Prueba de Evaluación Continua 5-abril-2022

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL y APLICACIONES LINEALES

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Demostrar que la expresión de cualquier vector de V respecto a una base de V es única.

(1 punto)

2.- En el espacio vectorial R^3, se consideran las bases:

$B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ **y** $B'=\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$**, tales que,** $\vec{u}'=\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{v}'=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{w}'=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

- **a) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B' a B.**
- **b) Si $\vec{a}=$ (1, 1, 1) respecto de B', hallar las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de B.**
- **c) Si x+y+z=0 respecto de B, ¿cuál es su expresión respecto de B'.**

(2 puntos)

3.- En R^3 se considera el subconjunto $E=\left\{(x,y,z)\in R^3 \text{ tales que } 2x-y+2z=0\right\}$**. Se pide:**

a) Unas ecuaciones paramétricas, una base y su dimensión del subespacio E.

$$F=\left\{(x,y,z)\in R^3 \text{ tales que } x=\beta+\gamma;\ y=2\alpha-2\beta+2\gamma;\ z=\alpha+3\gamma\right\}.$$

b) Unas ecuaciones cartesianas, una base y su dimensión del subespacio F.

c) Unas ecuaciones paramétrica, una base y su dimensión del subespacio $E\cap F$.

(2 puntos)

4.- Dada la transformación lineal f de R^3 definida por las imágenes de los vectores de la base canónica: $f(\vec{e}_1)=3\vec{e}_1+\vec{e}_2;\ \ f(\vec{e}_2)=-\vec{e}_1+\vec{e}_2; f(\vec{e}_3)=\vec{0}$**.Se pide:**

- **a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.**
- **b) ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva?**
- **c) Calcular los valores y los vectores propios de f.**
- **d) Razonar si f es diagonalizable o no. En caso afirmativo, hallar:**
  - **Una base B' de R^3 formada por vectores propios de f.**
  - **La matriz asociada a f respecto de esa base de vectores propios.**
  - **La relación que existe entre esta matriz y A.**
- **e) Hallar unas ecuaciones paramétricas y una base de el subespacio N(f).**
- **f) Hallar unas ecuaciones cartesianas y una base de el subespacio Im (f).**

(2 puntos)

5.- Sean las ecuaciones matriciales $Y=AX; Y'=A'X'; Y=PY'; X=PX'$**, donde A, A' y P son matrices cuadradas solamente P invertible y X,Y,X'Y' matrices columna. Demostrar que A y A' son matrices semejantes.**

(1 punto)

Fecha de **publicación de calificaciones: viernes, 8 de abril. Revisión** de la prueba**: martes, 19 de abril de 11:20 a 11.40h en el despacho 304**

1.- Demostrar que la expresión de cualquier vector de V respecto a una base de V es única.

Demostración:

Sea $B=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ una base del espacio vectorial V. Por ser B base es libre y sistema generador, por tanto, $\forall \vec{v}\in V$ existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ tales que $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_n\vec{e}_n$. Ahora si los escalares $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, no son únicos existirán otros $\mu_1,\dots,\mu_n\in K$ tales que $\vec{v}=\mu_1\vec{e}_1+\dots+\mu_n\vec{e}_n$ restando las dos expresiones del vector $\vec{v}$ queda $\vec{v}-\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_n\vec{e}_n-\mu_1\vec{e}_1-\dots-\mu_n\vec{e}_n$ $\vec{0}=(\lambda_1-\mu_1)\vec{e}_1+\dots+(\lambda_n-\mu_n)\vec{e}_n$. Utilizando que los vectores de B son linealmente independientes resulta: $0=\lambda_1-\mu_1=\dots=\lambda_n-\mu_n\Rightarrow\lambda_1=\mu_1;\dots;\lambda_n=\mu_n$.

2.- En el espacio vectorial R^3, se consideran las bases:
$B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ **y** $B'=\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$, **tales que,** $\vec{u}'=\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{v}'=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{w}'=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B' a B.
b) Si $\vec{a}=(1,1,1)$ respecto de B', hallar las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de B.
c) Si x+y+z=0 respecto de B, ¿cuál es su expresión respecto de B'.

Solución:
a) Ecuaciones del cambio de base de B' a B.
Supongamos que un vector tiene por coordenadas (x,y,z) y (x',y',z') respecto de B y B' respectivamente, se verifica:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Leftrightarrow[X]_B=P.[X]_{B'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de B' a B, siendo P la matriz del cambio de la base $B'=\{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'\}$ a la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

b) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de B' a B y sustituyendo x'=1; y'=1; z'=1, resulta:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{a}=(1,1,1)}$$

c)
Utilizando las ecuaciones del cambio de base de B' a B y sustituyendo x+y+z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z' \Rightarrow x + y + z = x' + y' + z' = 0; \boxed{x' + y' + z' = 0} \\ z = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

3.- En $\mathbb{R}^3$ se considera el subconjunto $E = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ tales que } 2x - y + 2z = 0\}$**. Se pide:**

a) Unas ecuaciones paramétricas, una base y su dimensión del subespacio E.
$F = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ tales que } x = \beta + \gamma;\ y = 2\alpha - 2\beta + 2\gamma;\ z = \alpha + 3\gamma\}$.

b) Unas ecuaciones cartesianas, una base y su dimensión del subespacio F.

c) Unas ecuaciones paramétrica, una base y su dimensión del subespacio $E \cap F$.

Solución:

a) Unas ecuaciones paramétricas son inmediatas $\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 2\beta \quad \alpha, \beta \in R \Rightarrow \\ z = \beta \end{cases}$

B_E={(1,2,0), (0,2,1)} y dim E = 2, pues $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

$$F = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ tales que } x = \beta + \gamma;\ y = 2\alpha - 2\beta + 2\gamma;\ z = \alpha + 3\gamma\}.$$

b) De las ecuaciones paramétricas de F: $\begin{cases} x = \beta + \gamma \\ y = 2\alpha - 2\beta + 2\gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in R \\ z = \alpha + 3\gamma \end{cases}$ $\Rightarrow$ obtenemos un sistema generador $\Rightarrow$ G={(0,2,1),(1,-2,0), (1,2,3)}.
Calculamos su rango para extraer una base.

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \text{ y} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{B_F = \{(0,2,1), (1,-2,0), (1,2,3)\}}$$

dim F = 3

No hay ecuaciones cartesianas de F, ya que coincide con el espacio vectorial R^3.

c) En este caso E: $E \subset F = R^3$

Unas ecuaciones paramétricas son inmediatas $\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha+2\beta \quad \alpha,\beta\in R \\ z=\beta \end{cases}$

Una base B_E={(1,2,0), (0,2,1)}} y dim $E\cap F$ = dim E=2

4.- Dada la transformación lineal f de R^3 definida por las imágenes de los vectores de la base canónica: $f(\vec{e}_1)=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$; $f(\vec{e}_2)=-\vec{e}_1+\vec{e}_2; f(\vec{e}_3)=\vec{0}$.Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.
b) ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva?

c) Calcular los valores y los vectores propios de f.
d) Razonar si f es diagonalizable o no. En caso afirmativo, hallar:
Una base B' de R^3 formada por vectores propios de f.
La matriz asociada a f respecto de esa base de vectores propios.
La relación que existe entre esta matriz y A.
e) Hallar unas ecuaciones paramétricas y una base de el subespacio N(f).
f) Hallar unas ecuaciones cartesianas y una base de el subespacio Im (f).

Solución

a) La matriz asociada o que define f se obtiene mediante las imágenes de los vectores de la base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1)=3\vec{e}_1+\vec{e}_2=(3,1,0) \\ f(\vec{e}_2)=-\vec{e}_1+\vec{e}_2=(-1,1,0) \Rightarrow A=M(f,B)=\boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ f(\vec{e}_3)=\vec{0}=(0,0,0) \end{cases}$$

b) La respuesta a todas las preguntas es NO, ya que |A|=0.

c) Valores propios:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)=-\lambda(\lambda-2)^2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda=2 \ (\text{doble}) \\ \lambda=0 \end{cases}}.$$

a) Vectores propios:

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 0 \\ 1 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \Rightarrow \vec{v}_1=(1,1,0) \\ z=0 \end{cases}}$

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-0 & -1 & 0 \\ 1 & 1-0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = (0,0,1) \\ z = \alpha \end{cases}}$$

d) **No, es diagonalizable**, ya que no es posible encontrar una base del espacio vectorial formada por vectores propios de f. La dimensión del subespacio propio asociada al valor propio 2 es 1 y no coincide con el orden de multiplicidad que es doble.

e) Ya tenemos el subespacio núcleo pues se corresponde con el subespacio propio asociado al valor propio nulo

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-0 & -1 & 0 \\ 1 & 1-0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = (0,0,1) \\ z = \alpha \end{cases}}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta \Rightarrow B = \{(3,1,0), (-1,1,0)\}}$$

La única ecuación cartesiana es **z=0**.

5.- Sean las ecuaciones matriciales $Y = AX; Y' = A'X'$; $Y = PY'; X = PX'$, **donde A, A' y P son matrices cuadradas solamente P invertible y X,Y,X'Y' matrices columna. Demostrar que A y A' son matrices semejantes.**

Solución:

$$\begin{array}{ccc} X_B & \xrightarrow{A} & Y_B \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ X'_{B'} & \xrightarrow{A'} & Y'_{B'} \end{array}$$

Por la propia definición de las matrices que intervienen en el esquema anterior, se verifica:

$$Y = AX \Rightarrow PY' = APX' \Rightarrow Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{A'}X'$$

Luego, la relación buscada es: $A' = P^{-1}A\,P$

Prueba de Evaluación Continua (2) 07/04/22

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL y APLICACIONES LINEALES

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Enunciar el cambio de base en una transformación lineal y demostrar que las matrices de transformación A y A' son semejantes.

(1 punto)

2. - Despejar X, simplificando lo más posible, en la siguiente ecuación matricial sabiendo que A y B son matrices cuadradas del mismo orden y que A es ortogonal:

$$\frac{1}{5}(X^t \cdot A^{-1})^t + (5B^{-1} \cdot A^t)^{-1} = (B^t \cdot A^{-1})^t$$

(1 punto)

3.- Sean los subespacios vectoriales:

$$E = \{(x, y, z, t) \in R^4 / \; x - y + t = 0\}$$

$$F = \{(0, \alpha, 0, \alpha) \in R^4 / \; \alpha \in R^4\}$$

a) Dimensión, base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de E, F y $E \cap F$.
b) ¿Es F suplementario de E? si no es así, identifica un subespacio suplementario de E.

(2 puntos)

4.- Sean las bases $B_1 = \{(1,1,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ y $B_2 = \{(0,0,1), (0,1,2), (1,2,0)\}$ en R^3

Obtener las expresiones analíticas del cambio de base de: $B_1 \rightarrow B_2$, $B_2 \rightarrow B_1$, $B_1 \rightarrow B_c$

(2 puntos)

5.- Sea f la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Dar una base y dimensión de Im(f) y N(f).
b) ¿Es f un isomorfismo? Justifique la respuesta
c) ¿Es f diagonalizable? Justifique la respuesta. En caso afirmativo, obtener la matriz de cambio de base.

(2 puntos)

SOLUCIÓN

2. - Despejar X, simplificando lo más posible, en la siguiente ecuación matricial sabiendo que A y B son matrices cuadradas del mismo orden y que A es ortogonal:

$$\frac{1}{5}\left(X^t\cdot A^{-1}\right)^t+\left(5B^{-1}\cdot A^t\right)^{-1}=\left(B^t\cdot A^{-1}\right)^t$$

Desarrollemos la ecuación matricial:

$$\frac{1}{5}(A^{-1})^t(X^t)^t+(A^t)^{-1}\frac{1}{5}(B^{-1})^{-1}=(A^{-1})^t(B^t)^t;$$

$$\frac{1}{5}(A^{-1})^tX+(A^t)^{-1}\frac{1}{5}B=(A^{-1})^tB;$$

$$Al\ ser\ A\ una\ matriz\ ortogonal, A^{-1}=A^t, por\ lo\ tanto, (A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$$

$$\frac{1}{5}X+\frac{1}{5}B=B;\qquad \frac{1}{5}X=\left(1-\frac{1}{5}\right)B;\quad \frac{1}{5}X=\frac{4}{5}B;\qquad \boldsymbol{X=4B}$$

3.- Sean los subespacios vectoriales:

$$\boldsymbol{E=\{(x,y,z,t)\in R^4/\ x-y+t=0\}}$$

$$\boldsymbol{F=\{(0,\alpha,0,\alpha)\in R^4/\ \alpha\in R^4\}}$$

a) Dimensión, base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de E, F y $E\cap F$.

<u>Subespacio E:</u>

$Num(Ec.Imp)=\dim(V)-\dim(E)$

$1=4-\dim(E)$, $\boldsymbol{dim(E)=3}$, $(son\ necesarios\ 3\ parámetros\ (\alpha,\beta,\gamma)$.

A partir de la ecuación implícita $\boldsymbol{x-y+t=0}$:

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{x=\alpha}\\ \boldsymbol{y=\alpha+\gamma}\\ \boldsymbol{z=\beta}\\ \boldsymbol{t=\gamma}\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{c}x=1\alpha+0\beta+0\gamma\\ y=1\alpha+0\beta+1\gamma\\ z=0\alpha+1\beta+0\gamma\\ t=0\alpha+0\beta+1\gamma\end{array}\rightarrow \boldsymbol{B_E=\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,1,0,1)\}}$$

<u>Subespacio F:</u>

Número de parámetros = 1; $\boldsymbol{dim(F)=1}$

A partir de las ecuaciones paramétricas $(\boldsymbol{0,\alpha,0,\alpha})$:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\alpha \\ z=0 \\ t=\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=0\alpha \\ y=1\alpha \\ z=0\alpha \\ t=1\alpha \end{array} \rightarrow \boldsymbol{B_F=\{(0,1,0,1)\}}$$

$$Num(Ec.Imp)=\dim(V)-\dim(E)=4-1=3$$

Se necesitan 3 ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\alpha \\ z=0 \\ t=\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix},$$ el rango de esta matriz debe ser 1, por lo tanto, los determinantes de las submatrices de orden 2 deben ser =0.

$$\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix}=0; \rightarrow \boldsymbol{x=0}, \quad \begin{vmatrix} y & 1 \\ z & 0 \end{vmatrix}=0; \rightarrow \boldsymbol{z=0}, \quad \begin{vmatrix} y & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix}=0; \rightarrow \boldsymbol{y-t=0}$$

<u>Subespacio $(E\cap F)$:</u>

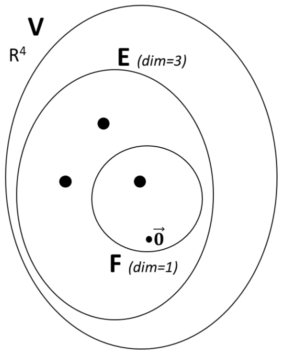
Ya puede observarse que la base de F está contenida en la base de E, luego el subespacio vectorial F(de dimensión 1) está contenido en el subespacio vectorial E (de dimensión 3). La intersección de los dos subespacios será igual al subespacio F.

$$\boldsymbol{B_{F\cap E}=\{(0,1,0,1)\}}$$

No obstante, procedemos a resolver el sistema de ecuaciones conjunto para conocer los vectores que cumplen las ecuaciones implícitas de ambos subespacios a la vez.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+t=0 \\ x=0 \\ z=0 \\ y-t=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ z=0 \\ y=t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=\alpha} \\ \boldsymbol{z=0} \\ \boldsymbol{t=\alpha} \end{array}\right\} \rightarrow \boldsymbol{B_{F\cap E}=\{(0,1,0,1)\}}\ \mathbf{dim}\ \boldsymbol{(F\cap E)=1}$$

Un esquema del caso sería:



b) ¿Es F suplementario de E? si no es así, identifica un subespacio suplementario de E.

No, ya que F está contenido en E.

La dim(E)=3, como la dimensión del espacio vectorial es 4, se necesita un subespacio vectorial G de dimensión 1, cuya base esté formada por un vector linealmente independiente de los tres vectores de la base de E.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow x - y + t \neq 0$$

Buscamos un vector que cumpla la desigualdad, por ejemplo:

$$\boldsymbol{B_G = \{(1,1,1,1)\}}$$

4.- Sean las bases $\boldsymbol{B_1 = \{(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}}$ y $\boldsymbol{B_2 = \{(0,0,1),(0,1,2),(1,2,0)\}}$ en R³

Obtener las expresiones analíticas del cambio de base de: $\boldsymbol{B_1 \rightarrow B_2}$, $\boldsymbol{B_2 \rightarrow B_1}$, $\boldsymbol{B_1 \rightarrow B_c}$

Las matrices de cambio de base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot V_{Bc} = B_1 V_{B1} = B_2 V_{B2}$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{pmatrix}$$

$B_1 \rightarrow B_2$

$$V_{B2} = {B_2}^{-1} B_1 V_{B1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{B2} = 2x_{B1} + y_{B1} - 2z_{B1}} \\ \boldsymbol{y_{B2} = -x_{B1} + 1z_{B1}} \\ \boldsymbol{z_{B2} = x_{B1}} \end{bmatrix}$$

$B_2 \rightarrow B_1$

$$\begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{B1} = z_{B2}} \\ \boldsymbol{y_{B1} = x_{B2} + 2y_{B2}} \\ \boldsymbol{z_{B1} = y_{B2} + z_{B2}} \end{bmatrix}$$

$B_1 \rightarrow B_c$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_c = x_{B1}} \\ \boldsymbol{y_c = x_{B1} + z_{B1}} \\ \boldsymbol{z_c = y_{B1}} \end{bmatrix}$$

5.- Sea f la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**. Se pide:**

a) Dar una base y dimensión de Im(f) y N(f)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el $r(A^t) = 2, necesitamos\ 2\ vectores\ linealmente\ independientes, por\ ejemplo$:

$$\boldsymbol{B_{im(f)} = \{(1, 2, 0), (3, 6, 0)\}, \mathbf{dim(Im(f)) = 2}}$$

$$Dim(E) = dim\big(im(f)\big) + dim\big(N(f)\big); \quad 3 = 2 + dim\big(N(f)\big); \quad dim(N(f)) = 1$$

El N(f) cumple que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\alpha, \frac{-1}{3}\alpha, \frac{2}{3}\alpha\right)$$

$$\boldsymbol{B_{N(f)} = \{(3, -1, 2)\} \quad dim\big(N(f)\big) = 1}$$

b) ¿Es f un isomorfismo? Justifique la respuesta

Para ser un isomorfismo, debe cumplir la propiedad inyectiva y sobreyectiva.

- La propiedad inyectiva no se cumple, ya que el núcleo tiene dimensión 1 y, por lo tanto, todos los vectores asociados a la base del núcleo tienen como imagen el vector (0,0,0).
- La propiedad sobreyectiva (o suprayectiva) tampoco la cumple, ya que la imagen de f tiene una dimensión menor al subespacio (dim(Im(f))=2<3).

Por lo tanto, no es un isomorfismo.

c) ¿Es f diagonalizable? Justifique la respuesta. En caso afirmativo, obtener la matriz de cambio de base.

Calculamos los valores propios de A.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 7 \end{cases}$$

Como tenemos 3 valores diferentes de λ, la matriz A es diagonalizable.

Por cada valor propio, obtenemos el subespacio vectorial correspondiente y la base de cada uno, mostrará los vectores propios asociados:

Para $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0\, I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\alpha, \frac{-1}{3}\alpha, \frac{2}{3}\alpha\right) \Rightarrow \vec{u}_1 = (3,-1,2)$$

Obsérvese que este vector, asociado a $\lambda = 0$, corresponde con un vector del núcleo (tiene como imagen el vector (0,0,0)).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$:

$$(A - 1\, I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0,\alpha) \Rightarrow \vec{u}_2 = (0,0,1)$$

Obsérvese que este vector, asociado a $\lambda = 1$, corresponde con un vector invariante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 7$:

$$(A - 7\, I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\alpha, 2\alpha, \frac{2}{3}\alpha\right) \Rightarrow \vec{u}_2 = (3,6,2)$$

Obsérvese que este vector, asociado a $\lambda = 7$, tiene como imagen un vector proporcional, 7 veces mayor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 42 \\ 14 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base está compuesta por los tres vectores propios:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hacemos la diagonalización y comprobamos el resultado:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Prueba de Evaluación Continua **7-abril-2022**

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL y APLICACIONES LINEALES

Nota: Se recuerda que las respuestas han de ser razonadas. No es válido poner un resultado sin justificación. Es OBLIGATORIO escribir la expresión o fórmula que permite obtener la solución.

1.- Concepto de Aplicación Lineal y Transformación Lineal.¿En qué caso esta última es inyectiva?,¿y sobreyectiva?, ¿y biyectiva?.Definir N(f) e Im(f) de una aplicación lineal.

(1 punto)

2.-- Consideremos las *bases* de V^3:

$$B_1=\{\vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_2=(0,1,0),\vec{e}_3=(0,0,1)\},$$

$$B_2=\left\{\vec{u}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),\vec{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{u}_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

a) **Hallar el *cambio de base* de B_1 a B_2**

b) **Hallar el conjunto F de vectores que tienen las mismas *coordenadas* respecto de B_1 y de B_2.**

(2 puntos)

3.- Sean los subespacios vectoriales:

$$E=\{(\alpha+\gamma,\beta+\gamma,\alpha+\beta+2\gamma)/\alpha,\beta,\gamma\in R\};$$

$$F=\{(x,y,z)\in R^3/x-y+2z=0\}$$

Se pide:

a) ***Ecuaciones implícitas de E y Bases* de E y F**

b) ***Ecuaciones implícitas y paramétricas* de $E\cap F$.**

(2 puntos)

4.- .- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$$ **Se pide:**

a) Dar una *base* de *Im(f)* **(2 puntos)**

b) ¿Es f un *isomorfismo*?

c) ¿Es f *diagonalizable*?

d) En el caso de que sea diagonalizable, encontrar una matriz P que permita la diagonalización y obtener la matriz diagonal D

5.- Sean X, C y D tres matrices de orden 3. Suponiendo que la matriz A-2I es *inversible*, despejar X en la ecuación: $2X+C-A^t=D+(X^tA^t-A)^t$. **(1 punto)**

Fecha de **publicación de calificaciones: viernes, 22 de abril.**

SOLUCIÓN

2.-
Solución:

a) La matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ representa el cambio de base de B_2 a B_1, pues las columnas son los vectores de la base B_2 respecto de la base B_1. Entonces calculamos la matriz inversa de la anterior, que resulta ser la misma (es ortogonal) y tenemos la matriz del cambio de base de B_1 a B_2:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

b) Buscamos los vectores que tienen las mismas coordenadas respecto a las dos bases: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, de aquí se obtiene $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0-1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y resolviendo el sistema queda $x-\sqrt{2}y-z=0$ como única ecuación. Por tanto, $\boxed{F=\left\{(x,y,z)/\,x-\sqrt{2}y-z=0\right\}}$.

3.- *Solución*:

a) Para E:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$ una base {(1,0,1), (0,1,1)}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array}}\right.$$ ecuaciones paramétricas de E.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = -x - y + z = 0$$ ecuación implícita, o bien $\boxed{\mathbf{x+y-z=0}}$.

dim E=2; $\boxed{\mathbf{B_E=\{(1,0,1),(0,1,1)\}}}$ base de E.

Para F:

$\boxed{\mathbf{x-y+2z=0}}$ tenemos una ecuación cartesiana o implícita y dim (F)=2. Despejando x=y-2z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}}\right.$$ ecuaciones paramétricas de F.

dim F=2; $\boxed{\mathbf{B_F=\{(1,1,0),(-2,0,1)\}}}$ base de F.

b) Ecuaciones implícitas o cartesianas de $E \cap F$**:**

Intersección E ∩ F

Para sacar las ecuaciones implícitas basta unir las de E y F

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}}$$ que, como se ve son independientes y forman las ecuaciones de E ∩ F

luego dim (E ∩ F) = dim (R^3**)** – nº ecuaciones = 3-2 = 1

Resolviendo el sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{B_{E \cap F}=\{(1,-3,-2)\}}}$ base de $E \cap F$**,** es cualquier solución particular del sistema.

4.- *Solución*:

a) La imagen es: $\mathrm{Im}(f)=\left\{\vec{y}\in R^3 / \exists\vec{x} \text{ con } f\left(\vec{x}\right)=\vec{y}\right\}$, luego

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}x_3$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo dim(Im(f))=r(M)=3, es decir, el propio espacio vectorial R^3 y una base **$B_{Im(f)}$={(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}**

b) f es una transformación lineal que además es biyectiva pues Im(f)=R^3, luego **es un isomorfismo**.

c) Primeramente calculamos los valores propios:

$$\left|M-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\left(2-\lambda\right)\left(1-\lambda\right)^2=0\Rightarrow\lambda=\begin{cases} 1 \text{ doble} \\ 2 \text{ simple} \end{cases}$$

A continuación, se obtiene con los vectores propios asociados a los valores propios

Para 1 se tiene:

$$\left(M-1\,I\right)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \\ x_3=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{v}_1=\left(1,0,0\right) \\ \vec{v}_2=\left(0,1,0\right) \end{cases}\Rightarrow\dim V_{\lambda=1}=2$$

dim $V_{\lambda=1}$=2 coincide con el orden de multiplicidad, pues es doble.

Para 2 se tiene:

$$\left(M-2\,I\right)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=-2\alpha \\ x_3=\alpha \end{cases}\Rightarrow\left\{\vec{v}_3=\left(1,-2,1\right)\right.\Rightarrow\dim V_{\lambda=2}=1$$

La dimensión de cada subespacio propio asociado a cada valor propio de f coincide con el orden de multiplicidad como raíz del polinomio característico, luego **es diagonalizable**, siendo la matriz diagonal $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) La matriz P que permite la diagonalización, es la matriz del cambio de base y está formada por vectores propios asociados a los valores propios $\boxed{P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

5.-

Solución:

$$2X+C-A^t=D+(X^tA^t-A)^t \Rightarrow 2X+C-A^t=D+AX-A^t \Rightarrow 2X+C=D+AX\Rightarrow$$

$\left(2I-A\right)X=D-C$ y como 2I-A es inversible, multiplicando por la izquierda por la matriz $(2I-A)^{-1}$ en la ecuación anterior, se tiene

$$\boxed{X=(2\cdot I-A)^{-1}\left(D-C\right)}$$