1ª Prueba de Evaluación Continua   Grupo A   22-II-2022

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Deducir geométricamente (a partir de triángulos planos) una expresión para calcular la altura esférica sobre un triángulo esférico.

(1 punto)

2.- Dado el triángulo esférico de lados a=120º10', b=105º22' y ángulo C=44º12'. Se pide:

a) Resolver el triángulo esférico. **(2 puntos)**

b) El área del triángulo esférico dado sobre una esfera de radio 1 dm. **(1 punto)**

c) La altura esférica sobre el lado a. Indicar si es exterior o interior. **(1 punto)**

Nota:

Expresar los resultados en grados, minutos y segundos.

3.- Se conocen las coordenadas geográficas de las dos ciudades siguientes:

$$\text{Ciudad A: } \begin{cases} \text{Longitud} = 5^{\circ}\ \text{O} \\ \text{Latitud} = 38^{\circ}\ \text{N} \end{cases}$$

$$\text{Ciudad B: } \begin{cases} \text{Longitud} = 40^{\circ}\ \text{E} \\ \text{Latitud} = 21^{\circ}\ \text{N} \end{cases}$$

a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km. **(1 punto)**

b) Establecer el rumbo desde la ciudad A hacia la ciudad B**. (1 punto)**

c) Si un avión se dirige de A a B siguiendo una circunferencia máxima Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich. **(1 punto)**

Fecha de **publicación de calificaciones: lunes 28** de febrero de 2022.
Revisión de la prueba**: martes, 1 de marzo de 12h a 13h en el despacho nº306.**

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Superficie de un triángulo esférico.

$S = \frac{\pi\, r^2}{180^o}\left(\alpha+\beta+\gamma-180^o\right)$; r=radio de la esfera y α, β, γ=ángulos del triángulo esférico

En un triángulo esférico, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

Teorema del seno (1º grupo de Bessel)

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

Teorema del coseno para lados (2º grupo de Bessel)

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } b \cdot \text{sen } c \cdot \cos A$

$\cos b = \cos a \ \cos c + \text{sen } a \cdot \text{sen } c \ \cos B$

$\cos c = \cos a \ \cos b + \text{sen } a \ \text{sen } b \ \cos C$

Teorema de la cotangente (3º grupo de Bessel)

$\text{cotg } a \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \text{cotg } A$

$\text{cotg } a \cdot \text{sen } c = \cos c \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \text{cotg } A$

$\text{cotg } b \cdot \text{sen } a = \cos a \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \text{cotg } B$

$\text{cotg } b \cdot \text{sen } c = \cos c \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{cotg } B$

$\text{cotg } c \cdot \text{sen } a = \cos a \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \text{cotg } C$

$\text{cotg } c \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{cotg } C$

Teorema del coseno para ángulos (4º grupo de Bessel)

$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \text{sen } B \cdot \text{sen } C \cdot \cos a$

$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \text{sen } A \cdot \text{sen } C \cdot \cos b$

$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \text{sen } A \cdot \text{sen } B \cdot \cos c$

Analogías de Neper

$$\text{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\text{cotg}\frac{C}{2};\quad \text{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\text{sen}\frac{a-b}{2}}{\text{sen}\frac{a+b}{2}}\cdot\text{cotg}\frac{C}{2};$$

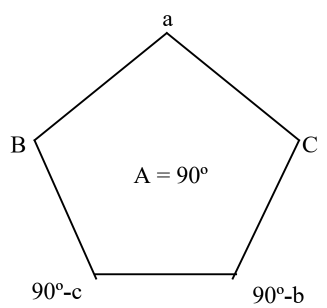
$$\text{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\text{tg}\frac{c}{2};\quad \text{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\text{sen}\frac{A-B}{2}}{\text{sen}\frac{A+B}{2}}\cdot\text{tg}\frac{c}{2}$$

Regla de Neper de los elementos circulares

Puestos los elementos del triángulo esférico en los vértices de un pentágono y en el orden que indica la figura, el *coseno* de cada vértice es igual al ***producto:***

a) De los *senos* de los vértices *opuestos*.

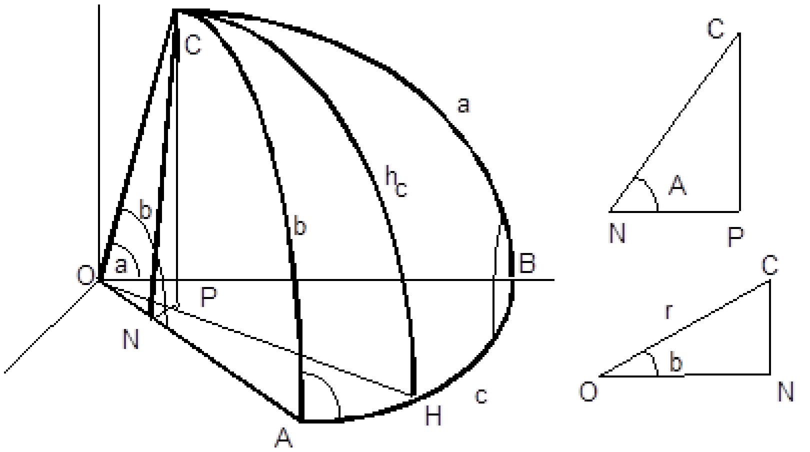
b) De las *cotangentes* de los vértices *adyacentes.*



1.- Deducir geométricamente (a partir de triángulos planos) una expresión para calcular la altura esférica sobre un triángulo esférico.

Solución:

Proyectamos el vértice C sobre el plano OAB en P, y P sobre la recta OA en N. Se obtiene así el triángulo de la figura, este triángulo está en un plano perpendicular a OA, por contener dos perpendiculares a la recta OA, por tanto, la recta CN también es perpendicular a OA.



La altura esférica h_c (CH) del triángulo esférico ABC es el arco del ciclo perpendicular al arco AB y que pasa por C.

$$\Rightarrow \overline{\mathbf{CP}} = \overline{\mathbf{CN}} \cdot \mathbf{senA} = \mathbf{senb} \cdot \mathbf{senA} = \mathbf{sen\ h_c}$$

2.- Dado el triángulo esférico de lados a=120º10’, b=105º22’ y ángulo C=44º12’. Se pide:

a) Resolver el triángulo esférico.

b) El área del triángulo esférico dado sobre una esfera de radio 1 dm.

c) La altura esférica sobre el lado a. Indicar si es exterior o interior.

Solución:

a) Con los datos dados obtenemos el tercer lado aplicando el teorema del coseno:

$\cos c = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\ \text{sen}\, b \cos C = 0{,}7308234280 \Rightarrow$ **c = 43º 02’ 40”**

Y ahora, con este dato incorporado, aplicamos de nuevo el teorema del coseno para calcular A y B:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{senb\ senc} = -0.4692630737 \Rightarrow \mathbf{A = 117º\ 59’\ 11”}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{sena\ senc} = 0.1732786991 \Rightarrow \mathbf{B = 80º\ 01’\ 17”}$$

b) El área **es** $S = \frac{\pi r^2}{180^o}\varepsilon = \frac{\pi r^2}{180^o}\left(A + B + C - 180^o\right) = \frac{\pi \cdot 1^2 dm^2}{180^o}(62^o\ \ 12'\ 28'') =$

1,0857730542dm²

c) Considerando el triángulo AHC rectángulo en H

$\text{sen}h = \text{senbsen}C = 0.6722412659 \Rightarrow \text{h} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{42^\circ\ 14'\ 25''} < b \Leftrightarrow C < 90^\circ = H \\ 137^\circ\ 45'\ 35'' \end{array} \right.$

Luego al ser B< 90º y C < 90º, deducimos que la altura sobre el lado *a* es **interior** al triángulo ABC.

3.- Se conocen las coordenadas geográficas de las dos ciudades siguientes:

Ciudad A: $\begin{cases} \text{Longitud} = 5^\circ\ \text{O} \\ \text{Latitud} = 38^\circ\ \text{N} \end{cases}$

Ciudad B: $\begin{cases} \text{Longitud} = 40^\circ\ \text{E} \\ \text{Latitud} = 21^\circ\ \text{N} \end{cases}$

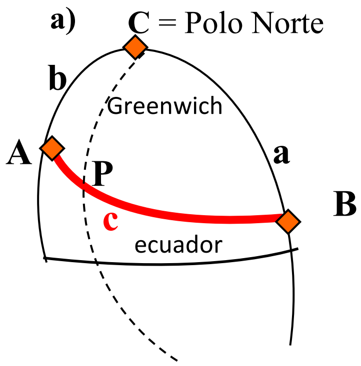
a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km.

b) Establecer el rumbo desde la ciudad A hacia la ciudad B.

c) Si un avión se dirige de A a B siguiendo una circunferencia máxima. Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich.

Solución:

a)



En el triángulo esférico ABC:

Conocemos CA (90º – Latitud de A): b = 90º - 38º= 52º

Conocemos CB: (90º - Latitud de B): a=90º - 21º = 69º

Conocemos el ángulo C = 5º+ 40º= 45º

Queremos calcular AB es decir c. Para ello aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABC: cosc= cosa cosb + sena senb cosC=0.7408315871, obteniéndose: c = 0.7364887618 radianes=41º 11' 52''.

Pasando esta medida del lado n a unidades lineales, la distancia entre ambas ciudades es: $L = \frac{2\pi R}{360^\circ} c = \frac{2\cdot\pi\cdot 6371}{360^\circ} 41^\circ\ 11'\ 52'' = 6371\cdot 0.7364887618\ \boxed{4692\ \text{km}}$.

b) El rumbo para ir de A a B es el ángulo A en el triángulo esférico ACB

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cdot\cos c}{\text{sen}b\cdot\text{sen}c} = \frac{\cos 69^\circ - \cos 52^\circ\cdot\cos 41^\circ\ 11'\ 52''}{\text{sen}52^\circ\cdot\text{sen}41^\circ\ 11'\ 52''} = -0.1846468809$$

$\Rightarrow$ **A= 100º 38' 25''**

c) Ahora del triángulo APC' conocemos:

b= 90º - 38º = 52º; A= 100º 38' 25''; C' = 5º cosP=-cosAcosC'+senAsenC'cosb= 0.2366800156, luego P=76º18'33''

$$\cos\overset{\frown}{CP}=\frac{\cos A+\cos P\cdot\cos C'}{\mathrm{senP}\cdot\mathrm{senC'}}\approx 0.6038360021\Rightarrow\overset{\frown}{CP}=52^{o}\,51'17''$$

El punto P tiene por coordenadas:

longitud 0º; latitud $90^{o}-\overset{\frown}{CP}=90^{o}-52^{o}\,51'17''=$ **37º08'43''**Norte

1ª Prueba de Evaluación Continua Grupo B 24-II-2022

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1**.-** Definir los siguientes conceptos: ciclo, circunferencia menor, distancia esférica, ángulo entre dos ciclos , polos de un ciclo y triángulo esférico. Representar gráficamente cada uno de ellos.

(1 punto)

2.- Demostrar el siguiente teorema del coseno para ángulos:

cos C = - cos A·cos B + sen A·sen B·cos c

(1 punto)

3.-Justificar por qué los siguientes triángulos no pueden ser triángulos esféricos:

a) a=120º b=180º c=70º b) A=40º B=100º C=30º c)a=40º b=40º A=60º B=70º

(1 punto)

4**.-** Dado el triángulo esférico tal que:

A = 68º 39’ 07’’, B = 74º 07’ 12’’, a = 51º 42’ 08’’

a) Resolver el triángulo esférico. **(2 puntos)**

b) El área del triángulo esférico dado sobre una esfera de radio 10 m. **(1 punto)**

Nota:

Expresar los resultados en grados, minutos y segundos.

5.- Un barco ha de salir del puerto A (latitud 20º 31’ N, longitud 70º 11’ E) y llegar al puerto B (latitud 42º 22’ N, longitud 10º 45’ W). Calcular:
a) La distancia esférica AB considerando el radio de la tierra, R=6371 km. **(1 punto)**
b) El rumbo inicial. **(1 punto)**
c) El rumbo final. **(1 punto)**
d)Área del triángulo PNorteAB **(1 punto)**
Nota:

Expresar los resultados en grados, minutos y segundos.

Fecha de **publicación de calificaciones: lunes 7** de marzo de 2022.
Revisión de la prueba**: solicitarlo vía correo electrónico: ana.domingo.preciado@upm.es**

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Superficie de un triángulo esférico.

$S = \frac{\pi\, r^2}{180^o}\left(\alpha+\beta+\gamma-180^o\right)$; r=radio de la esfera y α, β, γ=ángulos del triángulo esférico

En un triángulo esférico, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

Teorema del seno (1º grupo de Bessel)

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A}=\frac{\text{sen } b}{\text{sen } B}=\frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

Teorema del coseno para lados (2º grupo de Bessel)

$\cos a = \cos b\cdot \cos c + \text{sen } b\cdot \text{sen } c\cdot \cos A$

$\cos b = \cos a \ \cos c + \text{sen } a \cdot\text{sen } c \ \cos B$

$\cos c = \cos a \ \cos b + \text{sen } a \ \text{sen } b \ \cos C$

Teorema de la cotangente (3º grupo de Bessel)

$\text{cotg } a \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \text{cotg } A$

$\text{cotg } a \cdot \text{sen } c = \cos c \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \text{cotg } A$

$\text{cotg } b \cdot \text{sen } a = \cos a \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \text{cotg } B$

$\text{cotg } b \cdot \text{sen } c = \cos c \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{cotg } B$

$\text{cotg } c \cdot \text{sen } a = \cos a \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \text{cotg } C$

$\text{cotg } c \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{cotg } C$

Teorema del coseno para ángulos (4º grupo de Bessel)

$\cos A = -\cos B\cdot\cos C + \text{sen } B\cdot\text{sen } C\cdot\cos a$

$\cos B = -\cos A\cdot\cos C + \text{sen } A\cdot\text{sen } C\cdot\cos b$

$\cos C = -\cos A\cdot\cos B + \text{sen } A\cdot\text{sen } B\cdot\cos c$

Analogías de Neper

$$\text{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\text{cotg}\frac{C}{2};\quad \text{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\text{sen}\frac{a-b}{2}}{\text{sen}\frac{a+b}{2}}\cdot\text{cotg}\frac{C}{2};$$

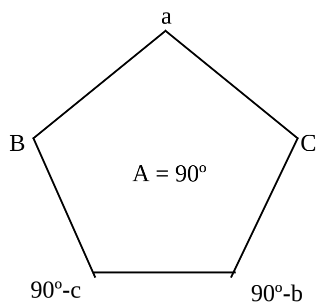
$$\text{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\text{tg}\frac{c}{2};\quad \text{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\text{sen}\frac{A-B}{2}}{\text{sen}\frac{A+B}{2}}\cdot\text{tg}\frac{c}{2}$$

Regla de Neper de los elementos circulares

Puestos los elementos del triángulo esférico en los vértices de un pentágono y en el orden que indica la figura, el *coseno* de cada vértice es igual al ***producto:***

a) De los *senos* de los vértices *opuestos*.

b) De las *cotangentes* de los vértices *adyacentes.*



Ejercicio 4
Solución:

Por el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen a}}{\text{sen A}}=\frac{\text{sen b}}{\text{sen B}}\Rightarrow \text{sen b}=0.8104585953\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\mathbf{b_1=54^o\ 08'\ 26.7''}}\\ \boxed{\mathbf{b_2=125^o\ 51'\ 33.3''}}\end{cases}$$

$A<B\Leftrightarrow a<b$, luego ambos valores de b son válidos.

1ª solución: A, B, a y $\boxed{b_1=54^o\,08'\,26.7''}$ ¿c_1, C_1?

Aplicando las analogías de Neper:

$$\text{tg}\frac{a+b_1}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\text{tg}\frac{c_1}{2}\Rightarrow \text{tg}\frac{c_1}{2}=\text{tg}\frac{a+b_1}{2}\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=0.4228571561\Rightarrow$$

$\frac{c_1}{2}=22^o\ 55'\,17''\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{c_1=45^o\ 50'\ 34''}}$ y luego teorema del coseno para obtener C_1:

$$\cos c_1=\cos a\cos b_1+\text{sen} a\,\text{sen} b_1\cos C_1\Rightarrow \cos C_1=\frac{\cos c_1-\cos a\cos b_1}{\text{sen} a\,\text{sen} b_1}=0.5244613013\Rightarrow$$

$\boxed{C_1=58^o\ 22'\ 4.9''}$

2ª solución: A, B, a y $\boxed{b_2=125^o\,51'\,33.3''}$ ¿c_2, C_2?

Aplicando las analogías de Neper:

$$\text{tg}\frac{a+b_2}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\text{tg}\frac{c_2}{2}\Rightarrow \text{tg}\frac{c_2}{2}=\text{tg}\frac{a+b_2}{2}\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=15.01422834\Rightarrow$$

$\frac{c_2}{2}=86^o\ 11'\,22.3''\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{c_2=172^o\ 22'\ 44.6''}}$ y luego teorema del coseno para obtener C_2
:

$$\cos c_2=\cos a\cos b_2+\text{sen} a\,\text{sen} b_2\cos C_2\Rightarrow \cos C_2=\frac{\cos c_2-\cos a\cos b_2}{\text{sen} a\,\text{sen} b_2}=-0.9875366309\Rightarrow$$

$\boxed{C_2=170^o\ 56'\ 40.6''}$

AREA=10^2(A+B+C-PI)

Ejercicio 5
Solución:

<u>Punto A.</u>
Longitud = 70º 11’ E.
Latitud = 20º 31’ N.
<u>Punto B.</u>
Longitud = 10º 45’ W.
Latitud = 42º 22’ N.
a) Cálculos del triángulo PBA
a = 90º - Latitud de B = (90º - 42º 22’ N) = **47º 38’.**
b = 90º - Latitud de A = (90º - 20º 31’N) = **69º 29’**.
P = Longitud A + Longitud B = 70º 11’ + 10º 45’ = **80º 56’.**
Aplicando el t. del coseno para lados:
cos p = cos a · cos b + sen a · sen b · cos P. Luego:
cos p = cos(47º 38’)· cos(69º29’) + sen(47º 38’) sen(69º 29’)·cos(80º 56’)=
= **0.345223879**
p = arc cos **0.345223879 = 69,804537º**
Considerando la Tierra esférica con radio R = 6.371 km, el valor de un ciclo es 2πR = 40.030 km.
Un grado de ciclo valdrá: 40.030 / 360º = 111,2 km por grado
La distancia AB en km es 69,80 . 111,2 km = 7762,26 km.

b) Rumbo inicial: 360º- A

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\ \cos p}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} p} = \frac{0,55287811}{0,87898975} = 0,6289926 \Rightarrow A = 51^{o}\,1'\,26''$$

Rumbo inicial: 360º- A =360º- 51º1’26’’= **308º 58’ 34’’**

c) Rumbo final: 180º + B

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos p}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} p} = \frac{0.11784187}{0.69342301} = 0.16994225 \Rightarrow B = 80^{o}\,12'\,56''$$

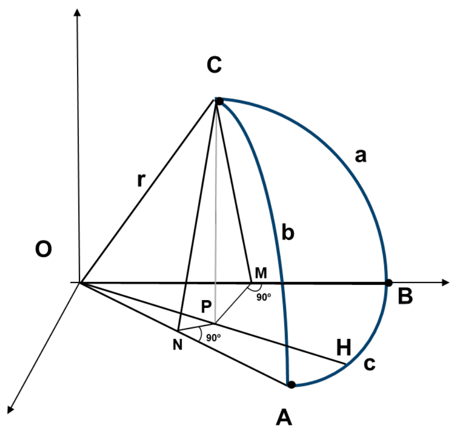
$\boxed{\textbf{Rumbo de B hacia A = B=80º21’54’’}}$
AREA=10^2(A+B+C-PI)

1ª Prueba de Evaluación Continua Grupo A2 24-II-2022

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Deducir las expresiones del teorema del seno a partir de la figura. Justificar todas las relaciones geométricas y trigonométricas a partir de figuras, desarrollos matemáticos o de forma razonada.



(2.0 puntos)

2.- Deducir las expresiones del teorema del coseno para ángulos. Justificar todas las relaciones geométricas y trigonométricas a partir de figuras, desarrollos matemáticos o de forma razonada.

(1.5 puntos)

3.- Dado un triángulo esférico rectángulo (B=90°), sabiendo que los ángulos esféricos son: A=111° 59′ 26′′ y C=62° 22′ 44′′.

a) Resolver el triángulo (1.5 puntos)
b) El área del triángulo esférico suponiendo un radio = 1 km. (0.5 puntos)
c) Altura esférica sobre el lado b. Indicar si es exterior o interior y hacer un dibujo aproximado. (1 puntos)
d) Razona cual sería la altura esférica sobre a y sobre c (0.5 puntos)

(3.5 puntos)

4.- Un vuelo sale de Santiago de Chile a Moscú. Conociendo las coordenadas geográficas de estas ciudades:

Santiago (33° 27′ 00″ S, 70° 40′ 00″ W)
Moscú (55° 45′ 00″ N, 37° 37′ 00″ E)

e) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6370 km. (1 punto)
f) Establecer el rumbo desde Santiago de Chile hacia Moscú. (0.5 puntos)
g) Si un avión sigue una circunferencia máxima. Hallar la latitud del punto X (φ_x) en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich ($\lambda = 0°$). (1.5 punto).

(3.0 puntos)

Fecha de **publicación de calificaciones: martes, 1 de marzo. Revisión** de la prueba**: jueves, 3 de marzo de 12.10h a 12.30h en el despacho 304.**

Fórmulas:

Superficie del triángulo esférico:

$$S = \frac{\pi r^2}{180°}(A + B + C - 180°)$$

Altura esférica:

$$sin(h_c) = sin(B) \cdot sin(a) = sin(b) \cdot sin(A)$$

Teorema del seno:

$$\frac{sin(A)}{sin(a)} = \frac{sin(B)}{sin(b)} = \frac{sin(C)}{sin(c)}$$

Teorema del coseno:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sin(b) \cdot sin(c) \cdot cos(A)$$
$$cos(b) = cos(a) \cdot cos(c) + sin(a) \cdot sin(c) \cdot cos(B)$$
$$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b) + sin(a) \cdot sin(b) \cdot cos(C)$$

Teorema de la cotangente:

$$cot(a) \cdot sin(b) = cos(b) \cdot cos(C) + sin(C) \cdot cot(A)$$
$$cot(a) \cdot sin(c) = cos(c) \cdot cos(B) + sin(B) \cdot cot(A)$$
$$cot(b) \cdot sin(a) = cos(a) \cdot cos(C) + sin(C) \cdot cot(B)$$
$$cot(b) \cdot sin(c) = cos(c) \cdot cos(A) + sin(A) \cdot cot(B)$$
$$cot(c) \cdot sin(a) = cos(a) \cdot cos(B) + sin(B) \cdot cot(C)$$
$$cot(c) \cdot sin(b) = cos(b) \cdot cos(A) + sin(A) \cdot cot(C)$$

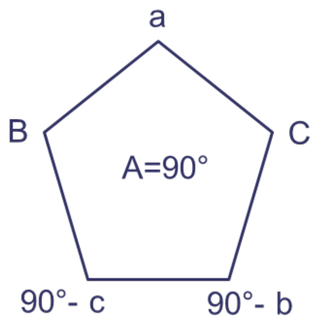
Teorema del coseno para ángulos:

$$cos(A) = -cos(B) \cdot cos(C) + sin(B) \cdot sin(C) \cdot cos(a)$$
$$cos(B) = -cos(A) \cdot cos(C) + sin(A) \cdot sin(C) \cdot cos(b)$$
$$cos(C) = -cos(A) \cdot cos(B) + sin(A) \cdot sin(B) \cdot cos(c)$$

Analogías de Neper:

$$tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} cot\left(\frac{A+B}{2}\right) \qquad tan\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Regla de Neper para triángulos esféricos rectángulos:



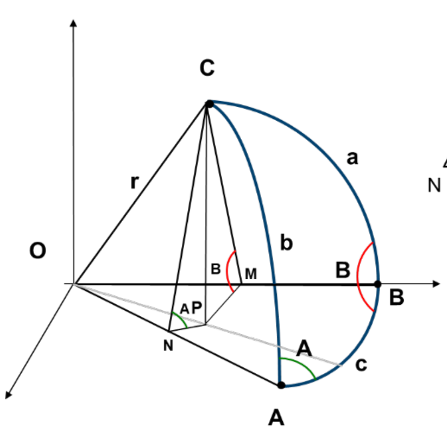
El coseno de cada vértice es igual al producto:

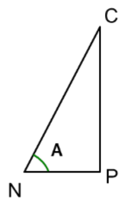
a) De los senos de los vértices opuestos.
b) De las cotangentes de los vértices adyacentes.

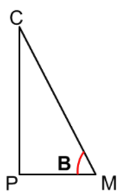
1.- Deducir las expresiones del teorema del seno a partir de la figura. Justificar todas las relaciones geométricas y trigonométricas a partir de figuras, desarrollos matemáticos o de forma razonada.

A partir de la proyección del punto P en la recta OA y OB, se obtienen los puntos N y M, respectivamente. Así se generan 4 triángulos rectángulos, por un lado:

- **Los triángulos rectángulos CPN y CPM**. Cuyos ángulos $\widehat{CNP}$ y $\widehat{CMP}$ coinciden con los ángulos esféricos A y B del triángulo esférico, respectivamente.







De estos triángulos, se sacan las relaciones:

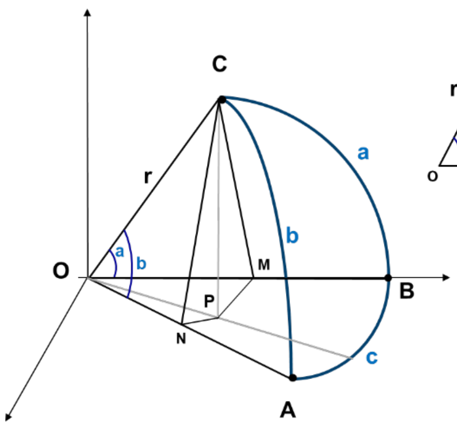
$$CP = CN \cdot sen(A)$$

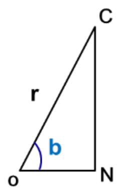
$$CP = CM \cdot sen(B)$$

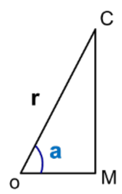
De donde se obtiene que:

$$CN \cdot sen(A) = CM \cdot sen(B)$$

- **Los triángulos rectángulos CON y COM**. Cuyos ángulos $\widehat{CON}$ y $\widehat{COP}$ coinciden con los lados b y a del triángulo esférico, respectivamente.







De estos triángulos, se sacan las relaciones:

$$CN = r \cdot sen(b)$$

$$CM = r \cdot sen(a)$$

Combinando estas ecuaciones:

$$r \cdot sen(b) \cdot sen(A) = r \cdot sen(a) \cdot sen(B)$$

$$sen(b) \cdot sen(A) = sen(a) \cdot sen(B) \rightarrow \frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{sen(B)}{sen(b)}$$

Si tomamos como referencia el vértice A, en lugar del vértice C, como indica la figura, siguiendo el mismo desarrollo, se obtendría que:

$$\frac{sen(C)}{sen(c)} = \frac{sen(B)}{sen(b)}$$

Por lo que, de las dos expresiones anteriores, se obtiene finalmente:

$$\frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{sen(B)}{sen(b)} = \frac{sen(C)}{sen(c)}$$

2.- Deducir las expresiones del <u>teorema del coseno para ángulos</u>. Justificar todas las relaciones geométricas y trigonométricas a partir de figuras, desarrollos matemáticos o de forma razonada.

A partir del teorema del coseno (tomamos como ejemplo una de las tres expresiones), aplicado al triángulo esférico polar:

$$\cos(ap) = \cos(bp) \cdot \cos(cp) + sen(bp) \cdot sen(cp) \cdot \cos(Ap)$$

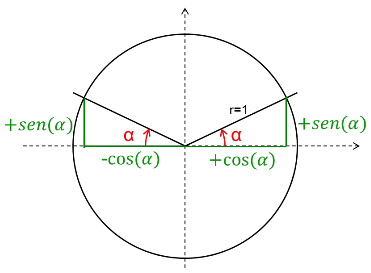
Y la vinculación de los lados y ángulos del triángulo esférico con el triángulo esférico polar:

$$Ap = 180° - a; \quad ap = 180° - A; \quad bp = 180° - B; \quad cp = 180° - C;$$

Se obtiene que:

$$\cos(180° - A) = \cos(180° - B) \cdot \cos(180° - C) + sen(180° - B) \cdot sen(180° - C) \cdot \cos(180° - a)$$

A partir de la esfera de radio 1, se observa que:



$$sen(\alpha) = sen(180° - \alpha)$$
$$cos(\alpha) = -cos(180° - \alpha)$$

Aplicado a la fórmula anterior:

$$-\cos(A) = -\cos(B) \cdot -\cos(C) + sen(B) \cdot sen(C) \cdot -\cos(a)$$

Cambiando a todo de signo:

$$\cos(A) = -\cos(B) \cdot \cos(C) - sen(B) \cdot sen(C) \cdot \cos(a)$$

Se deducen el resto de las expresiones con el mismo procedimiento y las otras fórmulas del teorema del coseno:

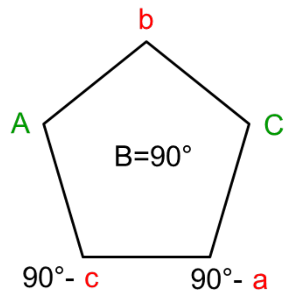
$$\cos(B) = -\cos(A) \cdot \cos(C) - sen(A) \cdot sen(C) \cdot \cos(b)$$

$$\cos(C) = -\cos(A) \cdot \cos(B) - sen(A) \cdot sen(B) \cdot \cos(c)$$

3.- Dado un triángulo esférico rectángulo (B=90°), sabiendo que los ángulos esféricos son: A=111° 59’ 26’’ y C=62° 22’ 44’’.

a) Resolver el triángulo

A partir de la regla de Neper de los elementos circulares, se obtiene que:



Puede seguirse diferentes caminos para resolver el triángulo, usando la relación con los vértices opuestos, con los vértices adyacentes o combinando ambos.

En ambos casos:

$$\cos(b) = \cot(A) \cdot \cot(C) \rightarrow b = 102.1991°$$

Como la hipotensa *(b)* es obtusa, *c* y *a* serán una obtusa y otra aguda (distinto tipo).

Camino 1: (usando relaciones con vértices adyacentes):

$$\cos(A) = \cot(b) \cdot \cot(90 - c) \rightarrow \tan(c) = \cos(A) \cdot \tan(b) \rightarrow c = 60.0000°$$

Como *c* es aguda, *a* será obtusa.

$$\cos(90° - a) = \cot(90° - c) \cdot \cot(C) \rightarrow \mathrm{sen}(a) = \tan(\mathrm{c}) \cdot \cot(C) \rightarrow a = \begin{cases} \cancel{65.0000°} \\ 115.0000° \end{cases}$$

$a = 115.0000°$ (obtusa)

Camino 2: (usando relaciones con vértices opuestos):

$$\cos(90° - a) = \sin(A) \cdot \sin(b) \rightarrow \sin(a) = \sin(A) \cdot \sin(b) \rightarrow a = \begin{cases} \cancel{65.0000°} \\ 115.0000° \end{cases}$$

Como *A*>*B*, entonces *a*>*b*. Solo hay una opción posible: $a = 115.0000°$

$$\cos(90° - c) = \sin(C) \cdot \sin(b) \rightarrow \sin(c) = \sin(C) \cdot \sin(b) \rightarrow c = \begin{cases} 60.0000° \\ \cancel{120.0000°} \end{cases}$$

Como *a* es obtusa, *c* será aguda $c = 60.0000°$
Otra forma de ver la opción correcta sería: como *B*>*C*, entonces *b*>*c*. Se llega a la misma solución.

También podría haberse seguido un camino mixto, combinando las relaciones anteriores. Todos los caminos llegan a la misma solución.

b) El área del triángulo esférico dado sobre una esfera de radio: 1 km.

Para calcular la superficie del triángulo, se emplean los ángulos esféricos y se aplica la expresión:

$$S = \frac{\pi r^2}{180^o}(A + B + C - 180^o) = 1.47 km^2$$

c) Altura esférica sobre el lado b. Indicar si es exterior o interior y haz un dibujo aproximado.

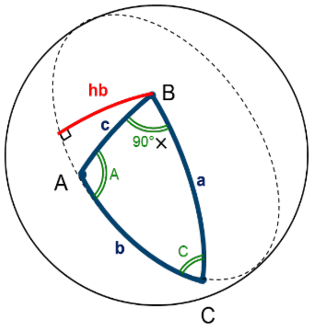
La expresión que permite calcular la altura esférica sobre *b*:

$$sin(h_b) = sin(A) \cdot sin(c) = sin(a) \cdot sin(C) \rightarrow h_b = \begin{cases} 53.4193° \\ \cancel{126.5807°} \end{cases}$$

Como los ángulos esféricos *A* y *C*, uno es obtuso y otro agudo, la altura h_b será exterior y aguda.

$$h_b = 53.4193°\ exterior$$

Un dibujo aproximado del caso sería:



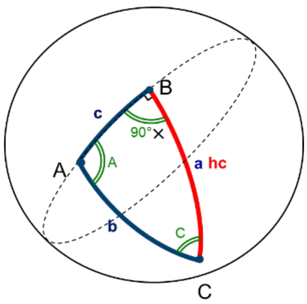
C agudo y A obtuso

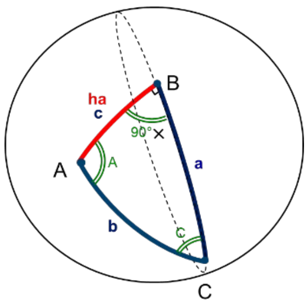
Altura esférica hb es exterior y aguda

d) Razona cual sería la altura esférica sobre a y sobre c.

Al ser *B* un ángulo recto, los lados *a* y *c* son perpendiculares. Por lo tanto, el lado *a* coincide con la altura esférica de *c* ($h_c = a$) y el lado *c* coincide con la altura esférica de *a* ($h_a = c$).

Gráficamente:





No solicitado, comprobación matemática en este ejemplo:

Como *B=90°, sin(90°)=1.*

$$sin(h_a) = sin(c) \cdot sin(B) = sin(c) \cdot sin(90°) = sin(c) \cdot 1 = sin(c) \rightarrow h_a = \begin{cases} 60.0000° \\ \cancel{120.0000°} \end{cases}$$

B=90° y C=62° 22' 44''. h_a *aguda*

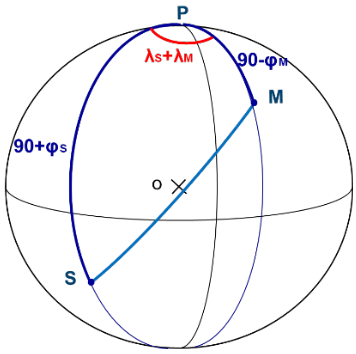
$$sin(h_c) = sin(a) \cdot sin(B) = sin(a) \cdot sin(90°) = sin(a) \cdot 1 = sin(a) \rightarrow h_c = \begin{cases} \cancel{65.0000°} \\ 115.0000° \end{cases}$$

B=90° y A=111° 59' 26''. h_c *obtusa*

4.- Un vuelo sale de Santiago de Chile a Moscú. Conociendo las coordenadas geográficas de estas ciudades:
Santiago (33° 27′ 00″ S, 70° 40′ 00″ W)
Moscú (55° 45′ 00″ N, 37° 37′ 00″ E)

a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6370 km.

Dibujo aproximado de la ubicación de las ciudades y construcción del triángulo esférico:



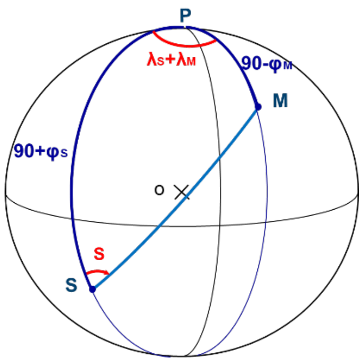
A partir del teorema del coseno:

$$\cos(SM) = \cos(90^\circ + \varphi_S)\cdot\cos(90^\circ - \varphi_M) + sen(90^\circ + \varphi_S)\cdot sen(90^\circ - \varphi_M)\cdot\cos(\lambda_S + \lambda_M)$$

$$SM = 127.0808^\circ$$

$$Distancia\ SM = (SM)rad * radio = 14128.5km$$

b) Establecer el rumbo de navegación (o acimut) desde la ciudad A hacia la ciudad B.



Conocemos los tres lados del triángulo, a partir del teorema del coseno:

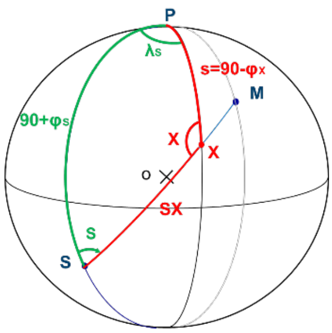
$$\cos(S) = \frac{\cos(90^\circ - \varphi_M) - \cos(90^\circ + \varphi_S)\cdot\cos(SM)}{sen(90^\circ + \varphi_S)\cdot sen(SM)}$$

$S = 42.0551^\circ$ Este es el rumbo de navegación de Santiago a Moscú

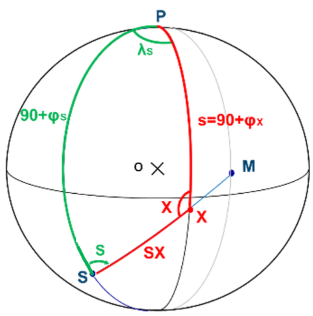
c) Si un avión sigue una circunferencia máxima. Hallar la latitud del punto X en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich.

Cuando el avión pasa por el meridiano de Greenwich, la longitud es 0°. Por ello, el ángulo P= λs +0°= λs. Tenemos dos opciones posibles, que sobrevuele el meridiano de Greenwich después de pasar el ecuador (a) o antes (b).

a)



b)



En la opción a) el lado del triángulo $s = 90° - \varphi_X$, en este caso $s < 90°$, y en la opción b) el lado del triángulo $s = 90° + \varphi_X$, en este caso $s > 90°$. Calcularemos s y luego analizaremos el caso.

De ese triángulo conocemos dos ángulos esféricos (λ_S ,S) y un lado ($90° + \varphi_S$). Aplicamos el teorema del coseno para ángulos:

$$\cos(X) = -\cos(S) \cdot \cos(\lambda_S) + sen(S) \cdot sen(\lambda_S) \cdot \cos(90° + \varphi_S)$$

$$X = 126.4569°$$

Conociendo los tres ángulos, podemos conocer ahora cualquier lado, en este caso, calculamos s aplicando el teorema del coseno para ángulos:

$$\cos(S) = -\cos(\lambda_S) \cdot \cos(X) + sen(\lambda_S) \cdot sen(X) \cdot \cos(s)$$

$$\cos(s) = \frac{\cos(S) + \cos(\lambda_S) \cdot \cos(X)}{sen(\lambda_S) \cdot sen(X)} \quad \rightarrow s = 44.0178°$$

Al ser s un lado agudo (<90°), en punto X estará en el hemisferio norte (opción a)

Por lo tanto: $\varphi_X = 90° - s = 45.9822°$ N