3ª Prueba 23 mayo-2023

APLICACIÓN LINEAL, ESPACIO EUCLÍDEO Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1.- Sea T un movimiento de E_n, f su transformación ortogonal asociada, definida por la matriz ortogonal M respecto de cierta base ortonormal, y F el subespacio vectorial de vectores invariantes por f. Designaremos por ***F*** el subespacio afín de puntos invariantes por T.
Demostrar que: **"Si no hay puntos invariantes por T entonces existen vectores invariantes por f además del vector nulo". (1 PUNTO)**

2.- En el espacio vectorial R^3(R) se define la *aplicación lineal*:

f(x, y, z) = (3/7 x-2/7 y-6/7 z,-2/7 x+6/7 y-3/7 z,-6/7 x -3/7 y-2/7 z). Se pide:

a. Matriz de f respecto de la base canónica. (llamarla A)

b. Clasificar f.

c. Valores propios de f.

d. Vectores propios de f.

e. Base de vectores propios (si procede) de R^3

f. Matriz de f respecto de esta base de vectores propios. (llamarla D)

g. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio de vectores invariantes.

(3,5 PUNTOS)

3.- En el *espacio afín* real A^3, se consideran los puntos A = (1, 0, 1), B = (2, 0, 1), C = (2, 2, 1) y D = (4, 3, 1). Indicar si constituyen un sistema de referencia afín.

(0,5 PUNTOS)

4.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación geométrica de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

5.- Construir las ecuaciones de la Simetría Especular cuyo plano es: π: 2x+y+3z-4=0.

(1,5 PUNTOS)

Fecha de **publicación de calificaciones: JUEVES, 25 de mayo.**

Revisión de la prueba**: jueves, 25 de mayo de 12h a 12h 30 en el despacho nº 306.**

1.- Sea T un movimiento de E_n, f su transformación ortogonal asociada, definida por la matriz ortogonal M respecto de cierta base ortonormal, y F el subespacio vectorial de vectores invariantes por f. Designaremos por ***F*** el subespacio afín de puntos invariantes por T.
Demostrar que: **"Si no hay puntos invariantes por T entonces existen vectores invariantes por f además del vector nulo".**

Demostración:

En efecto, la ecuación de T es $X' = A' + f\left(\overrightarrow{AX}\right)$; Considerando $X' = X$

Se tiene que: $X = A' + M\overrightarrow{AX}$ =A'+MX-MA =(A'-MA)+MX.

$\Leftrightarrow$ MX-X=MA-A'. Entonces ***F*** es la solución de (M-I)X=MA-A', como $\boldsymbol{F} = \emptyset$, entonces rango(M-I) $\neq$ rango(M-I|MA-A') (sistema **incompatible**), luego r(I-M)<n;

ya que si rango (I-M)=n sería compatible determinado.

Por otro lado, los vectores invariantes forman F solución de la ecuación X=MX$\Leftrightarrow$

(M-I)X=$\vec{0}$ y como rango(M-I)<n , resulta que F$\neq\{\vec{0}\}$, luego **dimF**≥ 1.

(1 PUNTO)

2.- En el espacio vectorial R^3(R) se define la *aplicación lineal*:

f(x, y, z) = (3/7 x-2/7 y-6/7 z,-2/7 x+6/7 y-3/7 z,-6/7 x -3/7 y-2/7 z). Se pide:

a. Matriz de f respecto de la base canónica. (llamarla A)

b. Clasificar f.

c. Valores propios de f.

d. Vectores propios de f.

e. Base de vectores propios (si procede) de R^3

f. Matriz de f respecto de esta base de vectores propios. (llamarla D)

g. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio de vectores invariantes.

Solución:

a) Las imágenes de los vectores de la base canónica forman la matriz A.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ f es $\boxed{\textbf{biyectiva}}$.

c) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{3}{7}-\lambda & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7}-\lambda & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \Rightarrow$

$\boxed{\begin{cases} \lambda=-1 \text{ simple} \\ \lambda=1 \text{ doble} \end{cases}}$.

Es diagonalizable en R por ser A simétrica.

d) Vectores propios: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{7}-\lambda & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7}-\lambda & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7}-1 & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7}-1 & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+y+3z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\dfrac{2\alpha+\beta}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{v}_1=(1,0,-2/3) \\ \vec{v}_2=(0,1,-1/3) \end{array}}$$

$$\text{Para } \lambda=-1 \begin{pmatrix} \frac{3}{7}+1 & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7}+1 & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3=(2,1,3)}$$

e) Base de vectores propios $\boxed{B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}}$.

f) $\boxed{D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

g) Subespacio de vectores invariantes: $\boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\dfrac{2\alpha+\beta}{3} \end{cases}}$

3.- En el *espacio afín* real A^3, se consideran los puntos A = (1, 0, 1), B = (2, 0, 1), C = (2, 2, 1) y D = (4, 3, 1). Indicar si constituyen un sistema de referencia afín.

Solución:

Los puntos {A, B, C, D} constituyen un sistema de referencia afín si son linealmente independientes, o lo que es equivalente si los son los vectores. Así $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Luego **no pueden ser un sistema de referencia afín**.

4.- Clasificar y hallar los elementos característicos de la transformación geométrica de ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz M = $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ asociada a la transformación no es una matriz escalar y por tanto la ecuación no corresponde a una homotecia. Para que sea un movimiento, la matriz M ha de ser ortogonal.

$MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego efectivamente M es ortogonal, luego es un **movimiento**

$|M| = 1$. En consecuencia, el MOVIMIENTO es **DIRECTO**

Para calcular los puntos invariantes resolvemos la ecuación $\bar{X} = N\bar{X}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Luego el único punto invariante es el punto } \mathbf{C}(1,1)$$

Se trata de una **ROTACIÓN DE CENTRO (1,1)**

Por ser $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, el ángulo α es el que verifica que:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\alpha=-\frac{\pi}{4}}$$

5.- Construir las ecuaciones de la Simetría Especular cuyo plano es: *π*: 2x+y+3z-4=0.

Ecuación de la simetría especular:

En el sistema de referencia R’ definido por $R'\equiv\{A,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ siendo

$$A(2,0,0);\ \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3),\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,-3,1),\vec{u}_3=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{35}}(5,-1,-3)$$

la ecuación de la simetría es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Se pasa al sistema de referencia R definido por

$R\equiv\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ siendo $O(0,0,0),\ \vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_2=(0,1,0),\vec{e}_3=(0,0,1)$

La matriz del cambio de base es $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BSB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en R}$$

La ecuación con el punto A (2,0,0) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

ETSI de Topografía, Geodesia y Cartografía

3ª Prueba **18 mayo-2023** **TEMAS 4, 5 Y 6**

1.-Definir los siguientes conceptos: transformación geométrica, aplicación vectorial asociada y movimiento **(0.5 puntos)**

2.-Sea la *aplicación lineal* $f:R^4 \rightarrow R^4$ definida por

$f(x,y,z,t)=(x, 3x+3y, 5y+5z+7t, 0)$. Se pide:

a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*.

b) Calcular una *base* y las *ecuaciones implícitas* del *núcleo* y de la *imagen* de f.

c) Hallar el *polinomio característico* y los subespacios de *vectores propios* de f.

d) Obtener la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A y la matriz D *diagonal*.

(1.5 puntos)

3.- En el *espacio afín* ordinario, se consideran las *referencias R y R'*:

$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$, donde $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$, $\vec{u}'=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}'=\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}'=\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$.

a) Hallar las ecuaciones del *cambio de referencia* de R a R´.

b) De igual forma, de R´ a R.

c) Demostrar que existe un único punto del espacio que tiene las mismas *coordenadas* respecto a las dos *referencias*.

d) Si P=(1,2,0) en R, hallar las *coordenadas* de P en R´. **(2 puntos)**

4.-Dada la matriz N, estudiar si es un movimiento del plano y en su caso, clasificarlo y encontrar los elementos característicos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{3}-\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

5.- Construir las ecuaciones y la matriz N de la Simetría Especular cuyo plano es: **4x+3z=1**

(2 puntos)

2.- *Solución*:

a) Primeramente buscamos las imágenes de la base canónica de R^4 mediante la aplicación lineal f

f(1,0,0,0)=(1,3,0,0)

f(0,1,0,0)=(0,3,5,0)

f(0,0,1,0)=(0,0,5,0)

f(0,0,0,1)=(0,0,7,0)

Así, la matriz que define f respecto de la base canónica es:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ecuación matricial: AX=X'

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$$

Unas ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\y=6\lambda\\z=-5\lambda+7\mu\\t=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ Unas cartesianas: $\boxed{\left.\begin{array}{l}y=6x\\t=0\end{array}\right\}}$

b)

Ecuaciones del núcleo de f: AX=O

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\\5z+7t=0\end{array}\right\}}$$

Una base del N(f)= **{(0,0,1,-5/7)}**

Ecuaciones de la imagen de f:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Una base del subespacio **Im(f): {(1,3,0,0), (0,3,5,0), (0,0,5,0)}**

Y la ecuación implícita es **t=0**.

c)

Polinomio característico y valores propios:

$$|A-\lambda I| = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

Vectores propios:

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 5** es el generador por el vector propio **(0,0,1,0)**.

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{2}{5}z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 3** es el generador por el vector propio **(0,2,-5,0)**.

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{8}{15}z = 0 \\ y + \frac{4}{5}z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 1** es el generador por el vector propio **(8,-12,15,0)**.

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z+\dfrac{7}{5}t=0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 0** es el generador por el vector propio **(0,0,7,-5)**.

d)

Una base de R^4 formada por vectores propios puede ser:

{(0,0,1,0), (0,2,-5,0), (8,-12,15,0), (0,0,7,-5)}.

La matriz P cambio de base: $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 \\ 1 & -5 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$

La matriz D diagonal semejante a A es: $\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3.- *Solución*:

b) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Si X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX}=(x,y,z)$ y $\overrightarrow{O'X}=(x',y',z')$ respecto de R y R' respectivamente, luego $\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'X}=\overrightarrow{OX'}$.

Entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+P.[X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ a la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-4} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

a) Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

De las ecuaciones del apartado b) despejando (x',y',z') obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-4} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-4} -11 & 5/2 & 2 & 3/2 \\ -7 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

c) Si un punto X tiene las mismas coordenadas respecto a las dos referencias significa que: x=x'; y=y'; z=z'. Y de las ecuaciones del cambio de sistema de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{33}{13} \\ y = \dfrac{28}{13} \\ z = \dfrac{25}{13} \end{cases}}$$

d) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo x=1; y=2; z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-4} -11 & 5/2 & 2 & 3/2 \\ -7 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{9}{2} \\ -3 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P = \left(-\frac{9}{2}, -3, -\frac{3}{2}\right)}$$

4.- solución

Es un Giro en el plano de Centro(1,-2) y ángulo 150 grados sexagesimales

5.-solución

Ecuación de la simetría especular:
En el sistema de referencia R' definido por $R' \equiv \{A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ siendo

$A(1,0,-1) \in$ plano, $\vec{u}_1 = \frac{1}{5}(4,0,3) \perp \vec{u}_2 = \frac{1}{5}(3,0,-4), \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (0,1,0)$ la ecuación de la simetría

es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Se pasa al sistema de referencia R definido por
$R \equiv \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ siendo $O(0,0,0), \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$

La matriz del cambio de base es $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = BSB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en R}$$

La ecuación con el punto A (1,0,-1) invariante será:

$$X' = A + M\overline{AX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} \\ 0 \\ \frac{6}{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{25} & -\frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{25} & -\frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$