**1ª Prueba de Evaluación Progresiva** **Grupo 1** **21-II-2023**

# TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

**Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.**

**1.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo se verifica que:**
**Un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.**

**(1 punto)**

**2.- Dado el triángulo esférico de ángulos A=100º, B = 90º y C = 80º, sobre una esfera de radio 1 km, se pide:**

a) **El área del triángulo esférico. (0,5 puntos)**
b) **Resolverlo. (1,5 puntos)**
c) **Distancia esférica del vértice A al vértice C. (0,5 puntos)**
d) **Distancia esférica del vértice C a la circunferencia máxima en la que se encuentra el lado c. (0,5 puntos)**
e) **La mediana esférica sobre el lado b. (0,5 puntos)**

**3.- Se conocen las coordenadas geográficas de las dos ciudades siguientes:**

**Ciudad A: Granada** $\begin{cases} \text{Longitud} = 3^\circ\, 35'\, 54''\ \text{O} \\ \text{Latitud} = 37^\circ 10'\, 34''\ \text{N} \end{cases}$

**Ciudad B: La Meca** $\begin{cases} \text{Longitud} = 39^\circ 49' 32''\ \ \text{E} \\ \text{Latitud} = 21^\circ 25' 36''\ \text{N} \end{cases}$

**a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km. (1 punto)**
**b) Establecer el rumbo desde Granada hacia La Meca. (1 punto)**
**c) Si un avión se dirige de Granada a La Meca siguiendo un círculo máximo. Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich. (1,5 puntos)**

**Nota:**

**Expresar los resultados en grados, minutos y segundos.**

Fecha de **publicación de calificaciones: lunes 27** de febrero de 2023.
**Revisión** de la prueba**: solicitarlo vía correo electrónico: luis.sebastian@upm.es**

**1.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo se verifica que:**

**Un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.**

***Demostración:***

Por el pentágono de Neper:

$$\cos B = \operatorname{sen}(90^\circ - b)\operatorname{sen}C = \cos b \operatorname{sen} C \Rightarrow \operatorname{sen}C = \frac{\cos B}{\cos b} > 0 \Rightarrow \begin{cases} b < 90^\circ \text{ y } B < 90^\circ \\ b > 90^\circ \text{ y } B > 90^\circ \end{cases}$$

b y B ambos agudos o ambos obtusos.

**2.- Dado el triángulo esférico de ángulos A=100º, B = 90º y C = 80º, sobre una esfera de radio 1 km, se pide:**
**a) El área del triángulo esférico.**
**b) Resolverlo.**
**c) Distancia esférica del vértice A al vértice C.**
**d) Distancia esférica del vértice C a la circunferencia máxima en la que se encuentra el lado c.**
**e) La mediana esférica sobre el lado b.**

***Solución:***

**a)** El exceso esférico es $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 90$”

$$\textbf{El área es } S = \frac{\pi 1^2}{180^\circ}(90^\circ) = \frac{\pi}{2} \approx \boxed{1{,}570796326 \text{km}^2}$$

**b)** El triángulo se resuelve mediante el teorema del coseno para los ángulos, obteniéndose: a = 100º09’21,2’’; b = 91º 46’ 54,05’’; c= 79º 50’38,8’’.

**c)** La distancia pedida es la longitud del lado b:

$$L_b = \frac{\pi\, r}{180^\circ} b = \frac{\pi\, 1}{180^\circ}(91^\circ\ 46'\ 54{,}05'') \simeq \boxed{1{,}601892518 \text{ km}}$$

**d)** La distancia pedida en este apartado es la medida de la altura esférica sobre el lado c:

Luego al ser B = 90º 00’ 00” = 90º=H a ángulos iguales se oponen lados iguales, deducimos que la altura sobre el lado *c* es el lado a en triángulo ABC. Con el triángulo esférico AHC se tiene que H<90º<100º=A, luego b<h

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}B \operatorname{sen}a = \operatorname{sen}a \Rightarrow h = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{100^\circ\ 09'\ 21{,}2'' = a} \\ \cancel{79^\circ\ 50'\ 38{,}8''} > b \end{array} \right.$$

. Hay que pasar ahora de grados a km:

Sobre la esfera de radio r =1, resulta $d(C,c) = \dfrac{\pi\, r}{180^\circ} h = \dfrac{\pi\, 1}{180^\circ}(100^\circ 09'\ 21{,}2'') \cong$

$\boxed{1{,}748050026 \text{ km}}$

**e)** Mediana esférica sobre el lado b:

$$\cos m = \cos c \cdot \cos(b/2) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(b/2) \cdot \cos A = 0 \Rightarrow \boxed{m = 90^\circ}$$

**3.- Se conocen las coordenadas geográficas de las dos ciudades siguientes:**

$$\textbf{Ciudad A: Granada} \begin{cases} \textbf{Longitud} = 3^\circ\ 35'\ 54''\ \text{O} \\ \textbf{Latitud} = 37^\circ 10'\ 34''\ \text{N} \end{cases}$$

**Ciudad B: La Meca** $\begin{cases} \textbf{Longitud} = 39°49'32'' \ \textbf{E} \\ \textbf{Latitud} = 21°25'36'' \ \textbf{N} \end{cases}$

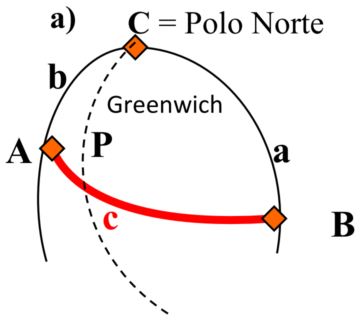
**a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km.**

**b) Establecer el rumbo desde Granada hacia La Meca.**

**c) Si un avión se dirige de Granada a La Meca siguiendo un círculo máximo. Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich.**

***Solución:***

**a)**




En el triángulo esférico ABC:

Conocemos CA: (90º – Latitud de A): b = 90º - 37º 10’ 34’’= 52º 49’ 26’’

Conocemos CB: (90º - Latitud de B): a=90º - 21º 25’ 36’’= 68º 34’ 24’’

Conocemos el ángulo C = $3^{\circ}\, 35'\, 54'' + 39°49'32'' = 43^{\circ}\, 25'\, 26''$

Queremos calcular AB es decir c. Para ello aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABC: cosc= cosa cosb + sena senb cosC= 0.7594422027, obteniéndose: c = 0.7083410329 radianes.

Pasando esta medida del lado c a unidades lineales, la distancia entre ambas ciudades es: $L = R \cdot c = 6371 \cdot 0{,}7083410329 = 4512{,}840720 \approx$ **4512,84 km**.

**b)** El rumbo para ir de A a B es el ángulo A en el triángulo esférico ACB

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} = -0.1805591228 \Rightarrow \boxed{A = 100^{\circ}\, 24'\, 08''}$$

**c)** Ahora del triángulo APC’ conocemos:

b= 90º - 37º 10’ 34’’= 52º 49’ 26’’; A= 100º 24’ 08”; C’ = 3º 35' 54"

cosP=-cosAcosC’+senAsenC’cosb= 0.2175045281, luego P=77º26’15’’

$$\cos \widehat{CP} = \frac{\cos A + \cos P \cdot \cos C'}{\operatorname{sen} P \cdot \operatorname{sen} C'} \approx 0.5961025586 \Rightarrow \widehat{CP} = 53^{\circ}\, 24'31''$$

El punto P tiene por coordenadas:

longitud 0º; latitud $90^{\circ} - \widehat{CP} = 90^{\circ} - 53^{\circ}\, 24'31'' =$ **36º35’29’’**Norte

**1ª Prueba de Evaluación Progresiva     Grupo 2     23-II-2023**

**TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA**

**Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.**

1.- Definir los siguientes conceptos: ciclo, circunferencia menor, distancia esférica, ángulo entre dos ciclos, polos de un ciclo, triángulo esférico y triángulo polar. Representar gráficamente cada uno de ellos. **(1 punto)**

2.- Demostrar el siguiente teorema:

$$\mathbf{\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C \cos b}$$

**(1 punto)**

3.- Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo se verifica que:
Un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.
**(1 punto)**

4.- Resolver el triángulo esférico de que se conocen los datos:

a=76º00’00’’; A=70º00’00’’; B=119º00’00’’

Calcular también el área en una esfera de radio=100 metros

**(2.5 puntos)**

5.- Un avión parte del punto A y llega hasta el B, recorriendo un arco de circunferencia máxima. Las coordenadas geográficas de ambos puntos son:

$$A \equiv \begin{cases} \text{Longitud} = 55°48'10'' \text{ E} \\ \text{Latitud} = 55°45'13'' \text{ N} \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \text{Longitud} = 20°30'40'' \text{ O} \\ \text{Latitud} = 48°50'02'' \text{ N} \end{cases}$$

Calcular la distancia recorrida por el avión y el rumbo de A a B.

Nota: Radio de la tierra R 6371 km.

**(2.5 puntos)**

6.- Resolver el triángulo esférico rectángulo (A = 90º), sabiendo que:

a = 143º 21’ 58’’y b = 167º 03’ 38’’.

**(2 puntos)**

## Nota:

## Expresar los resultados en grados, minutos y segundos.

**3.- *Solución***:

Por el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen a}}{\text{sen A}}=\frac{\text{sen b}}{\text{sen B}}\Rightarrow \text{sen b}=\text{senB}\frac{\text{sen a}}{\text{sen A}}=0{,}9031035\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{b=\cancel{64^o\,34'\,08''}}\\ \boxed{\mathbf{b=115^o\,25'\,52''}}\mathbf{>a\Leftrightarrow B>A}\end{cases}$$

Aplicando las analogías de Neper:

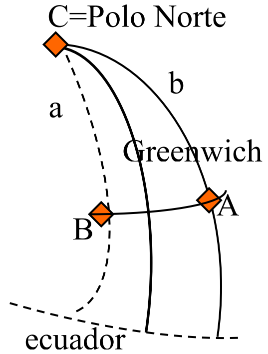
$$\text{tg}\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\text{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos(94^o30')}{\cos(-24^o30')}\text{tg}(95^o42'56'')=0{,}86151311,\ \boxed{\mathbf{c=81^o\ \ 29'\,26''}}$$

y luego teorema del coseno para obtener $C$ ó bien:

$$\text{tg}\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\text{tg}\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos(-19^o42'55'')}{\cos(95^o42'56'')\text{tg}(94^o30')}=0{,}743969\Rightarrow\boxed{\mathbf{C=73^o\ 17'\ 46''}}$$

Área=10000*(exceso esférico en radianes)

***5.-Solución***:




En el triángulo esférico CAB:
Conocemos CA: (90º – Latitud de A).
b=90º-55º45’13’’=34º14’47’’
Conocemos CB: (90º – Latitud de B).
a=90º-48º50’02’’=41º09’58’’

Conocemos el ángulo C: C=55º48’10’’+20º30’40’’=76º18’50’’

Queremos calcular AB es decir c. Para ello aplicamos el teorema del coseno para lados.
cos c = cos b cos a + sen b sen a cos C
cos c = 0,7099315253 de donde c =0,78139535 rad, o bien, c=44º46’14’’
la distancia recorrida viene dada por

D = c(radianes) * R    siendo R el radio de la Tierra R=6371 km.  Obteniéndose **4978 km**

Ahora se calcula el rumbo: queremos calcular CAB. Para ello aplicamos el teorema del seno.
senA=sena.senC/senc= 0,9081086654, luego A será **65º 50' 06''**, o bien, 14º 09' 54'' o bien,
Por el teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = 0{,}4187345838.$$

**A = 65º 50' 06''**

**El rumbo inicial de A a B será: 360º-A=294º 09' 54''**

***6.-Solución***:

Por el teorema del seno o bien utilizando el pentágono de Neper:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} 167^\circ 03'38'' \operatorname{sen} 90^\circ}{\operatorname{sen} 143^\circ 21'58''} = 0{,}375266076 \Rightarrow$$

B=22º02'27''  no válido pues B>A pues b>a

B=157º57'33''
cosa=sen(90º-b) sen(90º-c)=cosb cosc

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} = 0{,}823372356 \Rightarrow \boxed{c = 34^\circ 34'34''}$$

cosC=cotga cotg(90º-b)=tgb cotga

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} = 0{,}3089837 \Rightarrow \boxed{C = 72^\circ 00'07''}$$