CÁLCULO APROXIMADO DE INTEGRALES DEFINIDAS

No siempre es conveniente aplicar la regla de Barrow para el cálculo de una integral definida $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Esto puede ser debido a la complicación que ofrezca el cálculo de la función primitiva $\int f(x)dx$ o incluso a que esta primitiva, aún cuando exista (como ocurre con las funciones $f(x)$ continuas) no pueda ser expresable mediante un número finito de operaciones con funciones elementales (este es el caso de funciones tales como: $\cos(x^2)$, e^{-x^2}, $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, ...)

A veces sucede que no conocemos la expresión matemática de $f(x)$, sino solamente el valor de f en ciertos puntos.

Vamos a estudiar algunos métodos de cálculo aproximado de estas integrales. Todos van a tener en común la sustitución de la función f(x) por otra de más fácil integración. Cuando sea posible daremos una cota del error cometido en dicha aproximación.

Sea y = f(x) una función continua en un intervalo [a, b] de la recta real. Estudiemos distintas aproximaciones de $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

1.- Fórmula de los rectángulos

En este método sustituiremos la función f por una función escalonada que la aproxime en el intervalo [a, b].

Sea $P_n = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ una partición del intervalo [a, b]. Sea h la amplitud de cada subintervalo de la partición, $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i = 1, ..., n$, es decir, $h = \frac{b-a}{n}$.

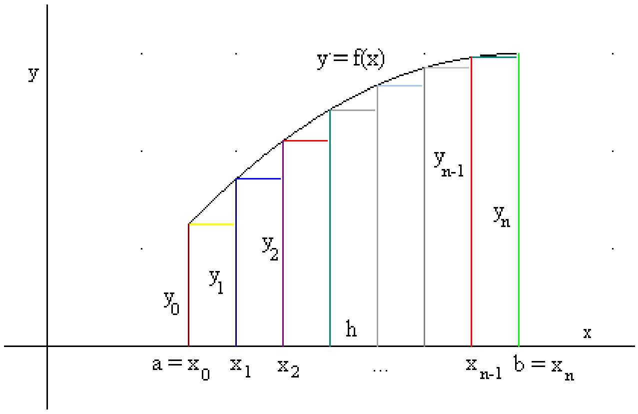


Imagen 1

Si consideramos los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura y_{i-1}, para $i = 1, ..., n$, la suma de sus áreas constituye una aproximación del valor de I:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \approx y_0 h + y_1 h + ... + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}(y_0 + ... + y_{n-1}) \quad \textbf{(1)}}$$

Teniendo en cuenta que la función f de la **Imagen 1** es creciente, la expresión anterior nos daría una aproximación por defecto del valor exacto de la integral I.

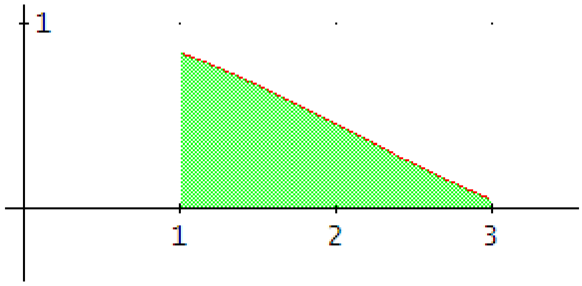
También pueden considerarse los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura y_i, para $i = 1, ..., n$, obteniéndose otra aproximación de I (en este caso, para la función de la **Imagen 1**, por exceso):

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \approx y_1 h + y_2 h + ... + y_n h = h(y_1 + ... + y_n) = \frac{b-a}{n}(y_1 + ... + y_n) \qquad \textbf{(2)}$$

Las expresiones **(1) y (2)** se llaman **fórmulas de los rectángulos**. El error cometido al aplicarlas disminuye a medida que aumenta n.

Ejemplo:
Calcular de forma aproximada (rectángulos, con n = 25) una acotación del área encerrada por la función f(x)=senx/x y eje OX en el intervalo $1 \le x \le 3$.
Solución:

a) El área viene dada por la integral: $\mathbf{A = \int_1^3 \frac{sen\ x}{x} dx}$



Cálculo del área mediante la fórmula de los rectángulos:

$$\frac{b-a}{n}(y_1 + ... + y_n) \le \int_1^3 \frac{senx}{x} dx \le \frac{b-a}{n}(y_0 + ... + y_{n-1})$$

Los puntos (abscisas) de la partición son de la forma $x = 1 + k\frac{3-1}{25}$ y los valores de la función f que interesan (los $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{25}$, que necesitamos en la fórmula de los rectángulos) son: $f\left(1 + k\frac{2}{25}\right) = \dfrac{sen\left(1 + \frac{2k}{25}\right)}{\left(1 + \frac{2k}{25}\right)}$

$$\frac{2}{25}\sum_{k=1}^{25} f\left(1 + \frac{2k}{25}\right) \le \int_1^3 \frac{senx}{x} dx \le \frac{2}{25}\sum_{k=0}^{24} f\left(1 + \frac{2k}{25}\right) .$$

$$\boxed{0{,}8707684815 \le \int_1^3 \frac{senx}{x} dx \le 0{,}9343229606}$$

2.- Fórmula de los trapecios

Sustituiremos en este caso la función f por una poligonal con vértices en la gráfica de f. Para la misma partición anterior P_n, llamemos A_i, al punto (x_i, y_i) y consideremos los trapecios de bases y_{i-1} e y_i, y lados $x_i - x_{i-1}$ y $A_{i-1}A_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

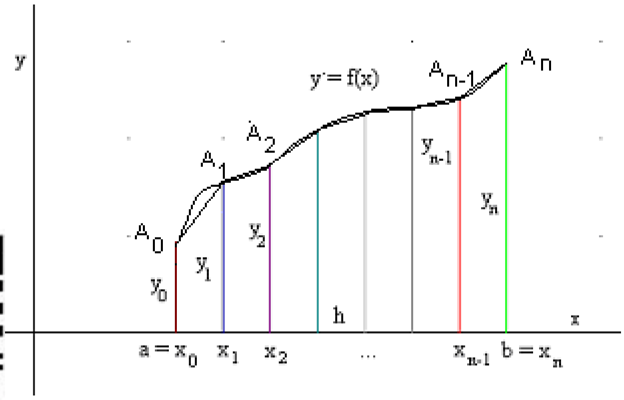


Imagen 2

La suma de las áreas de estos trapecios constituye una aproximación de I mejor que la dada por las fórmulas (1) y (2):

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\left(y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\left(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)\right] = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh)\right)} \qquad \textbf{(3)}$$

Error en la fórmula de los trapecios:

Puede demostrarse que existe un número $c \in [a,b]$ tal que el error cometido en la aproximación anterior es de la forma:

$$R_n = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(c)$$

Si $f''(x)$ es una función acotada en $[a,b]$ y llamamos $M = \text{máx}\{|f''(x)| \;/ a \le x \le b\}$, se tiene entonces que:

$$\boxed{|R_n| \le \frac{h^2}{12}(b-a)M}$$

La estimación por el método de los trapecios es exacta para polinomios de primer grado (tienen nula la segunda derivada). El factor clave como indicador del error es h^2. Si reducimos h a la mitad, el error se reduce en un factor 4.

Ejemplo:

a) *Calcular de forma aproximada (trapecios, con n = 20) la longitud de arco, correspondiente al intervalo $1\le t\le 2$, de la curva con ecuaciones paramétricas*

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3,\; y(t)=t+1$$

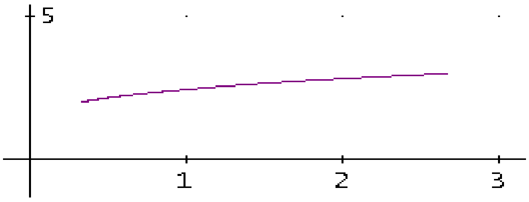
b) *Acotar el error cometido en la aproximación anterior.*

c) *¿En cuántos subintervalos habría que dividir el intervalo [1, 2] para que el error cometido fuera menor que una diezmilésima?*

Solución

a)

Las derivadas de las funciones x e y son



$$\left.\begin{array}{l} x(t)=\frac{1}{3}t^3 \\ y(t)=t+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'(t)=t^2 \\ y'(t)=1 \end{array}\right\}$$

Luego la longitud del arco de curva entre 1 y 2 viene dada por la integral:

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\int_1^2\sqrt{\left(t^2\right)^2+(1)^2}\,dt=\int_1^2\sqrt{t^4+1}\,dt$$

La función integrando es $f(t)=\sqrt{t^4+1}$ con $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{20}=\frac{1}{20}$

El valor aproximado de la integral es

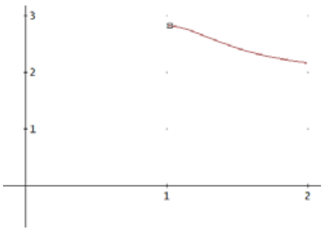
$$L=\boxed{\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)}=\frac{\frac{1}{20}}{2}\left(f(1)+2\sum_{k=1}^{19}f\left(1+k\frac{1}{20}\right)+f(2)\right)\approx$$

$\boxed{2.564568906}$ unidades lineales

b)

Máximo, en [1,2] de la segunda derivada (en valor absoluto) de la función integrando:

$$M=\text{máx}\left\{\left|f''(x)\right|/a\le x\le b\right\}=\text{máx}\left\{\left|\frac{2t^2(t^4+3)}{(t^4+1)^{3/2}}\right|/1\le t\le 2\right\}$$



Observamos que la función es estrictamente decreciente en [1,2] luego el máximo se alcanza en t = 1

Por comodidad tomamos 3 como cota, en consecuencia, una estimación del error cometida en la aproximación del valor de la integral mediante la fórmula de los trapecios es

$$\left|R_n\right|\le\frac{h^2}{12}(b-a)\,M<\frac{\left(\frac{1}{20}\right)^2}{12}(2-1)\;3\approx\boxed{0.000625}$$

Luego $2.564568906 - 0.000625 < L < 2.564568906 + 0.000625$

Es decir $2.563943905 < L < 2.565193905$

Por tanto, **L = $\boxed{2.56}$ u**, cifras decimales exactas.

c)
Nos planteamos la inecuación

$$|R_n| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\ M < \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{12}(2-1)\ 3 < \frac{1}{10000} = 10^{-4} \Rightarrow |n| > 50$$

Luego necesitamos tomar al menos **n=51** para obtener un resultado con un error menor que 0.0001

3.- Fórmula de Simpson o de las parábolas

En esta ocasión, imponemos que la partición P_n dé lugar a un número par de subintervalos en $[a,b]$, haciendo n = 2m.
Se trata de sustituir el área limitada por la función f, el eje OX y las rectas $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$ $(i = 1, 3, 5...)$ por el área limitada por la parábola que pasa por los puntos A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, el eje OX y las rectas $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$.

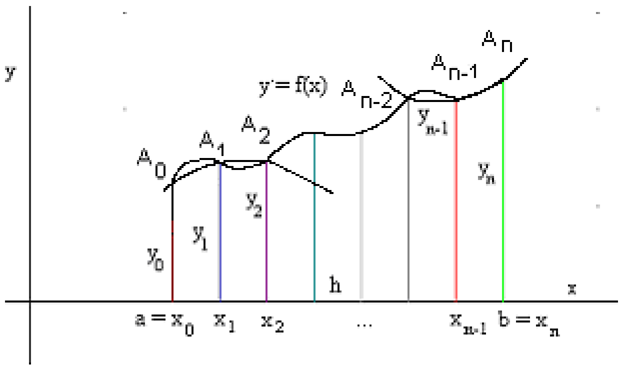


Imagen 3

La parábola que pasa por $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$ tiene de ecuación $\mathbf{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$, pudiendo considerar $x_0 = 0, x_1 = h$ y $x_2 = 2h$.
Relacionemos a_0, a_1 y a_2 con y_0, y_1 e y_2 para sustituir en la expresión anterior:

$$A_0 \in \text{parábola} \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = a_0$$

$$A_1 \in \text{parábola} \Rightarrow x_1 = h \Rightarrow y_1 = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$$

$$A_2 \in \text{parábola} \Rightarrow x_2 = 2h \Rightarrow y_2 = a_0 + a_1 2h + a_2 (2h)^2$$

En el intervalo $[x_0, x_2]$, el área aproximada sería:

$$\int_0^{2h} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) dx = \left[a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3\right]_0^{2h} = a_0 2h + \frac{a_1}{2}(2h)^2 + \frac{a_2}{3}(2h)^3 =$$

$$= \frac{h}{3}\left(6a_0 + 6a_1 h + 8a_2 h^2\right) = \frac{h}{3}\left[\underbrace{a_0}_{y_{i-1}} + 4\left(\underbrace{a_0 + a_1 h + a_2 h^2}_{y_i}\right) + \left(\underbrace{a_0 + a_1 2h + a_2 4h^2}_{y_{i+1}}\right)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Luego, $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, expresión que sólo depende de h y de las ordenadas de los puntos del intervalo.

Análogamente se obtendrían:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots,\ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Por tanto, una aproximación del área total es:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right] =$$

$$= \boxed{\frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{(n-2)/2} f\left(a + (2k+1)h\right) + 2\sum_{k=1}^{(n-2)/2} f\left(a + 2kh\right) + f(b)\right]} \qquad \textbf{(4)}$$

Error en la fórmula de Simpson:

Puede demostrarse que existe un número $c \in [a,b]$ tal que el error cometido en la aproximación anterior es de la forma:

$$R_n = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{4)}(c)$$

Si $f^{4)}(x)$ es una función acotada en $[a,b]$ y llamamos $M = \text{máx}\left\{\left| f^{4)}(x)\right| / a \le x \le b\right\}$, se tiene entonces que:

$$\boxed{|R_n| \le \frac{h^4}{180}(b-a)M}$$

El método de Simpson es exacto para todo polinomio de grado tres (tiene nula la derivada cuarta).

Cabe esperar que este método sea, en general, más preciso que el de los trapecios, pues, al ir disminuyendo h, el factor h^4 tiende a cero más rápidamente que h^2. Al reducir h en un factor 2, el error se reduce en un factor 16.

Ejemplo:

Una variable aleatoria X sigue una distribución normal N de media 0 y varianza 1. Hallar aproximadamente (Simpson, n = 60) la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 1.

Solución:

Función de densidad de una N(μ,σ): $\quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

En nuestro caso N(0,1): $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$

El espaciamiento horizontal es $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{60}=\frac{1}{60}$.

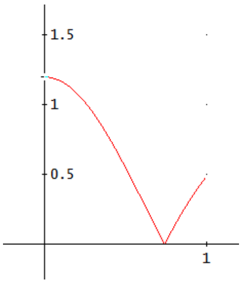
Los puntos (abscisas) de la partición son de la forma $\frac{2k}{60};\frac{2k+1}{60}$ y los valores de la función f que interesan (los y_0, y_1, y_2,…,y_{60}, que necesitamos en la fórmula de Simpson son: $f\left(\frac{2k}{60}\right)$ para los pares y $f\left(\frac{2k+1}{60}\right)$ para los impares

$$P(0<X<1)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}dx\approx\frac{1/60}{3}\left[f(0)+4\sum_{k=0}^{29}f\left(\frac{2k+1}{60}\right)+2\sum_{k=1}^{29}f\left(\frac{2k}{60}\right)+f(1)\right]\approx$$

0.34134474627

Ejemplo:
Acotar el error cometido en la aproximación anterior y dar la probabilidad pedida con las cifras decimales exactas que permita el cálculo anterior.
Solución:
Buscamos el Máximo, en [0,1] de la cuarta derivada (en valor absoluto) de la función integrando:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}\Rightarrow\left|f^{4)}(x)\right|=\left|\frac{x^4-6x^2+3}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}\right|<1.5$$



Por comodidad tomamos 1.5 como cota

Sustituyendo en la expresión:

$$\left|R_{n=60}\right|\le\frac{h^4}{180}(b-a)\ M<\frac{(1/60)^4}{180}(1-0)\cdot1,5\approx6,43\cdot10^{-10}$$

Teniendo en cuenta la aproximación obtenida anteriormente:

0.34134474627-0.0000000006<L<0.3413447462+0.0000000006

Es decir 0.34134474567 < L < 0.34134474687

Por tanto, **P(0<x<1) = 0.34134474**, cifras decimales exactas.

Ejemplo:
¿Qué valor de n hay que tomar para que el error sea menor que 10^{-10}?
Solución:
Nos planteamos la inecuación:

$$\left|R_n\right|\le\frac{h^4}{180}(b-a)\ M<\frac{\left(\frac{1-0}{n}\right)^4}{180}(1-0)\cdot1,5<10^{-10}\Rightarrow n>95.5$$

Luego necesitamos tomar al menos **n=96** para obtener un resultado con un error menor que 10^{-10}.