3ª Prueba 29 mayo-2020

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1.- Se pide:
a) La ecuación del giro G de centro (1,1) y ángulo $\alpha=\pi$. (1 PUNTO)
b) La ecuación de la simetría axial S de eje r: y=x-2. (1 PUNTO)
c) La ecuación de la homotecia H de centro (0, 1) y razón k=3. (1 PUNTO)
d) Demostrar que estas ecuaciones representan una SEMEJANZA en el plano y obtener sus elementos según la descomposición canónica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ **(1 PUNTO)**

Solución:

a) La ecuación del giro de centro C y ángulo α:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 180^{o} & -\text{sen}180^{o} \\ \text{sen}180^{o} & \cos 180^{o} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}}$$

b) Ecuación de la simetría axial:

Pendiente del eje es m=1, por tanto:

Tg(alfa/2)=1 , entonces alfa=pi/2

La matriz M es:

$$M=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ tomamos un punto que pertenezca al eje:

A(2,0)

Las ecuaciones quedan:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

c) Ecuación de la Homotecia

$$X' = A + k\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}}$$

d) Clasificar esta transformación en el plano y calcular sus elementos característicos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

Hacemos $M \cdot M^{t}$ y comprobamos que no es la Identidad (es proporcional a una matriz ortogonal), por tanto no es Movimiento.

$|M| = -4 < 0$, la semejanza es inversa y como $-(k^2)= -4$ **k=2**

La descomposición canónica: S(C,k) = S_e oH(C,k)

Simetría axial de eje e (luego lo calculamos) por una Homotecia del mismo centro y razón k

Calculamos el Centro (punto invariante):

$$C = \left(\frac{-4-2\sqrt{3}}{3}, \frac{4-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Eje de la Simetría Axial: su vector director se calcula obteniendo los vectores invariantes por Q=(1/k)M

Q[x;y]=[x;y]

En Paramétricas:

$$x = \lambda; y = \lambda(\sqrt{3}-2)$$

Por tanto, la ecuación del eje pasa por C, entonces las ecuaciones del eje e quedan:

$$x = x_c + \lambda; y = y_c + \lambda(\sqrt{3}-2)$$

1.- Se pide:

a) La ecuación del giro G de centro (0,1) y ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ **.** **(1 PUNTO)**

b) La ecuación de la simetría axial S de eje r: 2x+y-4=0. **(2 PUNTOS)**

c) La ecuación de la homotecia H de centro (1, 1) y razón k=7. **(1 PUNTO)**

Solución:

a) La ecuación del giro de centro C y ángulo α:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 90^o & -\operatorname{sen}90^o \\ \operatorname{sen}90^o & \cos 90^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Ecuación de la simetría axial:

En el sistema de referencia R' definido por $R' \equiv \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ siendo

$$A(1,1);\ \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1),\vec{u}_2=\frac{1}{5}(1,-2)$$

la ecuación de la simetría es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Se pasa al sistema de referencia R definido por

$R \equiv \{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ siendo $O(0,0,0),\ \vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_2=(0,1,0)$

La matriz del cambio de base es $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BSB^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ en R

Otra forma de llegar a la misma matriz es considerar la pendiente del eje de simetría:

$$2x+y-4=0 \Rightarrow y=-2x+4 \Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-2 \Rightarrow \alpha = \text{-2,214297435}\ \textbf{\textit{rad}} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

La ecuación con el punto A (2,0) invariante será:

$$X' = A + M\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

c) Ecuación de la Homotecia

$$X' = A + k\overrightarrow{AX} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}}$$

2.- Demostrar que la siguiente transformación en el espacio es una SEMEJANZA, clasificarla y obtener sus elementos característicos según la descomposición canónica.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(4 PUNTOS)

Solución:

Es una Semejanza Directa, pues MM^t no es la Identidad (es proporcional a una matriz ortogonal) y el det(M)=27>0

Razón = $\boxed{k=3}$

Centro: Punto Invariante NX=X **C(-15/26, -21/26, -36/26)**

Descomposición Canónica: S(C,k) = G(e,α) o H(C,k)

Amplitud: Traza(M)=1+2cosα=0 $\Rightarrow \boxed{\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}}$.

El eje de la semejanza pasa por el Centro y tiene como vector director un vector invariante por Q=(1/k)M

QX=X obtenemos: (λ, -λ, -λ)

Un vector director puede ser: (1,-1,-1)

Eje e:

x= -15/26+ λ

y=-21/26 -λ

z= -36/26 -λ

2.- a) Clasificar la siguiente transformación geométrica

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ **(1 PUNTO)**

b) Obtener sus elementos característicos según la descomposición canónica.

(3 PUNTOS)

Solución:

a) Si $M \cdot M^t = k^2 \cdot I_n$, es decir, si el producto es una matriz escalar, entonces la ecuación corresponde a una semejanza cuya razón es k y la matriz $Q = \frac{1}{k}$ M es la matriz ortogonal asociada al movimiento.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$$

Si $|M| = |kQ| > 0$, la semejanza es directa

$|M|=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=27\neq\pm1$ no es un movimiento, tampoco una homotecia, ya que la matriz no es escalar, la ecuación del enunciado corresponde a la ecuación de una **semejanza directa de razón** $k=\left|\sqrt[3]{27}\right|=\sqrt{9}=3$.

b) Calculamos la matriz $Q=\frac{1}{k}M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Cálculo de los elementos característicos de la semejanza directa:

- **Razón de la semejanza:** es el número real positivo k tal que $k^3 = \det(M)$, es decir, k tal que $M\cdot M^t = k^2\cdot I_3$.

Ya calculada k=3.

- **Centro de semejanza: es el punto doble obtenido al resolver** $N\bar{X}=\bar{X}$.

El centro de esta semejanza es el único punto doble:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 12\\ 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\Rightarrow \boxed{C(1,\ 2,\ 3)}\\ z=3\end{cases}.$$

- **Eje de la semejanza:** el eje e pasa por el centro de la semejanza C y su vector director se obtiene resolviendo el sistema $Q\,X = X \Leftrightarrow (Q-I)\,X=0$

La matriz ortogonal del giro que compone esta semejanza es la matriz $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, obtenida anteriormente.

El eje de giro es la recta que pasa por C y tiene como vector dirección, un vector invariante por Q.

$$QX = X \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

y una solución particular del sistema anterior es, $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Así pues, la ecuación del eje de giro en forma paramétricas es:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}} \text{; se puede escribir } \boxed{\begin{cases} x - z = -2 \\ y + z = 5 \end{cases}}$$

- **Ángulo de la semejanza:** coincide con el ángulo α de la matriz Q del giro y se calcula igualando la traza de la matriz dada con la traza de la matriz definición del giro, es decir:

$$\text{Traza Q=Traza}\left(\frac{1}{k}M\right) = \text{Traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1 + 2\cos\alpha$$

El ángulo α de la semejanza es solución de la ecuación:

$1 + 2\cos\alpha = \text{traza}(Q) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow \Rightarrow \cos\alpha = -1$ y por tanto, $\boxed{\alpha = \pm 180^o}$. Se trata de una simetría axial.

1ª Prueba 29-mayo-2020

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

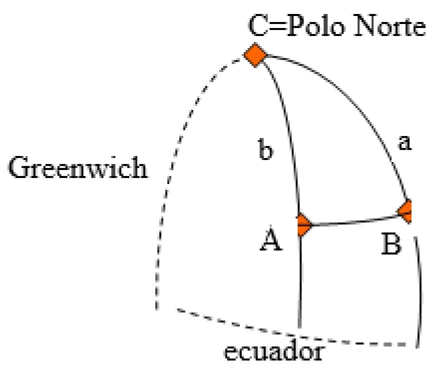
3.- Un avión parte del punto A y llega hasta el B recorriendo un arco de circunferencia máxima. Las coordenadas geográficas de ambos puntos son:

A: $\begin{cases} \text{Longitud} = 20^\circ 30' 40''\ \text{E} \\ \text{Latitud} = 48^\circ 50' 02''\ \text{N} \end{cases}$; **B:** $\begin{cases} \text{Longitud} = 55^\circ 48' 10''\text{E} \\ \text{Latitud} = 55^\circ 45' 13''\text{N} \end{cases}$

a) Calcular la distancia recorrida por el avión, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km. (4 puntos)

b) Establecer el rumbo (ángulo CAB, siendo C el polo más próximo a A). **(4 puntos)**

Solución:



a) En el triángulo esférico CAB: Conocemos CB (90º – Latitud de B). a=90º-55º45'13''=34º14'47''

Conocemos CA: (90º – Latitud de A). b=90º-48º50'02''=41º09'58''

Conocemos el ángulo C: C=55º48'10''-20º30'40''=35º17'30''

Queremos calcular AB es decir c. Para ello aplicamos el teorema del coseno para lados.

cos c = cos b cos a + sen b sen a cos C

cos c = 0,924639118 de donde c =22º23'10'' la distancia recorrida viene dada por

D = c (radianes) * R siendo R el radio de la Tierra R=6371 km.

Obteniéndose **2489 km**

b) Ahora se calcula el rumbo. Para calcular A aplicamos el teorema del coseno:

cos a = cosb cosc + senb senc cos A

$\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\text{sen}b \cdot \text{sen}c}$ = 0,5207778773, por tanto A = 58º36'56''.

El rumbo es: A = $\boxed{58º36'56''}$

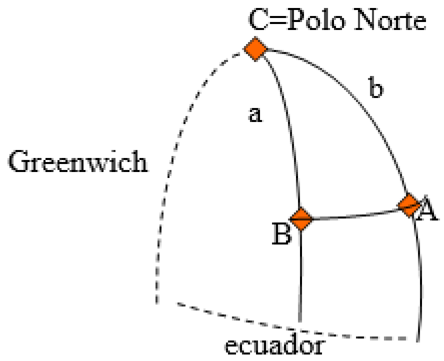
3.- Un navío parte del punto A y llega hasta el B recorriendo un arco de circunferencia máxima. Las coordenadas geográficas de ambos puntos son:

A: $\begin{cases} \text{Longitud} = 55^\circ 48'10"E \\ \text{Latitud} = 55^\circ 45'13"N \end{cases}$; **B:** $\begin{cases} \text{Longitud} = 20^\circ 30'40" \text{ E} \\ \text{Latitud} = 48^\circ 50'02" \text{ N} \end{cases}$

a) Calcular la distancia recorrida por el navío, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km. (4 puntos)

b) Establecer el rumbo (ángulo CAB, siendo C el polo más próximo a A). **(4 puntos)**

Solución:



a) En el triángulo esférico CAB: Conocemos CA: (90º – Latitud de A). b=90º-55º45'13''=34º14'47''

Conocemos CB: (90º – Latitud de B). a=90º-48º50'02''=41º09'58''

Conocemos el ángulo C: C=55º48'10''-20º30'40''=35º17'30''

Queremos calcular AB es decir c. Para ello aplicamos el teorema del coseno para lados.

cos c = cos b cos a + sen b sen a cos C

cos c = 0,924639118 de donde c =22º23'10'' la distancia recorrida viene dada por

D = c (radianes) * R siendo R el radio de la Tierra R=6371 km.

Obteniéndose **2489 km**

b) Ahora se calcula el rumbo. Para calcular A aplicamos el teorema del coseno:

cos a = cosb cosc + senb senc cos A

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\text{sen} b \cdot \text{senc}}$$ = -0,053774288, por tanto A = 86º55'02''.

El rumbo es: 360º - A = **266º 55' 02''**

2ª Prueba de Álgebra y Geometría   mayo-2020

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL, TRANSFORMACIONES LINEALES Y ESPACIO EUCLÍDEO

4.- Se consideran las bases de R^3

$$\begin{matrix} B=\{\vec{u}_1=(0,-2,1),\vec{u}_2=(1,-1,-1),\vec{u}_3=(2,0,-1)\} \\ B'=\{\vec{u}'_1=(1,0,-1),\vec{u}'_2=(3,0,-1),\vec{u}'_3=(2,1,1)\} \end{matrix}$$ **, se pide:**

a) Calcular la ecuación matricial del cambio de la base B' a la base B. (2 PUNTOS)

b) Dar las coordenadas del vector $\vec{u}'_2$ respecto de las bases B y B' respectivamente. (1 PUNTO)

c) ¿Existe algún vector que tenga las mismas coordenadas respecto de las dos bases B y B'? (1 PUNTO)

Solución:

a) Los datos nos permiten escribir directamente las ecuaciones de cambio de las bases B y B' a la base canónica B_C.

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B \quad y \quad \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

b) Las columnas de la última matriz son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B $\Rightarrow \vec{u}'_2 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)_B$

Respecto de la propia base B', $\vec{u}'_2 = (0,1,0)_{B'}$

c) El único vector que se expresa igual respecto de las dos bases es el vector nulo (0,0,0)

4.- Se consideran las bases de R^3

$$\begin{matrix} B=\{\vec{u}_1=(0,-2,1),\vec{u}_2=(1,-1,-1),\vec{u}_3=(2,0,-1)\} \\ B'=\{\vec{u}'_1=(1,0,-1),\vec{u}'_2=(3,0,-1),\vec{u}'_3=(2,1,1)\} \end{matrix}$$ **, se pide:**

a) Calcular la ecuación matricial del cambio de la base B a la base B'. (2 PUNTOS)

b) Dar las coordenadas del vector $\vec{u}_2$ respecto de las bases B y B' respectivamente. (1 PUNTO)

c) ¿Existe algún vector que tenga las mismas coordenadas respecto de las dos bases B y B'?
(1 PUNTO)

Solución:

a) Los datos nos permiten escribir directamente las ecuaciones de cambio de las bases B y B' a la base canónica B_C.

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$$

b) Respecto de la propia base B, $\vec{u}_2 = (0,1,0)_B$

Las columnas de la última matriz son las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B' $\Rightarrow \vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)_{B'}$

c) El único vector que se expresa igual respecto de las dos bases es el vector nulo (0,0,0)

5.- Sea f una transformación lineal de R^4 tal que: f (1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0); f (1, 0, -1, 1) = (1, 0, -1, 1); f (1, 0, 0, 4) = (-1, 0, 0,- 4); f (0, 1, 0, 0) = (0, 2, 0, 0).
a) A la vista de estas imágenes, sin efectuar ningún cálculo, decir quiénes son los valores propios de f, así como los subespacios propios asociados a cada valor propio. (0,5 PUNTOS)
b) ¿Es f biyectiva? (0,5 PUNTOS)
c) Hallar N(f). (0,5 PUNTOS)
d) Justificar si f es diagonalizable o no lo es. En caso afirmativo: (1 PUNTO)
i) Dar una base B de R^4 tal que la matriz asociada a f respecto de dicha base sea una matriz diagonal D.
ii) Escribir dicha matriz D y la matriz P que permite la diagonalización.
f) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica. (1 PUNTO)
g) Hallar f (0, 0, 1, 0). (0,5 PUNTOS)

Solución:

a) Valores propios de f: 1 (doble), -1 (simple), 2 (simple).

$V_{\lambda=1} = \langle (1,0,0,0),(1,0,-1,1) \rangle$, $V_{\lambda=-1} = \langle (1,0,0,4) \rangle$, $V_{\lambda=2} = \langle (0,1,0,0) \rangle$

b) f es biyectiva pues 0 no es valor propio de f.

c) $N(f) = \vec{0} = (0,0,0,0)$

d) f es diagonalizable pues se cumplen las dos condiciones para serlo:

1.- f tiene 4 valores propios reales, $\lambda = 1$ (doble), $\lambda = -1$ (simple) y $\lambda = 2$ (simple)

2.- dim $V_{\lambda=1} = 2$ (multiplicidad de $\lambda = 1$) , dim $V_{\lambda=-1} = 1$ (multiplicidad de λ = -1) y dim $V_{\lambda=2} = 1$ (multiplicidad de λ = 2).

i. La base B estará formada por vectores propios de f:
B = $\{(1,0,0,0),(1,0,-1,1),(1,0,0,4),(0,1,0,0)\}$

ii. Escribir dicha matriz D y la matriz P que permite la diagonalización.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Matriz A asociada a f respecto de la base canónica:

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado sin utilizar la matriz diagonal

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} \Rightarrow AP = P' \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = P'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

f) f (0, 0, 1, 0) = (-1/2, 0, 1, -2), por tratarse de la tercera columna de la matriz A ya que (0, 0, 1, 0, 0) es el tercer vector de la base canónica.

5.- Sea f una transformación lineal de R^4 tal que: f (1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0); f (1, 0, -1, 1) = (1, 0, -1, 1); f (1, 0, 0, 4) = (-1, 0, 0,- 4); f (0, 1, 0, 0) = (0, 3, 0, 0).
a) A la vista de estas imágenes, sin efectuar ningún cálculo, decir quiénes son los valores propios de f, así como los subespacios propios asociados a cada valor propio. (0,5 PUNTOS)
b) ¿Es f biyectiva? (0,5 PUNTOS)
c) Hallar N(f). (0,5 PUNTOS)
d) Justificar si f es diagonalizable o no lo es. En caso afirmativo: (1 PUNTO)
i) Dar una base B de R^4 tal que la matriz asociada a f respecto de dicha base sea una matriz diagonal D.
ii) Escribir dicha matriz D y la matriz P que permite la diagonalización.
f) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica. (1 PUNTO)
g) Hallar f (0, 0, 1, 0). (0,5 PUNTOS)

Solución:

a) Valores propios de f: 1 (doble), -1 (simple), 3 (simple).

$V_{\lambda=1} = \langle (1,0,0,0), (1,0,-1,1) \rangle$, $V_{\lambda=-1} = \langle (1,0,0,4) \rangle$, $V_{\lambda=3} = \langle (0,1,0,0) \rangle$

b) f es biyectiva pues 0 no es valor propio de f.

c) $N(f) = \vec{0} = (0,0,0,0)$

d) f es diagonalizable pues se cumplen las dos condiciones para serlo:

1.- f tiene 4 valores propios reales, λ = 1 (doble), λ = -1 (simple) y λ = 3 (simple)

2.- $\dim V_{\lambda=1} = 2$ (multiplicidad de $\lambda = 1$), $\dim V_{\lambda=-1} = 1$ (multiplicidad de λ = -1) y dim $V_{\lambda=3} = 1$ (multiplicidad de λ = 2).

iii. La base B estará formada por vectores propios de f:

$B = \{(1,0,0,0), (1,0,-1,1), (1,0,0,4), (0,1,0,0)\}$

iv. Escribir dicha matriz D y la matriz P que permite la diagonalización.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Matriz A asociada a f respecto de la base canónica:

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado sin utilizar la matriz diagonal

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} \Rightarrow AP = P' \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = P'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

f) f (0, 0, 1, 0,) = (-1/2, 0, 1, -2), por tratarse de la tercera columna de la matriz A ya que (0, 0, 1, 0) es el tercer vector de la base canónica.