ETSI de Topografía, Geodesia y Cartografía

1ª Prueba de Evaluación Continua   Grupo A   2-III-2021

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos (son del mismo cuadrante).

(1 punto)

2.- Dado el triángulo esférico con A=60º, b=80º y B=100º, hallar la *altura* esférica sobre el lado "c" y decir si es interior o exterior al triángulo.

(2 puntos)

3.- Un avión parte de un lugar A en el hemisferio sur hacia otro punto B en el hemisferio norte siguiendo un arco de circunferencia máxima, las coordenadas geográficas son:

A (50º O, 20º S) ,   B (20º E, 30º N)

Considerando que el radio de la circunferencia de la trayectoria es R = 6380 km, se pide obtener:

a) **La distancia entre las ciudades A y B, y representar gráficamente el triángulo sobre la esfera que se utiliza. (2 puntos)**
b) **Rumbo inicial. (1 punto)**
c) **Coordenadas del punto X donde la trayectoria del avión corta al Ecuador, justificando si el avión atraviesa el ecuador antes o después de su paso por el meridiano de Greenwich y representar gráficamente el triángulo esférico empleado. (2 puntos)**

Fecha de **publicación de calificaciones: martes 9** de marzo

Revisión **de la prueba** en el horario de tutorías del profesor.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Superficie de un triángulo esférico.

$$S = \frac{\pi\, r^2}{180^o}\left(\alpha+\beta+\gamma-180^o\right)$$; r=radio de la esfera y α, β, γ=ángulos del triángulo esférico

En un triángulo esférico, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

Teorema del seno (1º grupo de Bessel)

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

Teorema del coseno para lados (2º grupo de Bessel)

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } b \cdot \text{sen } c \cdot \cos A$

$\cos b = \cos a \;\cos c + \text{sen } a \cdot \text{sen } c \;\cos B$

$\cos c = \cos a \;\cos b + \text{sen } a \;\text{sen } b \;\cos C$

Teorema de la cotangente (3º grupo de Bessel)

$\text{cotg } a \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \text{cotg } A$

$\text{cotg } a \cdot \text{sen } c = \cos c \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \text{cotg } A$

$\text{cotg } b \cdot \text{sen } a = \cos a \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \text{cotg } B$

$\text{cotg } b \cdot \text{sen } c = \cos c \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{cotg } B$

$\text{cotg } c \cdot \text{sen } a = \cos a \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \text{cotg } C$

$\text{cotg } c \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos A + \text{sen } A \cdot \text{cotg } C$

Teorema del coseno para ángulos (4º grupo de Bessel)

$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \text{sen } B \cdot \text{sen } C \cdot \cos a$

$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \text{sen } A \cdot \text{sen } C \cdot \cos b$

$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \text{sen } A \cdot \text{sen } B \cdot \cos c$

Analogías de Neper

$$\text{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot \text{cotg}\frac{C}{2};\quad \text{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\text{sen}\frac{a-b}{2}}{\text{sen}\frac{a+b}{2}}\cdot \text{cotg}\frac{C}{2};$$

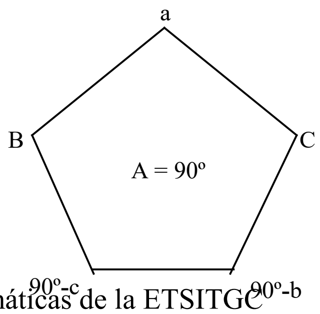
$$\text{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot \text{tg}\frac{c}{2};\quad \text{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\text{sen}\frac{A-B}{2}}{\text{sen}\frac{A+B}{2}}\cdot \text{tg}\frac{c}{2}$$

Regla de Neper de los elementos circulares

Puestos los elementos del triángulo esférico en los vértices de un pentágono y en el orden que indica la figura, el *coseno* de cada vértice es igual al ***producto:***

a) De los *senos* de los vértices *opuestos*.

b) De las *cotangentes* de los vértices *adyacentes*.



1.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos (son del mismo cuadrante).

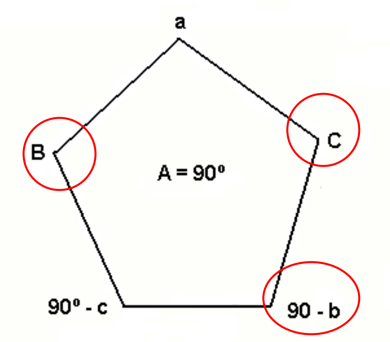
Solución:

Por el pentágono de Neper:

cosB = sen(90º-b) senC = cosb senC

$$\Rightarrow \text{senC} = \frac{\cos B}{\cos b} > 0 \Rightarrow \begin{cases} b < 90^{\circ} \text{ y } B<90^{\circ} \\ b>90^{\circ} \text{ y } B>90^{\circ} \end{cases}$$

b y B ambos agudos o ambos obtusos.

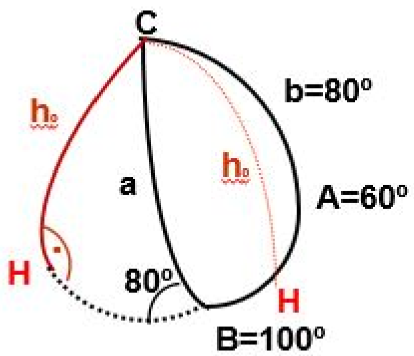


2.- Dado el triángulo esférico con A=60º, b=80º y B=100º, hallar la *altura* esférica sobre el lado "c" y decir si es interior o exterior al triángulo.

Solución:

$$\text{sen } h_c = \text{senb} \cdot \text{senA} = \text{sen}80^{\circ} \cdot \text{ sen}60^{\circ} \simeq 0.8528685319 \Rightarrow$$

$$h_c = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{58^{\circ}\ 31'\ 30''} < b \Leftrightarrow A < 90^{\circ} = H \\ \cancel{121}^{\circ}\ \cancel{28}'\ \cancel{30}'' \end{array} \right.$$



Ahora bien, por ser los dos ángulos A y B uno agudo y otro obtuso del triángulo esférico ABC, la altura esférica trazada desde C es **exterior**. Ya que en un triángulo esférico rectángulo un cateto y su ángulo opuesto tienen el mismo carácter.

3.- Un avión parte de un lugar A en el hemisferio sur hacia otro punto B en el hemisferio norte siguiendo un arco de circunferencia máxima, las coordenadas geográficas son:

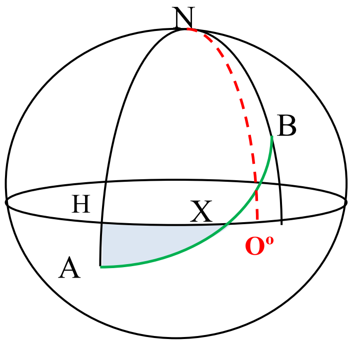
A (50º O, 20º S) , B (20º E, 30º N)

Considerando que el radio de la circunferencia de la trayectoria es R = 6380 km, se pide obtener:

a) La distancia entre las ciudades A y B, y representar gráficamente el triángulo sobre la esfera que se utiliza.
b) Rumbo inicial
c) Coordenadas del punto X donde la trayectoria del avión corta al Ecuador, justificando si el avión atraviesa el ecuador antes o después de su paso por el meridiano de Greenwich y representar gráficamente el triángulo esférico empleado.

Solución:

a) Dibujamos el triángulo sobre la esfera, la distancia entre A y B es el lado AB = n del triángulo esférico ABC. Aplicando el teorema del coseno



b=AN=90º + 20º = 110º (colatitud de A)

a=BN=90º -30º = 60º (colatitud de B)

$\hat{N}$ = 50º + 20º =70º (longitud A+ longitud de B)

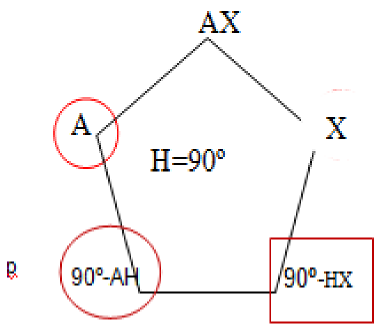
n = AB

$\cos n = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos N = \cos 60º \cdot \cos 110º + \operatorname{sen} 60º \cdot \operatorname{sen} 110º \cdot \cos 70º$ $= 0{,}107325128 \Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{n = 83º\ 50'\ 19.9''}}$

Su longitud en km, con R=6380km, es **d(A,B)**= $\dfrac{2\pi \cdot 6380}{360º} \cdot 83º\,50'19.9'' =$ **9335,625 km.**

b) $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos n}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} n} = 0{,}574470155 \Rightarrow$ **A= 54º 56' 14.9"**

c)



Ahora, podemos obtener HX en **el triángulo AHX** cos (90º-AH)=cotg A·cotg(90-HX) $\Rightarrow$ sen AH=cotg A·tgHX $\Rightarrow$ tgHX =senAH·tgA= sen 20º tg 54º 56' 14.9" = 0.487322612 $\Rightarrow$ **HX= 25º 58' 51.7"**

La longitud de A, que es el ángulo que forma el meridiano de A con el meridiano 0 (Greenwich) es de 50º Oeste y HX< 50º **luego la trayectoria del avión, que va de Oeste a Este, no** ha atravesado el meridiano 0, luego la longitud del punto X donde la trayectoria corta al Ecuador es en sentido Oeste con valor de 50º - 25º 58' 51.7" = 24 1' 8.3". **Coordenadas de X** $\boxed{\textbf{(24º 1' 8.3" Oeste, 0º N)}}$

1ª Prueba de Evaluación Continua Grupo B 3-III-2021

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1.-Definir los siguientes conceptos: ciclo, circunferencia menor, polos de un ciclo, distancia esférica de un punto a un ciclo, triángulo esférico, altura esférica.

(representar gráficamente cada concepto)

(1 punto)

2.-Demostrar el siguiente teorema para ángulos:

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos b$$

(1 punto)

3.- En los siguientes casos y sin hacer cálculos, indicar si estos triángulos son posibles, justificando la respuesta:

a) A=100º B=45º C=10º b) a=146º b=167º c=170º

c) A=90º, b=120º, B=60º a=120º d) a=50º b=30º A=100º B=120º

(1 punto)

4.- Resolver el siguiente triángulo esférico y calcular el área en una esfera de radio =2 metros, sabiendo que:

a = 64º 24’03’’, b = 42º 30’10’’, C = 58º 40’52’’

(2 puntos)

5.- Un avión parte del punto A y llega hasta el B, recorriendo un arco de *circunferencia máxima*. Las *coordenadas geográficas* de ambos puntos son:

$$A \equiv \begin{cases} \text{Longitud} = 55º48'10'' \text{ E} \\ \text{Latitud} = 55º45'13'' \text{ N} \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \text{Longitud} = 20º30'40'' \text{ O} \\ \text{Latitud} = 48º50'02'' \text{ N} \end{cases}$$

Calcular la *distancia* recorrida por el avión y el *rumbo* de A hacia B
Nota: Radio de la tierra R ≈ 6371 km.

(5 puntos)

Fecha de **publicación de calificaciones: viernes 12** de marzo
Revisión de la prueba **en el horario de tutorías de la profesor**a

SOLUCIONES EJERCICIOS PRIMERA PRUEBA EVALUACIÓN CONTINUA GRUPO B

4) Aplicando el teorema del coseno:

cos c = cos a cos b + sen a sen b cos C = 0,6352607851 ⇒ **c = 50º 33' 38"**

Y ahora, con este dato incorporado, aplicamos de nuevo el teorema del coseno para calcular A y B:

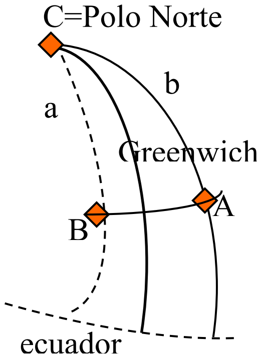
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{senb\ senc} = -0{,}06951358 \Rightarrow \boxed{A = 93^{o}\ 59'\ 9''}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{sena\ senc} = 0{,}6644274671 \Rightarrow \boxed{B = 48^{o}\ 21'\ 41''}$$

$$Comprobación: \frac{sena}{senA} = 0{,}904025; \quad \frac{senb}{senB} = 0{,}904025; \quad \frac{senc}{senC} = 0{,}904024$$

Área: 1.468054611 m^2

5)



En el triángulo esférico CAB:
Conocemos CA: (90º – Latitud de A).
b=90º-55º45'13''=34º14'47''
Conocemos CB: (90º – Latitud de B).
a=90º-48º50'02''=41º09'58''

Conocemos el ángulo C: C=55º48’10’’+20º30’40’’=76º18’50’’

Queremos calcular AB es decir c. Para ello aplicamos el teorema del coseno para lados.
cos c = cos b cos a + sen b sen a cos C
cos c = 0,7099315253 de donde c =0,78139535 rad, o bien, c=44º46’14’’
la distancia recorrida viene dada por
D = c(radianes) * R   siendo R el radio de la Tierra R=6371 km.
Obteniéndose **4978 km**

Ahora se calcula el rumbo: queremos calcular CAB. Para ello aplicamos el teorema del seno.
senA=sena.senC/senc= 0,9081086654, luego A será **65º 50’ 06’’**, o bien, 14º 09’ 54’’
o bien,
Por el teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = 0{,}4187345838.$$

A = 65º 50’ 06’’

El rumbo inicial de A a B será: 360º-A=294º 09’ 54’’