



# Límites y Continuidad de funciones de varias variables



1.- Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen  $V$  de ese depósito en función del radio  $r$  del cilindro y de su altura  $h$ .

**Solución**

2.- Determinar si las siguientes funciones son **acotadas**:

a)  $z = \sin^2(x + y)\cos(x - e^y)$       b)  $z = \frac{x + y}{e^{x+y}}$       c)  $z = x^2 \sin \frac{1}{x^2} + y^2 \sin \frac{1}{y^2}$

**Solución**

3.- Hallar el **dominio** y la **imagen** o recorrido de las funciones:

a)  $f(x, y) = \ln(xy - 6)$       b)  $g(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 y^2 - 9}}{x}$   
 c)  $h(x, y) = \arccos \frac{y}{x}$       d)  $p(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

**Solución**

4.- Hallar las **curvas de nivel** de las funciones:

a)  $z = xy$       b)  $z = \sin(xy)$       c)  $z = x^2 + y^2$

**Solución**

5.- La temperatura  $T$  (en grados Celsius) en cualquier punto  $(x, y)$  de una placa circular de 10m de radio es:

$$T = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$$

Donde  $x$  e  $y$  se miden en metros. Calcular y dibujar algunas curvas **isotermas**:

**Solución**

6.- Calcular los siguientes **límites**:

a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2 y}{x^2 + y^2}$       b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$       c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y^4}{x^3 - y^4}$   
 d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - x + y}{x + y}$       e.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$       f.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\sin x \ln(1 + y)}$

**Solución**

7.- Estudiar la **continuidad** de las funciones:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Solución**

8.- Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a. Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

b. Estudiar la **continuidad** de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , según los valores de  $k$ .



### Solución

9.- Estudiar la **continuidad** en  $(0, 0)$  de las siguientes funciones:

a.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b.  $h(x, y) = \begin{cases} g(x, y) \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , siendo  $g(x, y)$  una función **continua** en  $(0, 0)$

tal que  $g(0, 0) = 0$ . Nota: Utilizar que  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

c.  $j(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

### Solución

10.- Dada la función  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^2 x \text{sen} y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Se pide:

a) Hallar, si existe,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ .

b) Estudiar la **continuidad** de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , según los valores de  $k$ .

### Solución

11.- Dada la función  $z = \frac{y^2 \left( 1 + 2y \text{sen} \frac{1}{x} \right) + x^2}{x^2 + y^2}$ . Se pide:

a) **Dominio** de la función.

b) **Límites** reiterados en el punto  $(0, 0)$ .

c) A la vista del resultado anterior ¿existe el **límite** de  $f$  en  $(0, 0)$ ? En caso afirmativo calcularlo.

d) ¿Es **continua** la función en  $(0, 0)$ ?

e) Definir  $f(0, 0)$  para que  $f$  sea **continua** en dicho punto.

### Solución

12.- Para las siguientes funciones, probar que el valor de  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  depende del camino elegido para acercarse a  $(0, 0)$ :

a)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{x^2 y^4 + (x - y^2)^2}$       b)  $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

### Solución

13.- Consideremos  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{xy}$ . Se pide:

a) Determinar, si es posible, el **límite** a lo largo de cualquier recta  $y = mx$ .

b) Determinar, si es posible, el **límite** a lo largo de la parábola  $y = x^2$ .

c) ¿Existe el **límite**? Justifica la respuesta.



**Solución**

14.- Demostrar aplicando la definición de **límite** que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$ .

**Solución**

15.- Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{se pide:}$$

- a) **Límites** radiales en **(0, 0)**
- b) **Límites** reiterados en **(0, 0)**
- c) ¿Existe **límite** en **(0, 0)**?
- d) ¿Existe algún valor de **k** para el cual la función sea **continua** en todo  $\mathbb{R}^2$ ?

**Solución**

16.- ¿Existe el  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{x^4 y^2 + (y - x^2)^2}$ ? Caso afirmativo, calcularlo.

**Solución**

17.- Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  . Se pide:

- a) **Dominio** de **f**.
- b) Estudiar la **continuidad** de **f**.

**Solución**

18.- Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + 4y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  . Se pide:

- a) **Dominio** de **f**.
- b) Estudiar la **continuidad** de **f**.

**Solución**

19.- Sea  $f(x, y) = \begin{cases} 2 + \frac{x^2 y (y^2 + x^2)}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  .

- a) Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .
- b) ¿Es **f continua** en **(0, 0)** para algún valor de **k**?

**Solución**

20.- Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x (y^2 + x^2)}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  .

- a) Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .



b) ¿Es  $f$  **continua** en  $(0, 0)$  para algún valor de  $k$ ?

**Solución**

21.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{2x^2 + 3y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  con  $p > 0$  y  $q > 0$ .

Obtener  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  según los valores de  $p$  y  $q$

**Solución**

22.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  Estudiar la

**continuidad** de  $f$ .

**Solución**

23.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  Estudiar la

**continuidad** de  $f$ .

**Solución**

24.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^k}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  Estudiar la

**continuidad** de  $f$  según los valores de  $k > 0$ .

**Solución**

25.- Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  . Estudiar la

**continuidad** de  $f$  en los siguientes casos:

a)  $D = \mathbb{R}^2$

b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2, x \geq y^2\}$

**Solución**



26.- Sea la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} |y| \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

- Dibujar el conjunto de puntos  $(x, y)$  donde la función está definida.
- Estudiar la **continuidad** de la función en  $(0, 0)$ .

**Solución**

27.- Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2 - y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  . Estudiar el

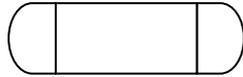
**dominio** y la **continuidad** de  $f$  en el punto  $(0, 0)$ .

**Solución**



1.- Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen  $V$  de ese depósito en función del radio  $r$  del cilindro y de su altura  $h$ .

*Solución:*



El volumen  $V$  del depósito depende de los valores que tengan  $r$  y  $h$ , y es único para cada par  $(r,h)$  por lo que es una función de  $r$  y  $h$ .

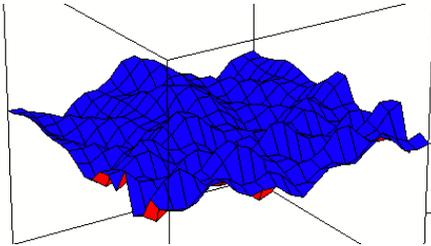
$$V(r,h) = \pi r^2 h + \frac{4}{3} \pi r^3$$

2.- Determinar si las siguientes funciones son acotadas:

a)  $z = \sin^2(x + y)\cos(x - e^y)$       b)  $z = \frac{x + y}{e^{x+y}}$       c)  $z = x^2 \sin \frac{1}{x^2} + y^2 \sin \frac{1}{y^2}$

**Solución:**

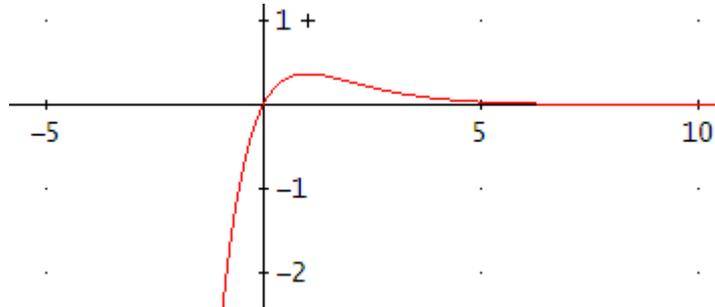
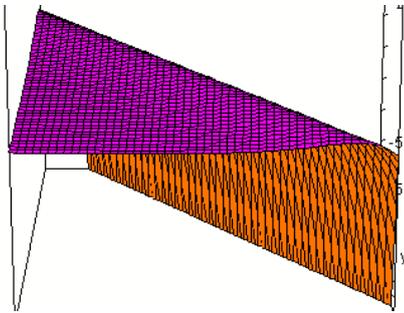
a.  $z = \sin^2(x + y)\cos(x - e^y)$ ,  $-1 \leq \sin^2(x + y)\cos(x - e^y) \leq 1$ , luego, **es acotada**:



b.  $z = \frac{x + y}{e^{x+y}}$

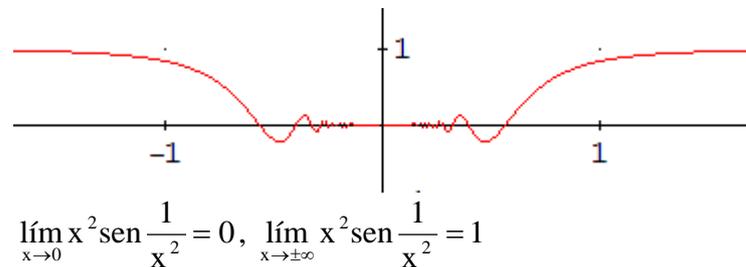
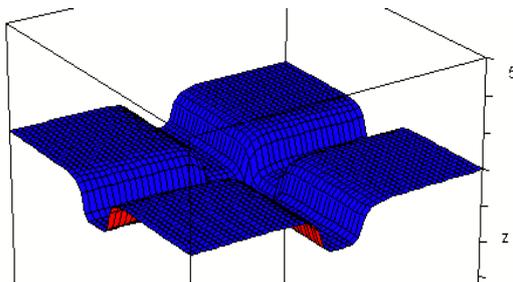
**No es acotada** pues, por ejemplo, a lo largo del eje OX ( $y = 0$ ):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$



c.  $z = x^2 \sin \frac{1}{x^2} + y^2 \sin \frac{1}{y^2}$

Es acotada, por serlo los dos sumandos:

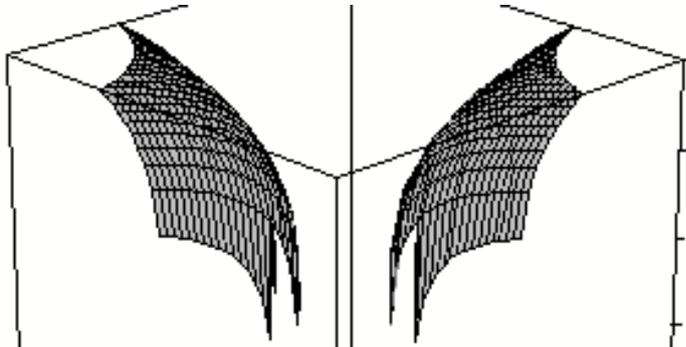


3.- Hallar el dominio y la imagen o recorrido de las funciones: a)  $f(x, y) = \ln(xy - 6)$  b)

$g(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 y^2 - 9}}{x}$  .c)  $h(x,y) = \arccos \frac{y}{x}$  d)  $p(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  e)  $j(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$  .

**Solución:**

a)  $f(x, y) = \ln(xy - 6)$

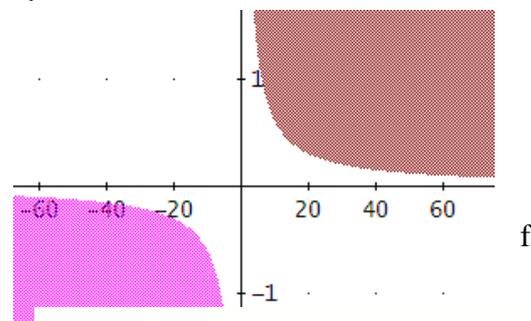


Dominio:  $xy-6 > 0 \Leftrightarrow$

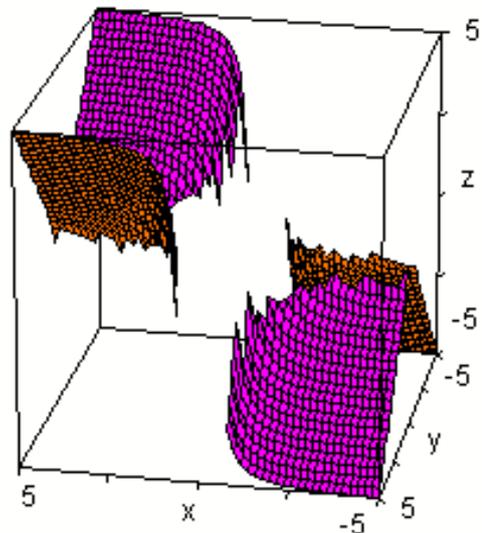
$$\begin{cases} y < \frac{6}{x} & \text{si } x < 0 \\ y > \frac{6}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Imagen:  $\mathbf{R}$

(al acercarse el punto  $(x, y)$  a la hipérbola  $xy=6$ , tiende a  $-\infty$ ; cuando  $x$  e  $y$  crecen,  $f$  tiende a  $\infty$ )



b)  $g(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 y^2 - 9}}{x}$  .

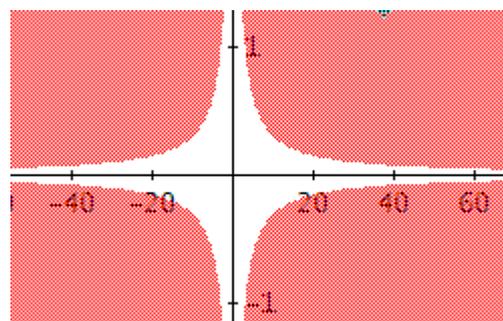


Dominio:  $x^2 y^2 - 9 \geq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Si } x > 0, & y \leq -\frac{3}{x} \vee y \geq \frac{3}{x} \\ \text{Si } x < 0, & y \leq \frac{3}{x} \vee y \geq -\frac{3}{x} \end{cases}$$

Recorrido:  $\mathbf{R}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ y = mx}} g(x,y) = \pm\infty$$

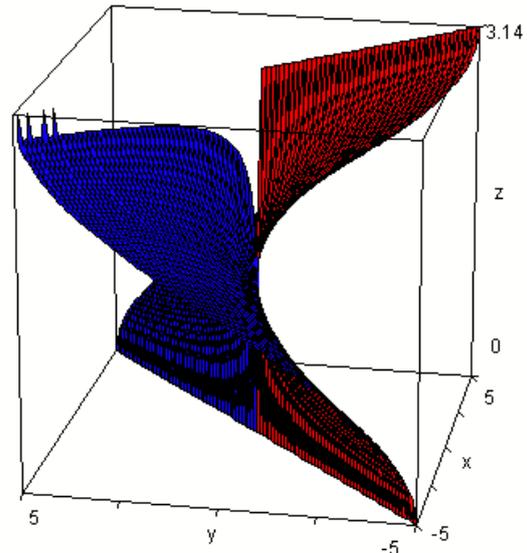
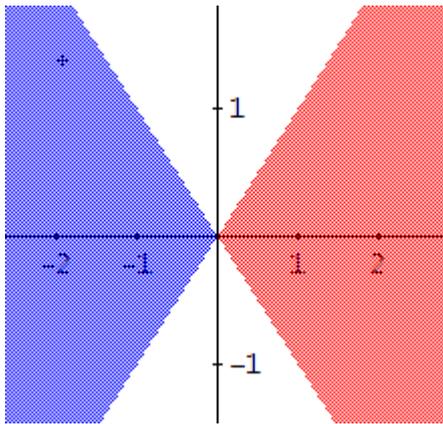


c)  $h(x,y) = \arccos \frac{y}{x}$

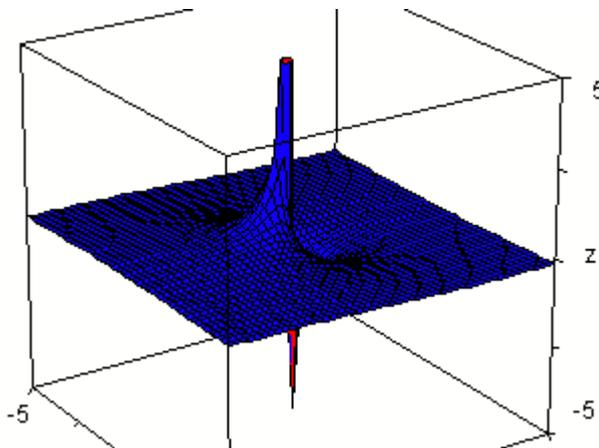
Dominio:  $x \neq 0 \wedge -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Si } x > 0, & -x \leq y \leq x \\ \text{Si } x < 0, & -x \geq y \geq x \end{cases}$$

Recorrido:  $[0, \pi]$



d)  $p(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$



Dominio:  $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$

Recorrido:  $\mathbb{R}$

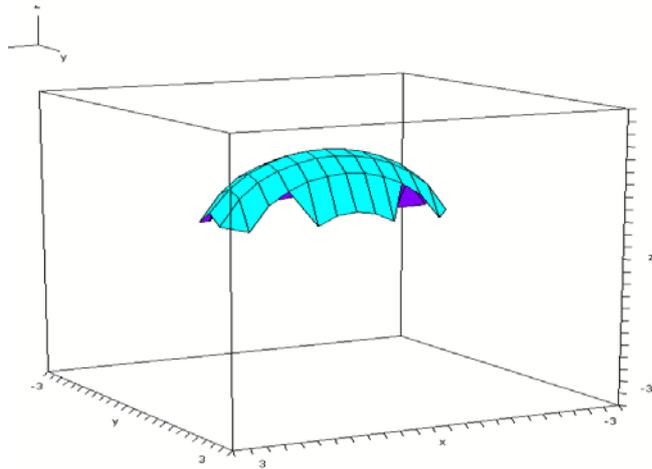
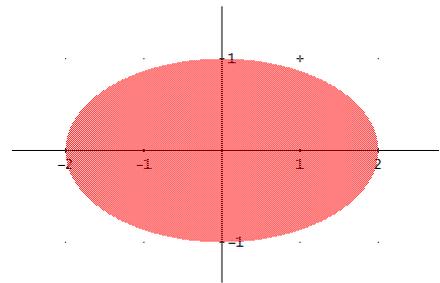
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y=x}} p(x,y) = \pm\infty$$

$$e) j(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} .$$

$$\text{Dominio: } 4 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow 4 \geq x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

que es una elipse con los puntos de su interior



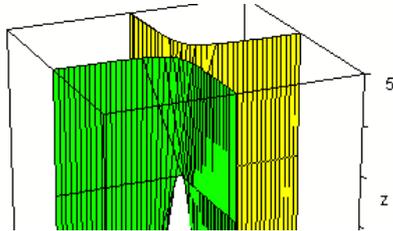
Recorrido:  $[0,2]$

## 4.- Hallar las curvas de nivel de las funciones:

- a)  $z = xy$     b)  $z = \text{sen}(xy)$     c)  $z = x^2 + y^2$     d)  $z = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)}$     e)  $z = 6 - 2x - 3y$

**Solución:**

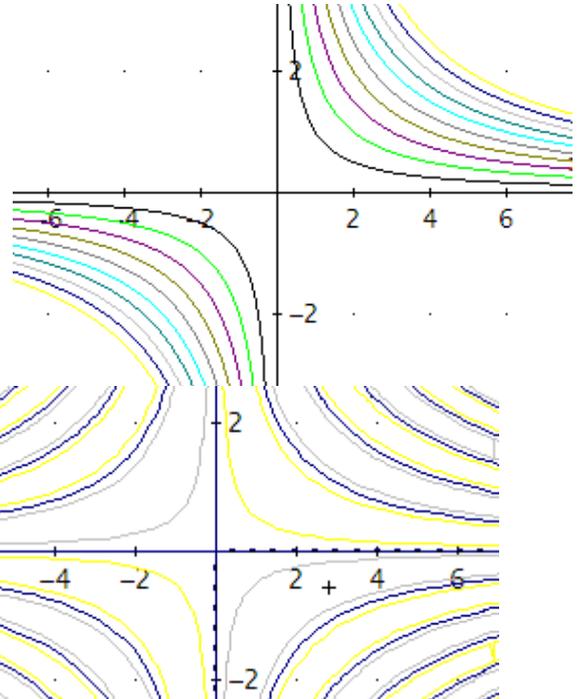
a)  $z = xy$



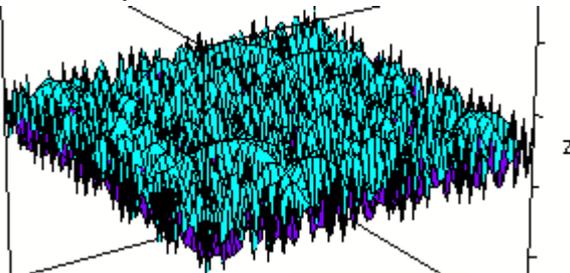
$$xy = c$$

Son hipérbolas.

En el dibujo: vector  $(xy = c, c, 1, 10)$



b.  $z = \text{sen}(xy)$

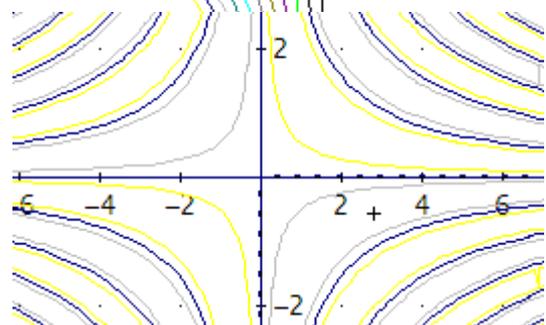


$$\text{sen}(xy) = c \in [-1, 1] \Rightarrow xy = d + 2k\pi$$

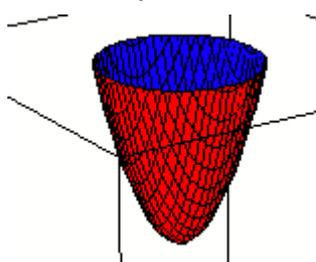
$$d = \text{arc sen } c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Son hipérbolas.

En el dibujo: vector  $(\text{sen}(xy) = c, c, -1, 1, 0.5)$ .



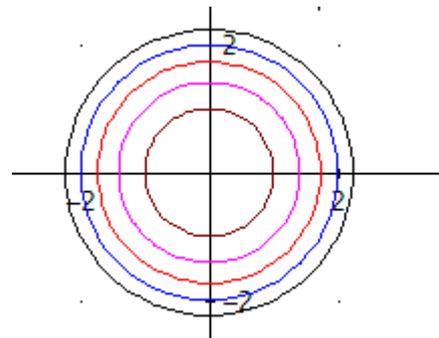
c.  $z = x^2 + y^2$



$$x^2 + y^2 = c$$

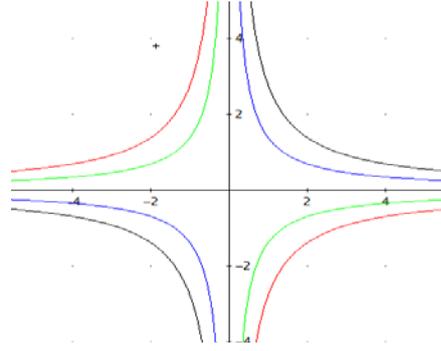
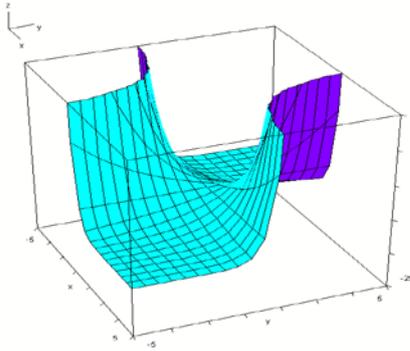
Son circunferencias centradas en el origen.

En el dibujo: vector  $(x^2 + y^2 = c, c, 1, 5)$ .



d)  $z = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)}$

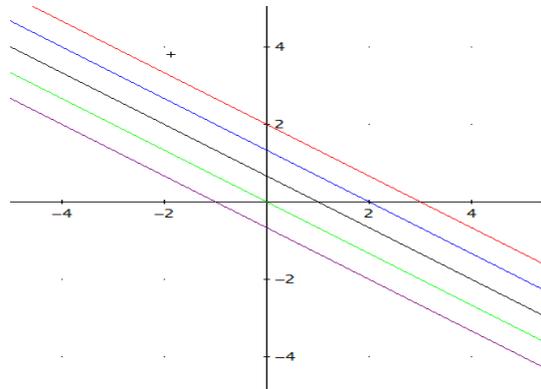
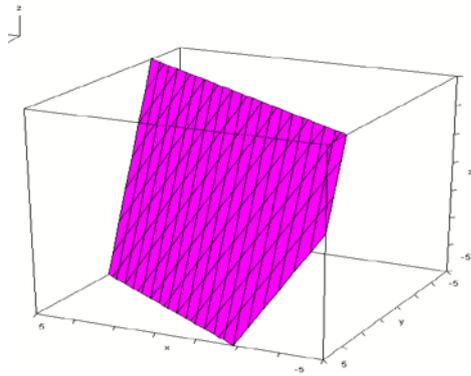
Las curvas de nivel de esta función son de la forma  $c = e^{\left(\frac{xy}{2}\right)} \Leftrightarrow 2 \ln c = xy$  que corresponden a hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.



e)  $z = 6 - 2x - 3y$

Esta función es un plano inclinado y sus curvas de nivel son las rectas

$c = 6 - 2x - 3y$ , donde  $c = 0, 2, 4, 6, 8$



5.- La temperatura  $T$  (en grados Celsius) en cualquier punto  $(x,y)$  de una placa circular de 10m de radio es:

$$T = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$$

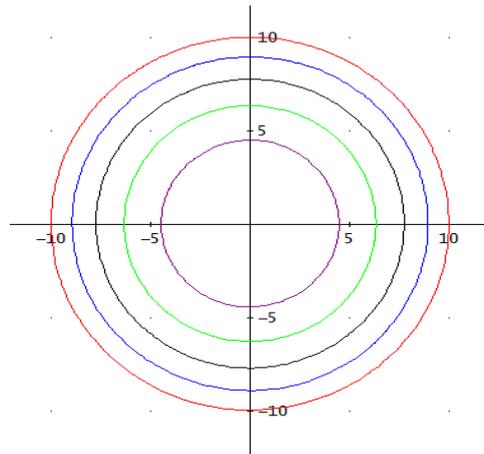
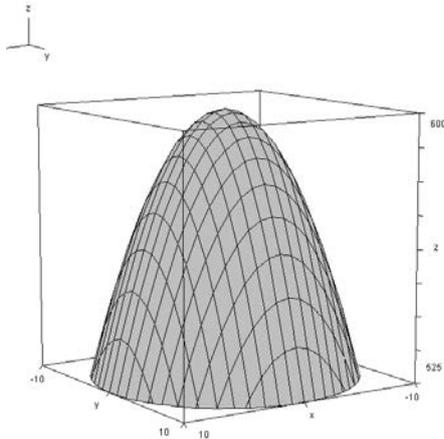
Donde  $x$  e  $y$  se miden en metros. Calcular y dibujar algunas curvas isotermas:

**Solución:**

Observemos que las condiciones del problema nos indican que  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 10$ , con  $x^2 + y^2 \leq 10^2$ , por tanto tenemos que la función temperatura  $T(x,y)$  está acotada, por ejemplo, entre  $T(0,0) = 600$  y  $T(10,10) = 450$ .

Si queremos precisar más y obtener la temperatura mínima de la placa, hemos de tener en cuenta que  $T = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2 = 600 - 0,75(x^2 + y^2)$  y que el valor máximo que puede alcanzar  $x^2 + y^2 = 10^2$ , luego la temperatura mínima de la placa es  $T = 600 - 0,75 \cdot 100 = 525$ . Por lo tanto  $525 < c < 600$  y las curvas isotermas para  $c = 525, 540, 555, 570, 585, 600$ , son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &0,75x^2 - 0,75y^2 = 75; \quad 0,75x^2 - 0,75y^2 = 60; \quad 0,75x^2 - 0,75y^2 = 45; \\ &0,75x^2 - 0,75y^2 = 30; \quad 0,75x^2 - 0,75y^2 = 15; \quad 0,75x^2 - 0,75y^2 = 0 \end{aligned}$$



## 6.- Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} & \text{b. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} & \text{c. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y^4}{x^3 - y^4} \\ \text{d. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - x + y}{x + y} & \text{e. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 & \text{f. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\text{senx} \ln(1 + y)} \end{array}$$

**Solución:**

$$\text{a. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{10}{5} = \mathbf{2}$$

$$\text{b. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{0}{0} ? = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x-y) = \mathbf{2}$$

$$\text{c. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y^4}{x^3 - y^4}$$

a lo largo de la recta  $x = 1$ :  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{1 - y^4}{1 - y^4} = \lim_{y \rightarrow 1} 1 = 1$

a lo largo de la recta  $y = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} ? = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3}$

Luego, **no existe el límite**, pues de existir, sería único y no coinciden los límites radiales.

$$\text{d. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - x + y}{x + y} = \frac{0}{0} ?$$

Límites reiterados:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Luego, **No existe**.

De hecho los radiales tampoco coinciden (valen  $\frac{m-1}{m+1}$ ).

$$\text{e. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 = \frac{0}{0} ?$$

a lo largo de la recta  $y = x$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$

a lo largo de la recta  $y = 2x$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} \right)^2 = \frac{9}{25}$

Luego, **no existe el límite**, pues de existir, sería único.

$$\text{f. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\text{senx} \ln(1 + y)} = \frac{0}{0} ? \text{ indeterminación.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\text{senx} \ln(1 + y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 = \mathbf{1},$$

utilizando las equivalencias de infinitésimos siguientes en 0:

$$e^{xy} - 1 \approx xy, \quad \text{senx} \approx x, \quad \ln(1 + y) \approx y.$$



## 7.- Estudiar la continuidad de las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Solución:**

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Límite a lo largo de la parábola  $x=ay^2$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{ay^2 y^2}{ay^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + 1} = \frac{a}{a^2 + 1}, \text{ que depende del valor de } a.$$

Luego no existe el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  y, por tanto, **f no es continua en (0, 0)**.

Si  $(x,y) \neq (0,0)$ , f es continua en  $(x,y)$  por ser compuesta de funciones continuas.

$$b) g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Límites reiterados en (0, 0):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} g(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} g(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Límites radiales en (0, 0):

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} g(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{1 + m^4 x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Luego de existir el límite, valdría 0. Pasando a polares, se obtiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \alpha)^2 (r \sin \alpha)}{(r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^4} = 0$$

¿Depende de  $\alpha$ ?

No, ya que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + r^2 \sin^4 \alpha} = \lim_{r \rightarrow 0} g(r) \cdot h(r, \alpha)$ , siendo  $g(r) = r$  una función que tiende a

cero cuando r tiende a cero y  $h(r, \alpha) = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + r^2 \sin^4 \alpha}$  una función acotada. En efecto:



## Límites y Continuidad de funciones de varias variables



$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$  y  $|h(r, \alpha)| = |\operatorname{sen} \alpha| \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + r^2 \operatorname{sen}^4 \alpha} \leq 1 \cdot 1 = 1$ , ya que el numerador  $\cos^2 \alpha$  es menor ó igual que el denominador  $\cos^2 \alpha + r^2 \operatorname{sen}^4 \alpha$  (pues se diferencian en un sumando positivo).

Por tanto, se verifica que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0$  y, **g es continua en (0, 0)**.

8.- Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

b) Estudiar la continuidad de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , según los valores de  $k$ .

**Solución:**

$f(x, y)$  está definida en todo  $\mathbb{R}^2$  ya que  $2x^2 + 3y^2 - xy > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$ . En efecto, pasando a coordenadas polares:

$$2x^2 + 3y^2 - xy = (2r^2 \cdot \cos^2 \alpha + 3r^2 \cdot \sin^2 \alpha - r^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = r^2(2\cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = r^2[2 + \sin^2 \alpha - 1/2 \cdot \sin(2\alpha)] > r^2[2 + 0 - (1/2)] = (3/2)r^2 > 0$$

para  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

a) Es fácil probar que los límites radiales son 0.

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{r \cdot \cos \alpha \cdot r^2 \cdot \sin^2 \alpha}{r^2 \left( 2 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right)} \right| = r \frac{|\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha|}{\left| 2 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right|} < \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} r = g(r)$$

Y  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ . Luego, por el criterio de la mayorante,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

b) Si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f$  es continua en  $(x, y)$  por ser compuesta por funciones continuas independientemente del valor de  $k$ .

En  $(0, 0)$ :

Si  $k = f(0, 0) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  entonces  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

Luego:

**Si  $k = 0$ ,  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .**

**Si  $k \neq 0$ ,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .**

**9.- Estudiar la continuidad en (0, 0) de las siguientes funciones:**

$$\text{a. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b. } h(x, y) = \begin{cases} g(x, y) \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ siendo } g(x, y) \text{ una función continua}$$

en (0,0) tal que  $g(0, 0) = 0$ . Nota: Utilizar que  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

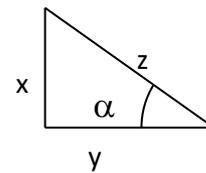
$$\text{c. } j(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

**Solución:**

a) **f no es continua en (0, 0)** ya que no existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  pues es fácil comprobar que los límites radiales dependen de m (pendiente de la recta por la que nos acerquemos al origen).

b) Como  $-\frac{1}{2} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{2}$ ,  $h(x, y)$  es el producto de una función acotada por una función que tiende a cero, luego  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0 = h(0, 0)$ , luego, **h es continua en (0, 0)**.

La acotación de arriba se obtiene haciendo:



$$x \cdot y = z \operatorname{sen} \alpha \cdot z \operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{2} z^2 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{2} z^2 \operatorname{sen}(2\alpha) \leq \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{c. } j(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Es un caso particular del apartado anterior para  $g(x, y) = x^2 - y^2$ .

Luego, **j es continua en (0, 0)**.

10.- Dada la función  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$  . Se pide:

a) Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

b) Estudiar la continuidad de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , según los valores de  $k$ .

**Solución:**

a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} ?$$

Es fácil comprobar que los límites reiterados y los radiales son nulos. Pasando a polares en este último límite, se obtiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{(r \cos \alpha)^2 (r \operatorname{sen} \alpha)}{r^2} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} [r \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha] = \lim_{r \rightarrow 0} [g(r) \cdot h(r, \alpha)]$$

siendo,  $g(r) = r$  y  $h(r, \alpha) = \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha$  que verifican que  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$  y que  $h(r, \alpha)$  es una función acotada).

Luego  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

b)

**Si  $k = 0$ ,  $f$  es continua en todo el plano** (en el origen por el apartado anterior y en cualquier otro punto por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador). **Si  $k \neq 0$ ,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$**  por el mismo motivo.

11.- Dada la función  $z = \frac{y^2 \left( 1 + 2y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) + x^2}{x^2 + y^2}$ . Se pide:

- Dominio de la función.
- Límites reiterados en el punto  $(0,0)$ .
- A la vista del resultado anterior ¿existe el límite de  $f$  en  $(0,0)$ ? En caso afirmativo calcularlo.
- ¿Es continua la función en  $(0,0)$ ?
- Definir  $f(0,0)$  para que  $f$  sea continua en dicho punto.

**Solución:**

a) Dom =  $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$ , ya que en  $x = 0$  no está definido  $\frac{1}{x}$ ; además, el denominador  $x^2 + y^2$  no se anula para ningún  $(x, y)$  salvo para  $(0, 0)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (\text{No } \exists) = \text{No existe}$ .

c) No podemos saber si existe límite o no en  $(0, 0)$ . Sólo sabemos que de existir, vale 1

$$|f(x, y) - 1| = \left| \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \left[ 1 + 2r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left( \frac{1}{r \cos \alpha} \right) \right] + r^2 \cos^2 \alpha}{(r \cos \alpha)^2 + (r \operatorname{sen} \alpha)^2} - 1 \right| =$$

$$\left| \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2r^3 \operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{sen} \left( \frac{1}{r \cos \alpha} \right) + r^2 \cos^2 \alpha - r^2}{r^2} \right| = \left| \operatorname{sen}^2 \alpha + 2r \operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{sen} \left( \frac{1}{r \cos \alpha} \right) + \cos^2 \alpha - 1 \right|$$

$$\stackrel{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}{=} \left| 2r \operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{sen} \left( \frac{1}{r \cos \alpha} \right) \right| \stackrel{|\operatorname{sen} \alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}{\leq} 2r = g(r), \text{ con } \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0.$$

Luego  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$ .

d) ¿Es continua la función en  $(0,0)$ ?

**f es discontinua en  $(0, 0)$**  pues  $(0, 0) \notin \text{Dom } f$ .

e) Definir  $f(0,0)$  para que  $f$  sea continua en dicho punto.

Tendría que ser  $f(0,0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$ .



12.- Para las siguientes funciones, probar que el valor de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  depende del camino elegido para acercarse a (0,0):

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x^2 y^4}{x^2 y^4 + (x - y^2)^2} \quad \text{b) } f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

**Solución:**

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x^2 y^4}{x^2 y^4 + (x - y^2)^2}$$

Los límites radiales son todos nulos (comprobarlo).

$$\text{Límite a lo largo de la parábola } x = y^2: \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^4}{y^4 y^4 + 0} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\text{b) } f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

Los límites radiales son todos nulos (comprobarlo).

$$\text{Límite a lo largo de la curva } x = y^3: \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

¿Existen dichos límites?

**No, ya que de existir, los límites a lo largo de todos los caminos deberían coincidir.**



13.- Consideremos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy}$ . Se pide:

- Determinar, si es posible, el límite a lo largo de cualquier recta  $y = mx$ .
- Determinar, si es posible, el límite a lo largo de la parábola  $y = x^2$ .
- ¿Existe el límite? Justifica la respuesta.

**Solución:**

a) Cuando existe, se ha de verificar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lim_{\substack{y=mx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+m^2)}{mx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+m^2}{m} = \frac{1+m^2}{m}.$$

Como vemos el valor del límite depende de la recta que tomemos para acercarnos. Así para  $m=1$ , el límite vale 2 pero para  $m=-1$ , el límite vale -2.

b) Cuando existe, se ha de verificar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lim_{\substack{y=x^2 \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{xx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = \infty$$

- c) Los resultados anteriores indican que el valor depende del camino de acercamiento al  $(0,0)$  y como el límite para existir ha de ser único, la conclusión es que **el límite no existe**.



14.- Demostrar aplicando la definición de límite que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$ .

*Solución:*

Sea  $\varepsilon > 0$ . Buscamos un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , entonces  $\left| y \cos \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ .

Si es  $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , entonces:  $\left| y \cos \frac{1}{x} - 0 \right| = |y| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |y| \cdot 1 = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ .

Basta, por tanto, tomar  $\delta = \varepsilon$  para que se cumpla la definición.

15.- Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{se pide:}$$

a) Límites radiales en  $(0, 0)$

b) Límites reiterados en  $(0, 0)$

c) ¿Existe límite en  $(0, 0)$ ?

d) ¿Existe algún valor de  $k$  para el cual la función sea continua en todo  $\mathbb{R}^2$ ?

*Solución*

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{x^3 m}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m}{\sqrt{1 + m^2}} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$

c)  $|f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) - 0| = \left| \frac{r^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r} \right| = |r \cos^2 \alpha \sin \alpha| \leq r = g(r)$ , con  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$ , luego

**el límite existe y vale 0.**

d)  $f$  es continua en  $(x, y) \neq (0, 0)$  **para cualquier valor de  $k$** , por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Para  $k = 0$ , también es continua en  $(0, 0)$  pues será:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = k = f(0, 0).$$



16.- ¿Existe el  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{x^4 y^2 + (y - x^2)^2}$ ? Caso afirmativo, calcularlo.

**Solución**

Los límites radiales son todos nulos (comprobarlo).

Límite a lo largo de la parábola  $y = x^2$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 x^4}{x^4 x^4 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Luego, **no existe el límite** estudiado ya que depende del camino.



$$17.- \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ Se pide:}$$

a) Dom f.

b) Estudiar la continuidad de f.

### Solución

a) El dominio de la función es todo  $\mathbf{R^2}$

b) En todo  $(x, y) \neq (0, 0)$  la función es cociente de funciones continuas cuyo denominador es distinto de 0. En  $(0, 0)$  hemos de estudiar si el límite es 1. Pasamos a polares

$$\frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\text{sen}((r \cos \alpha)^2 + (r \text{sen} \alpha)^2)}{(r \cos \alpha)^2 + (r \text{sen} \alpha)^2} = \frac{\text{sen}(r^2)}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1$$

Luego f también **es continua en  $(0, 0)$**

18.- Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + 4y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Se pide:

a) Dom  $f$ .

b) Estudiar la continuidad de  $f$ .

**Solución**

a) El dominio de la función es todo  $\mathbf{R^2}$

b)

Límites reiterados en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Límites radiales en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + 4m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + 4m^2} = \frac{0}{4m^2} = 0$$

Límite a lo largo de la parábola  $y = ax^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^4}{x^4 + 4a^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{1 + 4a^2} = \frac{a}{1 + 4a^2}, \text{ que depende del valor de } a.$$

Luego no existe el límite  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  y, por tanto,  **$f$  no es continua en  $(0, 0)$** .

Si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f$  es continua en  $(x, y)$  por ser compuesta de funciones continuas.

**19.-** Sea  $f(x, y) = \begin{cases} 2 + \frac{x^2 y (y^2 + x^2)}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

**a)** Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

**b)** ¿Es  $f$  continua en  $(0, 0)$  para algún valor de  $k$ ?

**Solución:**

**a)** Es fácil ver que los límites radiales todos valen 2.

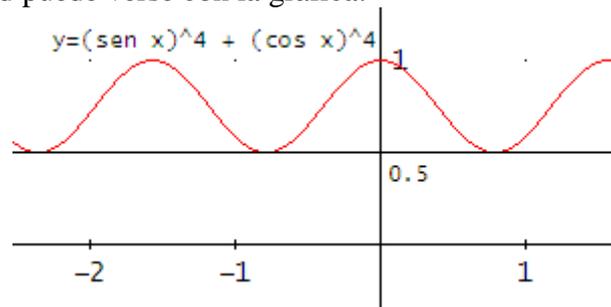
Aplicamos el criterio de la mayorante:

$$|f(r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha) - 2| = \left| 2 + \frac{(r \cos \alpha)^2 r \operatorname{sen} \alpha ((r \operatorname{sen} \alpha)^2 + (r \cos \alpha)^2)}{(r \operatorname{sen} \alpha)^4 + (r \cos \alpha)^4} - 2 \right| =$$

$$\left| \frac{r^5 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha}{r^4 (\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha)} \right| = \left| \frac{r \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha} \right| \leq \frac{r}{1/2} = 2r = g(r)$$

pues  $|\cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha| \leq 1$ , y  $|\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha| \geq \frac{1}{2}$ .

Esta última desigualdad puede verse con la gráfica:



O bien viendo hallando su valor mínimo con el método habitual (igualando a cero la derivada primera, etc.).

Como  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0} (2r) = 0$ , ya puede asegurarse que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 2$ .

**b)**  $f$  continua en  $(0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0) \Leftrightarrow \mathbf{2 = k}$

20.- Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x (y^2 + x^2)}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

a) Hallar, si existe,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

b) ¿Es  $f$  continua en  $(0, 0)$  para algún valor de  $k$ ?

**Solución:**

a) Es fácil ver que los límites radiales todos valen 0.

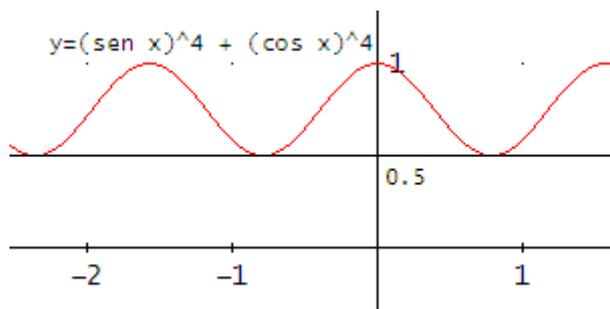
Aplicamos el criterio de la mayorante:

$$|f(r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha) - 0| = \left| \frac{(r \operatorname{sen} \alpha)^2 r \cos \alpha ((r \operatorname{sen} \alpha)^2 + (r \cos \alpha)^2)}{(r \operatorname{sen} \alpha)^4 + (r \cos \alpha)^4} \right| =$$

$$\left| \frac{r^5 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha}{r^4 (\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha)} \right| = \left| \frac{r \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha} \right| \leq \frac{r}{1/2} = 2r = g(r)$$

pues  $|\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha| \leq 1$ , y  $|\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha| \geq \frac{1}{2}$ .

Esta última desigualdad puede verse con la gráfica:



O bien viendo hallando su valor mínimo con el método habitual (igualando a cero la derivada primera, etc.).

Como  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0} (2r) = 0$ , ya puede asegurarse que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

b)  $f$  continua en  $(0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0) \Leftrightarrow \mathbf{0 = k}$



**21.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:** 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{2x^2 + 3y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{con } p > 0 \text{ y } q > 0.$$

**Obtener  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  según los valores de  $p$  y  $q$**

**Solución:**

$f(x, y)$  está definida en todo  $\mathbb{R}^2$  ya que  $2x^2 + 3y^2 - xy > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$ .

En efecto, pasando a coordenadas polares:

$$2x^2 + 3y^2 - xy = (2r^2 \cdot \cos^2 \alpha + 3r^2 \cdot \sin^2 \alpha - r^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = r^2(2\cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = r^2[2 + \sin^2 \alpha - 1/2 \cdot \sin(2\alpha)] > r^2[2 + 0 - (1/2)] = (3/2)r^2 > 0 \text{ para } (x, y) \neq (0, 0).$$

Ahora, expresando  $f(x, y)$  en coordenadas polares:

$$f(x, y) = \frac{(r \cdot \cos \alpha)^p \cdot (r \cdot \sin \alpha)^q}{r^2 \left( 2 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right)} = r^{p+q-2} \frac{\cos^p \alpha \cdot \sin^q \alpha}{2 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha)}$$

**Primer caso:**

Si  $p+q < 2$  se cumple que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  **no existe**, pues  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow r^{p+q-2} \rightarrow \infty$

**Segundo caso:**

Si  $p+q = 2$  se cumple que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  **no existe**, pues depende  $\alpha$

**Tercer caso:**

Si  $p+q > 2$

Límites reiterados en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{(r \cdot \cos \alpha)^p \cdot (r \cdot \sin \alpha)^q}{r^2 \left( 2 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right)} \right| = r^{p+q-2} \left| \frac{\cos^p \alpha \cdot \sin^q \alpha}{2 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha)} \right| < r^{p+q-2} \frac{1}{3/2} = r^{p+q-2} \frac{2}{3} = g(r)$$

Y  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$  Luego, por el criterio de la mayorante,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$



22.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$  **Estudiar la continuidad de f.**

**Solución:**

La función es cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero para  $(x,y) \neq (0,0)$

Veamos en particular para  $(x,y)=(0,0)$  el límite:

Límites reiterados en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Límites radiales en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + m^5 x^5}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + m^5 x^3}{(1 + m^4 x^2)} = \frac{0}{1} = 0$$

Límite a lo largo de la parábola  $y=ax^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + a^5 x^{10}}{x^2 + a^4 x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a^5 x^7)}{1 + a^4 x^6} = \frac{0}{1} = 0,$$

Veamos con el criterio de la mayorante:

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^4} \right| = \frac{|x^3 + y^5|}{x^2 + y^4} \leq \frac{|x^3| + |y^5|}{x^2 + y^4} = \frac{|x^3|}{x^2 + y^4} + \frac{|y^5|}{x^2 + y^4} \leq \frac{|x^3|}{x^2} + \frac{|y^5|}{y^4} = |x| + |y|$$

Que cumple  $|x| + |y| \rightarrow 0$  cuando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  resulta  $f(x,y) \rightarrow (0,0)$

**La función es continua en  $(0,0)$  y por lo tanto en todo  $\mathbb{R}^2$ .**



**23.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:**  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$  **Estudiar la continuidad de f.**

**Solución:**

La función es cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero para  $(x,y) \neq (0,0)$

Veamos en particular para  $(x,y)=(0,0)$  el límite:

Límites reiterados en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Límites radiales en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^5}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{(1 + m^4 x^2)} = \frac{0}{1} = 0$$

Límite a lo largo de la parábola  $y=ax^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^5}{x^2 + a^4 x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3}{1 + a^4 x^6} = \frac{0}{1} = 0,$$

Sin embargo,

Límite a lo largo de la parábola  $x=ay^2$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{ay^4}{a^2 y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a}{a^4 + 1} = \frac{a}{a^4 + 1},$$

El último límite depende de  $a$  luego no existe el límite cuando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

En consecuencia **f no es continua en  $(0,0)$**

24.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^k}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  **Estudiar la continuidad de  $f$  según los valores de  $k > 0$ .**

**Solución:**

La función es cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero para  $(x, y) \neq (0, 0)$

Veamos en particular para  $(x, y) = (0, 0)$  el límite:

Límites reiterados en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

**Primer caso:**

Si  $0 < k < 2$  se cumple que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  **no existe**, pues no es finito

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow 0 \\ y=x}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2k}}{2x^4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{2k-4} = \infty$$

En consecuencia  $f$  no es continua en  $(0, 0)$

**Segundo caso:**

Si  $k=2$  se cumple que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  **no existe**, pues depende de  $m$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{x^4 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2}{1 + m^4} = \frac{m^2}{1 + m^4}$$

En consecuencia,  $f$  no es continua en  $(0, 0)$

**Tercer caso:**

Si  $k > 2$

Ahora, expresando  $f(x, y)$  en coordenadas polares:

$$f(x, y) = \frac{(r \cdot \cos \alpha \cdot r \cdot \sin \alpha)^k}{r^4 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)} = r^{2(k-2)} \frac{\cos^k \alpha \cdot \sin^k \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}$$



$$|f(x, y) - 0| = r^{2(k-2)} \left| \frac{\cos^k \alpha \cdot \sin^k \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha} \right| < r^{2(k-2)} \frac{1}{1/2} = 2r^{2(k-2)} = g(r)$$

Y  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$  Luego, por el criterio de la mayorante,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

En consecuencia,  $f$  es continua en  $(0,0)$  y por lo tanto en todo  $\mathbb{R}^2$  cuando sea  $k > 2$

Nota:

La función  $G(\alpha) = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$  tiene un mínimo absoluto para  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

25.- Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  . Estudiar la

continuidad de  $f$  en los siguientes casos:

a)  $D = \mathbb{R}^2$

b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2, x \geq y^2\}$

**Solución:**

a)

Obviamente  $f$  es continua por ser cociente de funciones continuas en todo punto distinto de  $(0, 0)$ . Analizamos la función  $f$  en  $(x, y) = (0, 0)$

Límites reiterados en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Límites radiales en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{m^2 x^4 + x^8 + m^8 x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2}{m^2 + x^4(1 + m^8)} = 1$$

La función no tiene límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

En consecuencia, **f no es continua en  $(0, 0)$**

b)

Sin embargo en el nuevo dominio existe el límite y vale 1:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} - 1 \right| &= \left| \frac{-x^8 - y^8}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} \right| = \frac{x^8}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} + \frac{y^8}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} \leq \frac{x^8}{x^2 y^2 + x^8} + \frac{y^8}{x^2 y^2 + y^8} = \\ &= \frac{x^6}{y^2 + x^6} + \frac{y^6}{x^2 + y^6} \stackrel{\substack{y \geq x^2 \\ x \geq y^2}}{\leq} \frac{x^6}{x^4 + x^6} + \frac{y^6}{y^4 + y^6} = \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{y^2}{1 + y^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Resulta que **f es continua en  $(0, 0)$  y por lo tanto en todo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2, x \geq y^2\}$**

26.- Sea la función definida por:

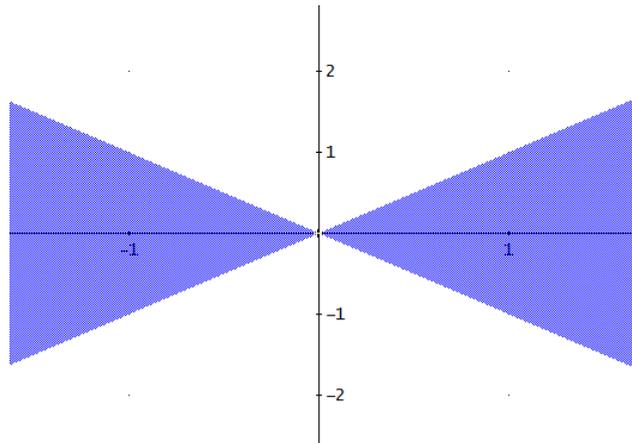
$$f(x, y) = \begin{cases} |y| \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

a) Dibujar el conjunto de puntos (x,y) donde la función está definida.

b) Estudiar la continuidad de la función en (0,0).

**Solución:**

a)



$$x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow |x| > |y|$$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{0}{0} ?$

Límites reiterados:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0.$$

Luego de existir el límite, valdría 0. Pasando a polares, se obtiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha) = \lim_{r \rightarrow 0} |r \operatorname{sen} \alpha| \sqrt{\frac{(r \cos \alpha)^2 - (r \operatorname{sen} \alpha)^2}{(r \cos \alpha)^2 + (r \operatorname{sen} \alpha)^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} |r \operatorname{sen} \alpha| \sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} \leq$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow 0} r |\operatorname{sen} \alpha| \leq r$$

siendo  $g(r) = r$  una función que tiende a cero cuando  $r$  tiende a cero. Entonces existe el

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} = 0 = f(0,0). \text{ Por lo tanto, la}$$

**función es continua en el origen.**



27.- Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x^2 - y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  . Estudiar el

dominio y la continuidad de  $f$  en el punto  $(0, 0)$ .

**Solución:**

$$2x^2 - y^2 - xy = 0 \Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y \neq x \\ y \neq -2x \end{cases}$$

La función  $f(x, y)$  está definida para todo punto  $(x, y)$  que no anulen el denominador

Límites radiales en  $(0, 0)$ :

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2 - mx^2 - m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - m - m^2}$$

La función no tiene límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

En consecuencia,  $f$  no es continua en  $(0, 0)$

### **Dominio de definición o campo de existencia.**

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analítica de la función.

$$D = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tales que, existe } \bar{y} = f(\bar{x}) \}$$

## Función acotada

Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  está **acotada**, si existe un número real positivo  $k$ , tal que  $|f(\bar{x})| \leq k$  para todo  $\bar{x}$  en  $D$ .

## Concepto de límite

Sean  $z=f(x,y)$  una función real de dos variables reales cuyo dominio es un subconjunto  $D \subset \mathbf{R}^2$ ,  $L$  un número real y  $(x_0, y_0)$  un punto de acumulación del dominio  $D$ .

Diremos que el *límite de la función  $z=f(x,y)$  cuando  $(x,y)$  tiende a  $(x_0, y_0)$  es el número  $L$*  y escribiremos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$  si y solo si:

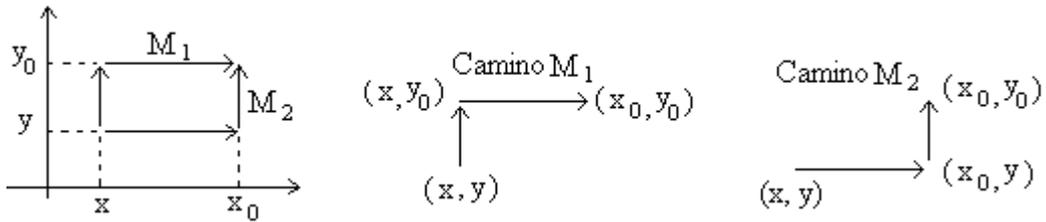
Para cualquier número  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que *para todos los puntos  $(x,y) \in D$ , siendo  $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ , que verifiquen que  $d((x,y), (x_0, y_0)) < \delta$  entonces sus imágenes verifican que  $d(f(x,y), L) < \varepsilon$* . Es decir:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que, todo  $(x,y) \neq (x_0, y_0)$  con

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

## Límites reiterados

Dos caminos usuales para especular sobre el valor del límite de una función  $z=f(x,y)$  en un punto  $(x_0,y_0)$ , son los dos caminos determinados por dos lados del rectángulo de la figura :



Estos dos caminos proporcionan los siguientes límites que se denominan *límites reiterados*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = L_2$$

## Continuidad en un punto

Una función  $z=f(x,y)$  es *continua en un punto  $(x_0,y_0)$*  si y solo si verifica las tres condiciones siguientes:

1. Existe  $f(x_0,y_0)$ , es decir  $(x_0,y_0)$  es un punto del dominio de la función.
2. Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ , siendo L un número real finito.
3.  $L=f(x_0,y_0)$ .

## Imagen de una función f

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función, **Imagen** de f es:

$$\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^2) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 / \exists \vec{x} \in \mathbb{V}, f(\vec{x}) = \vec{y}\} \subset \mathbb{R}.$$

## **Curva de nivel**

Dada la función  $z=f(x,y)$  y una constante  $c$ . Una curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales  $f(x,y)=c$ .

## **Isoterma**

Curva de nivel correspondiente a la misma temperatura en un mapa cartográfico.