demostración:

Por la propiedad anterior los tres vectores son coplanarios, en caso contrario las rectas se cruzan.

Interpretación geométrica del producto mixto

Se verifica lo siguiente: el valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre dichos vectores.



Demostración:

$$\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})=$$

$$=|\vec{x}|.|\vec{y}\times\vec{z}|.\cos\left(\vec{x},\vec{y}\times\vec{z}\right)=|\vec{x}|.|\vec{y}\times\vec{z}|.\cos\alpha=$$

$$=|\vec{x}|.S.\cos\alpha=|\vec{x}|.S.\operatorname{sen}\left(90^\circ-\alpha\right)=S.H=V\equiv\text{volumen del paralelepípedo.}$$

DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Se llama **doble producto vectorial** en V^3 a una aplicación:

$$V^3 \times V^3 \times V^3 \to R$$
$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \longrightarrow \vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$$

Expresión analítica del doble producto

Sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V^3. Sean $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3$ tales que $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3$; $\vec{y}=y_1\vec{u}_1+y_2\vec{u}_2+y_3\vec{u}_3$ y $\vec{z}=z_1\vec{u}_1+z_2\vec{u}_2+z_3\vec{u}_3$. Entonces:

$$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Propiedad de expulsión $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=(\vec{x}\cdot\vec{z})\cdot\vec{y}-(\vec{x}\cdot\vec{y})\cdot\vec{z}\quad\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V^3$

Demostración:

Utilizaremos la notación vectorial $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$, $\vec{z}=(z_1,z_2,z_3)$

Veamos el primer miembro de la igualdad $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=$

$$=(x_2y_1z_2-x_2y_2z_1-x_3y_3z_1+x_3y_1z_3,x_1y_2z_1-x_1y_1z_2-x_3y_3z_2+x_3y_2z_3,x_2y_3z_2-x_2y_2z_3+x_1y_3z_1-x_3y_1z_3)$$

El segundo miembro:

$$(\vec{x}\cdot\vec{z})\cdot\vec{y}-(\vec{x}\cdot\vec{y})\cdot\vec{z}=(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)(y_1,y_2,y_3)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)(z_1,z_2,z_3)=$$
$$=(x_1z_1y_1+x_2z_2y_1+x_3z_3y_1-x_1y_1z_1-x_2y_2z_1-x_3y_3z_1,$$
$$,x_1z_1y_2+x_2z_2y_2+x_3z_3y_2-x_1y_1z_2-x_2y_2z_2-x_3y_3z_2,$$
$$,x_1z_1y_3+x_2z_2y_3+x_3z_3y_3-x_1y_1z_3-x_2y_2z_3-x_3y_3z_3),$$

y ambas expresiones coinciden.

TEMA 3: EL ESPACIO EUCLÍDEO

Definición: Se llama espacio **afín euclídeo** o **espacio euclídeo** al espacio afín cuando el espacio vectorial real asociado V^3 es un espacio vectorial euclídeo. Lo representamos por $\mathbf{E^3}$.

COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES

Definición: Un sistema de referencia $\Re=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ se llama **métrico** u **ortonormal** si la base B=$\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es ortonormal.

Si $\Re=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}_1, \overrightarrow{OB}=\vec{u}_2, \overrightarrow{OC}=\vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

Definición: Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.

DISTANCIA. ESPACIO MÉTRICO

Definición: Sea A un conjunto cualquiera, no vacío. Llamamos **distancia** en A a una aplicación $\begin{array}{l} d: A\times A\to R^+\cup\{0\} \\ (x,y)\to d(x,y)\end{array}$ que verifique las condiciones siguientes:

$$1)\, d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y, \forall x,y\in A$$
$$2)\, d(x,y)=d(y,x), \forall x,y\in A$$
$$3)\, d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z\in A$$

Definición: Llamamos **espacio métrico** a un conjunto A en el que se ha definido una distancia.

DISTANCIA EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

Proposición: La aplicación $\begin{array}{l} d: E^3\times E^3\to R^+\cup\{0\} \\ (X,Y)\to d(X,Y)=\left|\overrightarrow{XY}\right|\end{array}$ es una distancia en el espacio euclídeo E^3.

Demostración:

En efecto, se cumplen las tres condiciones:

1) $d(X,Y)=\left|\overrightarrow{XY}\right|=0 \Leftrightarrow X=Y, \forall X,Y\in E^3$

2) $d(X,Y)=\left|\overrightarrow{XY}\right|=\left|\overrightarrow{YX}\right|=d(Y,X), \forall X,Y\in E^3$

3) $d(X,Z)=\left|\overrightarrow{XZ}\right|\leq\left|\overrightarrow{XY}\right|+\left|\overrightarrow{YZ}\right|=d(X,Y)+d(Y,Z), \forall X,Y,Z\in E^3$

Podemos, entonces, dar la siguiente definición.

Definición: Dados dos puntos X e Y del espacio euclídeo, llamamos **distancia** entre dichos puntos al número real: $d(X,Y)=\left|\overrightarrow{XY}\right|$; y ya el espacio euclídeo es un espacio métrico.

Cálculo de d(X,Y): Si $X=(x_1,x_2,x_3)$ e $Y=(y_1,y_2,y_3)$ respecto a cierta base ortonormal, entonces $d(X,Y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$.

Nota: A partir de aquí, y hasta el final del tema, mientras no se diga lo contrario, trabajaremos en el espacio euclídeo con la distancia anterior y supondremos que el sistema de referencia utilizado es ortonormal.

VECTOR PERPENDICULAR A UN PLANO

Proposición: Dado el plano $\pi\equiv ax_1+bx_2+cx_3+d=0$, el vector $\vec{n}=(a,b,c)$ es perpendicular a dicho plano. Se le llama **vector característico** de π.

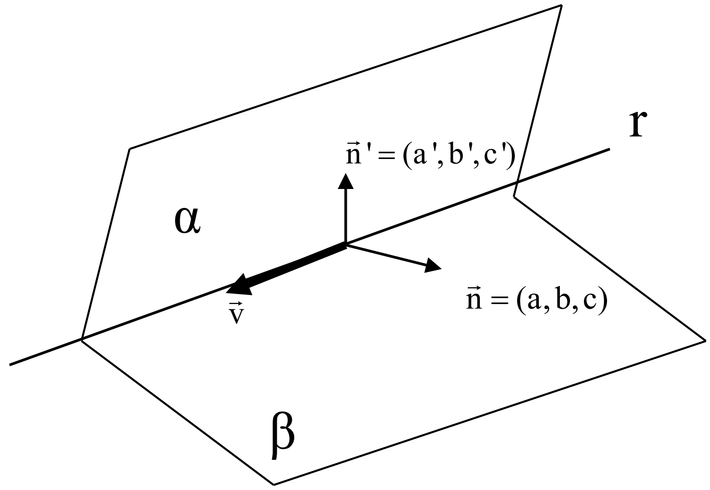
Demostración:

Si $\pi\equiv X=P+t\vec{v}+s\vec{w}$, de las ecuaciones paramétricas, eliminando los parámetros $\begin{vmatrix} x_1-p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2-p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3-p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}=0$, la ecuación general, cartesiana o implícita del plano $ax_1+bx_2+cx_3+d=0$, siendo $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=(a,b,c)$. Por tanto $\vec{n}$ es un vector perpendicular a π.

VECTOR PARALELO A UNA RECTA

Definición: Dada la recta $r \equiv X = P + t\vec{v}$, a $\vec{v}$ lo llamamos **vector director** de r ($\vec{v}$ es paralelo a r).

Nota: Si $r \equiv \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$, y llamamos $\vec{n} = (a,b,c)$ y $\vec{n}' = (a',b',c')$, podemos obtener un vector director haciendo $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}'$.



ÁNGULOS

Ángulo entre dos planos.

Definición: Se llama **ángulo entre dos planos** al menor de los ángulos diedros que dichos planos forman al cortarse.

Proposición Sean los planos $\begin{cases} \pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi' \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$. Se verifica, entonces, que:

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Ángulo entre dos rectas.

Definición: Se llama **ángulo entre dos rectas** al menor de los ángulos que forman sus paralelas por un punto cualquiera. Es el ángulo entre sus vectores directores.

Proposición Sean las rectas $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y $r' \equiv \frac{x_1 - p'_1}{v'_1} = \frac{x_2 - p'_2}{v'_2} = \frac{x_3 - p'_3}{v'_3}$. Se verifica, entonces, que:

$$\cos(r, r') = \frac{|v_1 v_1' + v_2 v_2' + v_3 v_3'|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}}$$

Ángulo entre recta y plano.

Definición: Se llama **ángulo entre una recta y un plano** al ángulo entre dicha recta y su proyección ortogonal sobre el plano.

Proposición Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Se verifica, entonces, que:

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{|v_1 a + v_2 b + v_3 c|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO ENTRE PLANOS, ENTRE RECTAS Y ENTRE PLANOS Y RECTAS.

Perpendicularidad y paralelismo entre dos planos.

Definición: Dos planos π y π', con vectores perpendiculares $\vec{n}$ y $\vec{n}'$, respectivamente, son paralelos cuando $\vec{n}$ y $\vec{n}'$, lo son. Análogamente, π y π', son perpendiculares cuando lo son $\vec{n}$ y $\vec{n}'$.

Proposición Sean los planos $\begin{cases} \pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi' \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$. Se verifica, entonces, que:

$$1)\ \pi // \pi' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$2)\ \pi \perp \pi' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

Perpendicularidad y paralelismo entre dos rectas.

Definición: Sean r y r' dos rectas con vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$, respectivamente. Decimos que r y r' son paralelas cuando lo son $\vec{v}$ y $\vec{v}'$. Análogamente r y r' son perpendiculares cuando lo son $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.

Proposición Sean las rectas $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y $r' \equiv \frac{x_1 - p'_1}{v'_1} = \frac{x_2 - p'_2}{v'_2} = \frac{x_3 - p'_3}{v'_3}$. Se verifica, entonces, que:

$$1)\ r // r' \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_1'} = \frac{v_2}{v_2'} = \frac{v_3}{v_3'}$$

$$2)\ r \perp r' \Leftrightarrow v_1 v_1' + v_2 v_2' + v_3 v_3' = 0$$

Perpendicularidad y paralelismo entre una recta y un plano.

Definición: Sea una recta r con vector director $\vec{v}$ y un plano π, con vector perpendicular $\vec{n}$. Decimos que r y π son paralelos cuando $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares. Análogamente, r y π son perpendiculares cuando $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son paralelos.

Proposición Sean la recta $r \equiv \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3}$ y el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ Se verifica, entonces, que:

$$1)\ r // \pi \Leftrightarrow v_1a + v_2b + v_3c = 0$$

$$2)\ r \perp \pi \Leftrightarrow \frac{v_1}{a} = \frac{v_2}{b} = \frac{v_3}{c}$$

DISTANCIAS

Distancia de un punto a un plano

Proposición: sea el plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ y el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. La distancia de P a π viene dada por: $d(P,\pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

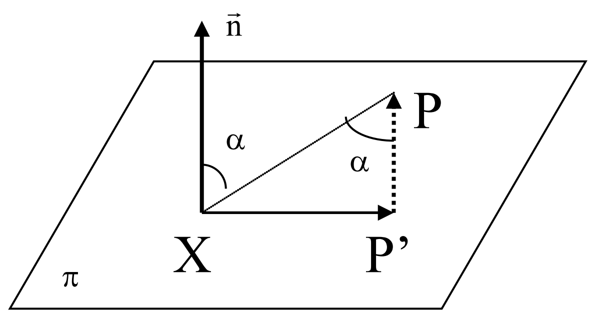
Demostración:

Se define: $d(P,\pi) = \text{Ínf}\{d(P,X) / X \in \pi\}$.

Sea $P' \in \pi$ la intersección de la perpendicular a π trazada desde P.

Entonces $d(P,\pi) = d(P,P') = d$ y de la definición de producto escalar:

$\overrightarrow{XP} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{XP}|.|\vec{n}| \cos\alpha = |\vec{n}| d \Rightarrow$



$$d = \left| \frac{\overrightarrow{XP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(p_1 - x_1, p_2 - x_2, p_3 - x_3) \cdot (a,b,c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - ax_1 - bx_2 - cx_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En particular, si el punto es el origen O(0,0,0): $d(O,\pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Distancia de un punto a una recta

Proposición: Sea la recta $r \equiv \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$ (un punto cualquiera $A(x_0, y_0, z_0)$ y el vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de la recta) y el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. La distancia de P a r viene dada por:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \left| \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} p_2 - y_0 & p_3 - z_0 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_3 - z_0 & p_1 - x_0 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 - x_0 & p_2 - y_0 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right|$$

Nota: En vez de aplicar la fórmula anterior, si se traza por P un plano π perpendicular a r, la distancia buscada es d=d(P,Q), siendo Q el punto en el que el plano π corta a r.

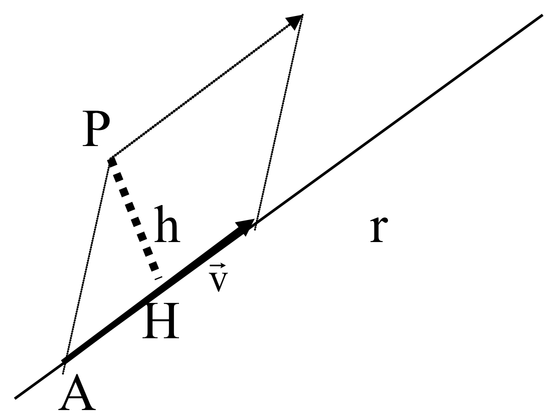
Demostración:

Se define: $d(P,r) = \text{Ínf}\left\{d(P,X) / X \in r\right\}$.

Sea $A \in r$, el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{v}$ es:

$S = \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right| = |\vec{v}|.h \Rightarrow$

$d(P,r) = d(P,H) = h = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$



Distancia entre dos planos paralelos.

Sean π y π' dos planos paralelos. Sea r una recta perpendicular a ambos. Sean $P = r \cap \pi$ y $Q = r \cap \pi'$. Entonces, la distancia entre π y π' viene dada por d=d(P,Q).

Distancia entre dos rectas.

- Si las **rectas son paralelas**, r//r', se construye un plano π perpendicular a ambas. Sean $P = r \cap \pi$ y $Q = r' \cap \pi$. Entonces d(r,r')=d(P,Q).

- Si las **rectas se cruzan**:

Dos procedimientos a seguir:

1. $d(r,r') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}'\right]\right|}{|\vec{v} \times \vec{v}'|}$, siendo $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ los vectores directores de r y r', respectivamente, P y Q sendos puntos de r y r'.

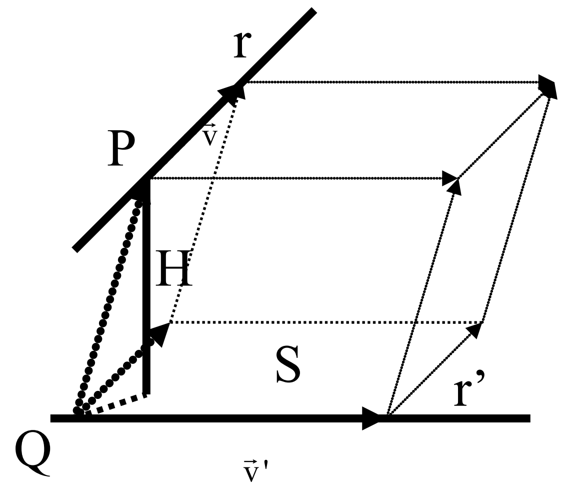
Demostración:

Se define: $d(r,r') = \text{Ínf}\{d(X,Y)/X \in r, Y \in r'\}$.

Sean $P \in r, Q \in r'$, el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}, \vec{v}$ y $\vec{v}'$ es:

$$V = S.H = \left\| \vec{v} \times \vec{v}' \right| \cdot H \right| = \left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}' \right] \right| \Rightarrow$$

$$H = d(r,r') = \frac{\left| \left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{v}' \right] \right|}{\left| \vec{v} \times \vec{v}' \right|}$$



2. Sea s la recta perpendicular común a r y a r'. Sean $P = r \cap s$ y $Q = r' \cap s$. Entonces d(r,r')=d(P,Q).

Cálculo de la recta s perpendicular común a r y a r':

$s = \pi \cap \pi'$; siendo $\pi \equiv$ plano que contiene a la recta r y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ y $\pi' \equiv$ plano que contiene a la recta r' y su vector característico es perpendicular a los vectores $\vec{v}'$ y $\vec{v} \wedge \vec{v}'$.

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO.

Definición: Se dice que la **ecuación** de un **plano** es **normal** cuando el vector perpendicular al plano es unitario. La ecuación normal del plano $\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ es la siguiente:

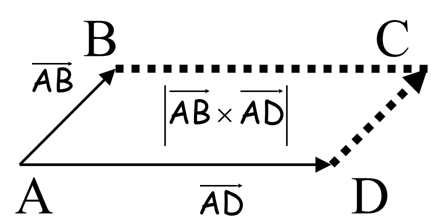
$$\pi \equiv \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} z + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0,$$

es decir, $\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z + d(O,\pi) = 0$, siendo $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$ los cosenos directores del vector perpendicular al plano π.

ÁREAS

Área del paralelogramo.

El área del paralelogramo cuyos vértices son $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ y $D = (d_1, d_2, d_3)$, puede calcularse mediante la fórmula:

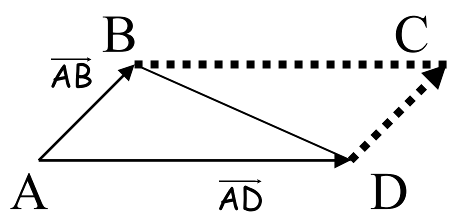


$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3-a_3 & b_1-a_1 \\ d_3-a_3 & d_1-a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 \end{vmatrix}^2}$$

Área del triángulo

El **área del triángulo** ABD es ½ del área del paralelogramo ABCD, luego: área del triángulo

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|.$$



Área de un polígono plano

Se descompone el polígono en triángulos que sólo tengan en común un lado o un vértice y se obtiene el área de cada uno de ellos, el área del polígono ser la suma de dichas áreas

VOLÚMENES

Volumen de un paralelepípedo

El volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ como aristas, siendo $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, y $E = (e_1, e_2, e_3)$ puede calcularse mediante la fórmula:

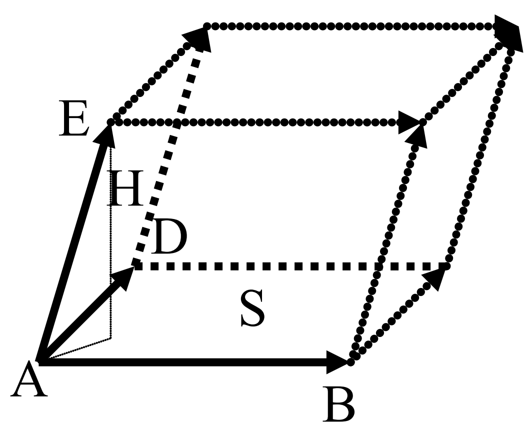
$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

Demostración:

Se consideran las tres aristas concurrentes,

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right]\right| = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}\right)\right| =$$

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \\ e_1-a_1 & e_2-a_2 & b_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$



Volumen del tetraedro

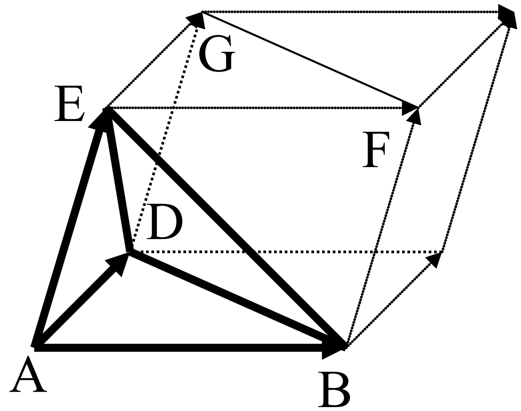
Con la misma notación del apartado anterior, el volumen del tetraedro ABDE viene dado por:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3\\ 1 & b_1 & b_2 & b_3\\ 1 & d_1 & d_2 & d_3\\ 1 & e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}$$

Demostración:

El volumen del paralelepípedo es igual a dos veces el volumen del prisma triangular ABDEFG y este a su vez tres veces el volumen del tetraedro ABDE, luego:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3\\ 1 & b_1 & b_2 & b_3\\ 1 & d_1 & d_2 & d_3\\ 1 & e_1 & e_2 & e_3\end{vmatrix}$$



Nota: *El determinante puede ser un número positivo o negativo, por lo que el volumen será el valor absoluto de dicho número.*

Volumen de una pirámide

El volumen de una pirámide se obtiene calculando el área de la base, S, y la distancia del vértice a la base, h, con la siguiente fórmula V=(1/3) S.h.

Volumen de un poliedro convexo

Se toma un punto interior de la figura y se consideran tantas pirámides como caras tiene el poliedro.