Prueba de Evaluación Continua **20-abril-2021**

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL y TRANSFORMACIONES LINEALES

1.- Sabiendo que las matrices A, B, C y X son de la misma dimensión y además la matriz A es ortogonal y simétrica, resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\left(A^2X^{-1}\right)^t+\left(B-A\right)X=\left(A^2X^t\right)^{-1}+\left(A+B\right)X+3A$$

(0,5 puntos)

2.- En R^3 consideramos los subespacios vectoriales:

$$E=\left\langle(2,0,1),(1,1,1),(1,-3,-1)\right\rangle$$

$$F=\left\{(x,y,z)\in R^3 \text{ tales que } x+y+2z=0,\ \ 2x\text{-}y\text{-}2z=0\right\}$$

$$G=\left\{(\alpha+2\beta,\alpha,\beta)\in R^3 \text{ tales que } \alpha,\beta\in R\right\}$$

Se pide:

a) Dimensión y una base del subespacio $E+F$.

b) Dimensión y una base del subespacio $F\cap G$.

c) Determinar un subespacio suplementario del subespacio E.

(1,5 puntos)

3.- En el espacio vectorial real R^2 consideramos las bases $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ y $B''=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$ siendo $\vec{v}_1=3\vec{u}_1-\vec{u}_2;\vec{v}_2=-\vec{u}_1+\vec{u}_2;\vec{u}_1=2\vec{w}_1+\vec{w}_2;\vec{u}_2=7\vec{w}_1-\vec{w}_2$. Hallar las ecuaciones del cambio de base:

a) de B a B'.

b) de B' a B''.

c) de B'' a B.

(1,5 puntos)

4.- Se considera el endomorfismo de R^3 definido por

$f(\vec{e}_1)=\vec{e}_2+\vec{e}_3;f(\vec{e}_2)=\vec{e}_1+\vec{e}_3;f(\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, donde $B_c=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Se pide:

- **a)** ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva?
- **b)** Los valores propios de f.
- **c)** Los vectores propios de f.
- **d)** Una base de R^3, si es posible, formada por vectores propios de f.
- **e)** ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, escribir la matriz diagonal y la relación de semejanza existente.

(3,5 puntos)

5.- Enunciar y demostrar el Cambio de base en una transformación lineal.

(1 punto)

1.- Sabiendo que las matrices A, B, C y X son de la misma dimensión y además la matriz A es ortogonal y simétrica, resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\left(A^2X^{-1}\right)^t+\left(B-A\right)X=\left(A^2X^t\right)^{-1}+\left(A+B\right)X+3A$$

Solución:

Como A es ortogonal y simétrica, se verifica que $A = A^{-1} = A^t$

$$\left(X^{-1}\right)^t\left(A^2\right)^t+BX-AX=\left(X^t\right)^{-1}\left(A^2\right)^{-1}+AX+BX+3A$$

$$-3A=2AX$$

$$X=\left(2A\right)^{-1}\left(-3A\right)=-\frac{3}{2}I$$

2.- En R^3 consideramos los subespacios vectoriales:

$$E=\left\langle(2,0,1),(1,1,1),(1,-3,-1)\right\rangle$$

$$F=\left\{(x,y,z)\in R^3 \text{ tales que } x+y+2z=0,\ \ 2x\text{-}y\text{-}2z=0\right\}$$

$$G=\left\{(\alpha+2\beta,\alpha,\beta)\in R^3 \text{ tales que } \alpha,\beta\in R\right\}$$

Se pide:
a) Dimensión y una base del subespacio $E+F$.
b) Dimensión y una base del subespacio $F\cap G$.
c) Determinar un subespacio suplementario del subespacio E.

Solución:

a) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -1\end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, por tanto, dim(E)=2 y una base de E es:

B_E={(2, 0, 1), (1, 1, 1)}.

De las ecuaciones cartesianas del subespacio F obtenemos que se trata de un subespacio vectorial de dimensión 1 con una posible base {(0,2,-1)}

Un sistema generador de E+F está formado por la unión de las bases de E y de F. Los tres vectores $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ forman un sistema generador y un sistema libre, ya que el rango es 3, por tanto, **dim(F + G) =3**

Una posible base de F+G es $\left\{(0,2,-1),(2,0,1),(1,1,1)\right\}$ o cualquier otra del espacio vectorial R^3.

b)

Los vectores de G son tales que $\begin{Bmatrix}x=\alpha+2\beta\\ y=\alpha\\ z=\beta\end{Bmatrix}$ y el rango de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es dos, por tanto, la dimensión de G es dos y una base es: $B_G=\left\{(1,1,0),(2,0,1)\right\}$

Para calcular $F\cap G$ primero hallamos la ecuación implícita de G.

$$0=\begin{vmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & 0 & y\\ 0 & 1 & z\end{vmatrix}=x-y-2z=0\ .$$

Los vectores de $F\cap G$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones x + y + 2z = 0; 2x – y - 2z = 0; $x-y-2z=0$, cuya solución es x =0; y y+2 z = 0.

Por tanto, la dimensión y una base de $F\cap G$ son:

$$\mathbf{dim(F\cap G)=1}.$$

Una posible base de $F\cap G$ es $\{(0,2,-1)\}$

c) Utilizamos un vector de R^3 que sea linealmente independiente con los de E. Así pues $B_{E'}$={(1, 0, 0)}. $\mathbf{E'=\{(\alpha,0,0)\in R^3 \text{ tales que } \alpha\in R\}}$

3.- En el espacio vectorial real R^2 consideramos las bases $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ y $B''=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$ siendo $\vec{v}_1=3\vec{u}_1-\vec{u}_2;\vec{v}_2=-\vec{u}_1+\vec{u}_2;\vec{u}_1=2\vec{w}_1+\vec{w}_2;\vec{u}_2=7\vec{w}_1-\vec{w}_2$. Hallar las ecuaciones del cambio de base:

a) de B a B'.

b) de B' a B''.

c) de B'' a B.

***Solución**:*

Tenemos las matrices: $P_{B'B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $P_{BB''}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y el vector (x,y)=(x',y')=(x'',y'') según la base B, B' y B''.

a) $$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y\end{cases}.$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x''=-x'+5y'\\ y''=4x'-2y'\end{cases}$$

c) $$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{7}{9}\\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{9}x''+\frac{7}{9}y''\\ y=\frac{1}{9}x''-\frac{2}{9}y''\end{cases}$$

4.- Se considera el endomorfismo de R^3 definido por
$f(\vec{e}_1)=\vec{e}_2+\vec{e}_3; f(\vec{e}_2)=\vec{e}_1+\vec{e}_3; f(\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, **donde** $B_c=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. **Se pide:**

a) ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva?
b) Los valores propios de f.
c) Los vectores propios de f.
d) Una base de R^3, si es posible, formada por vectores propios de f.
e) ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, escribir la matriz diagonal y la relación de semejanza existente.

Solución:

a) $$A=M(f,B_c)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$, luego f es inyectiva, sobreyectiva y además biyectiva, es decir, un isomorfismo

b) Valores propios: $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda-2=0\Rightarrow \boxed{\lambda=\begin{cases}-1\\2\end{cases}}$

c) Vectores propios:
Para $\lambda=-1$

$$(A-(-1)I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\vec{v}_1=(1,-1,0)\\\vec{v}_2=(1,0,-1)\end{cases}}$$

Para $\lambda=2$

$$(A-2I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+z=0\\x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\{\vec{v}_3=(1,1,1)}$$

d)
La base existe por ser simétrica y puede ser: $\boxed{B^*=\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}}$

e) Vamos a diagonalizar la matriz A que es posible por ser simétrica.

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

5.- Enunciar y demostrar el Cambio de base en una transformación lineal

Sea f una transformación lineal de un espacio vectorial V.

Sean B y B' dos bases distintas de V y las matrices $A=M(f,B)$ y $A'=M(f,B')$.

En cuyo caso se verifica que $Y = AX; Y' = A'X'$

Sea P la matriz de cambio de base de B' a B, luego $Y = PY'; X' = PX'$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X_B} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbf{Y_B} \\ \uparrow \mathbf{P} & & \downarrow \mathbf{P^{-1}} \\ \mathbf{X'_{B'}} & \xrightarrow{\mathbf{A'}} & \mathbf{Y'_{B'}} \end{array}$$

Por la propia definición de las matrices que intervienen en el esquema anterior, se verifica:

$$Y = AX \Rightarrow PY' = APX' \Rightarrow Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{A'}X'$$

Luego, la relación buscada es: $A' = P^{-1}A\,P$

Prueba de Evaluación Continua 22-abril-2021

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL y TRANSFORMACIONES LINEALES

1.- Sean A, B, C, X matrices cuadradas de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X:

$$(A + B^t X^t)^t - (A^{-1} B^t)^t = (C - 2X)B - (A^t B^{-1})^{-1}$$

(0,5 puntos)

2.- En R^4 se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x, y, z, t) \in R^4 \text{ tales que } x + y - t = 0\};\ V = \{(\alpha, 3\alpha - 3\beta, \beta, 0) \in R^4 \text{ tales que } \alpha, \beta \in R\}$$

Calcular la dimensión, una base, ecuación vectorial, ecuaciones implícitas y ecuaciones paramétricas de: U, V y $U \cap V$

(1,5 puntos)

3.-Dadas las bases de $\mathbf{R^3}$, B={ $\vec{u}_1$ = (2,1,0), $\vec{u}_2$ = (-1,0,1), $\vec{u}_3$ = (0,1,-2)} y B´={ $\vec{v}_1$ = (0,1,1), $\vec{v}_2$ = (1,0,0), $\vec{v}_3$ = (2,0,1)}, se pide.

a) La expresión analítica del cambio de base de B a B´ y de B´a B

b) Si $\vec{a} = (1,1,1)$ respecto de B ¿cuáles son sus coordenadas respecto de B'?

(1,5 puntos)

4.- Sea f una transformación lineal de R^4 tal que su matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar sendas bases de N(f) e Im(f).

b) Hallar el polinomio característico y los valores propios de f, así como los sistemas de vectores propios asociados .¿Es diagonalizable? En caso afirmativo:

c) Dar D y la matriz P de cambio de base que diagonaliza A

(3,5 puntos)

5.- Concepto de Aplicación Lineal y Transformación Lineal.¿En qué caso esta última es biyectiva?

(1 punto)

SOLUCIONES

1.-

Aplicaremos las siguientes propiedades

$(A + B)C = AC + BC$

$(AB)^t = B^tA^t$, $(A^t)^t = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1}$

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Suponemos que existen tanto $\mathbf{A^{-1}}$ como $\mathbf{B^{-1}}$

Aplicando las propiedades correspondientes mencionadas quitamos los paréntesis en la ecuación dada y se obtiene:

$A^t + XB - B(A^{-1})^t = CB – 2XB - B(A^t)^{-1}$ y como $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$A^t + XB = CB – 2XB$, sumando $2XB$ a ambos miembros y restando A^t

$3XB = CB - A^t$, multiplicando por B^{-1} a la derecha de ambos miembros

$3XBB^{-1} = CBB^{-1} - A^tB^{-1} \Rightarrow 3X = C- A^tB^{-1}$ y multiplicando por 1/3 ambos miembros:

$$X = (C - A^tB^{-1})/3$$

2.-

dim U = 3

Una base de U puede ser $B_U=\{\vec{u}_1 = (1,0,0,1),\ \vec{u}_2 = (0,1,0,1),\ \vec{u}_3 = (0,0,1,0)\}$.

Una ecuación vectorial de U es: $(x,y,z,t) = \lambda_1(1,0,0,1)+\lambda_2(0,1,0,1)+\lambda_3(0,0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas de U: $\begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = \lambda_2 \\ z = \lambda_3 \\ t = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 3\alpha - 3\beta \\ z = \beta \\ t = 0 \end{cases}$, estas son unas **ecuaciones paramétricas de V**.

dim V = 2

Una base de V puede ser $B_V=\{\vec{v}_1 = (1,3,0,0),\ \vec{v}_2 = (0,-3,1,0)\}$.

Una ecuación vectorial de V es: $(x,y,z,t) = \alpha(1,3,0,0)+\beta(0,-3,1,0)$

Para hallar unas ecuaciones implícitas de V consideramos sus ecuaciones paramétricas como un sistema cuyas incógnitas son los parámetros α y β, que ha de ser compatible y, por tanto, el rango de la matriz ampliada y de la matriz de los coeficientes han de ser iguales:

$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 3 & -3 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & t \end{array}\right)$; como, claramente, $r(A) = 2$, ha de ser $r(A^*) = 2$, luego los menores de orden tres (que se obtengan orlando un menor de orden dos no nulo) han de ser nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 3 & -3 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 3x - y - 3z = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t = 0$$

Ecuaciones implícitas de V: $\begin{cases} 3x - y - 3z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

$U \cap V$ está formado por los vectores que cumplen simultáneamente las ecuaciones implícitas de U y de V: $\{x + y - t = 0$ y $\begin{cases} 3x - y - 3z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Este sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, tiene la solución $\begin{cases} x + y - t = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = (4/3)\lambda \\ t = 0 \end{cases}$ ecuaciones paramétricas.

Luego, $U \cap V = \langle \{(1, -1, 4/3, 0)\} \rangle$, por tanto, dim $(U \cap V) = 1$

Se verifica que: dim(U+V) = dim U + dim V – dim $U \cap V$ = 3 + 2 - 1 = 4.

3.- *Solución*:

a) Si consideramos la base canónica $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ y dado que los vectores de las bases B y B' vienen referidos a la base canónica, son inmediatos los cambios de la base B a B_c y de la base B' a B_c

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Igualando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

A partir de esta expresión, podemos obtener cualquier cambio de base entre las tres bases consideradas, a saber B, B' y B_c. En particular, se nos pide

- Cambio de base de B' a B_c: $\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y sus ecuaciones $\boxed{\begin{cases} x_c = y' + 2z' \\ y_c = x' \\ z_c = x' + z' \end{cases}}$
- Cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \text{ y sus ecuaciones } \boxed{\begin{cases} x' = x + z \\ y' = 4x - 3y + 6z \\ z' = -x + y - 3z \end{cases}}$$

Cambio de base de B’ a B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

y sus ecuaciones son $\boxed{\begin{cases} x = \frac{3}{4}x' + \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4}z' \\ y = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' \\ z = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}z' \end{cases}}$

b) Para el vector $\vec{a} = (1,1,1)$ respecto de la base B usamos las ecuaciones $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y sustituimos(x,y,z) por (1,1,1) quedando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Luego $\boxed{\textbf{(2,7,-3)}}$ las coordenadas del vector $\vec{a}$ respecto de la base B.

4.-

a) Ecuaciones del núcleo de f; AX=0

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Una base del N(F)={(0,1,-1,0)}

Una base de Im(f)={(-4,0,0,-6), (3,0,2,3), (3,0,0,5)}

Obsérvese que dimN(f)+dim(Im(f))=dimR^4=4

b) Polinomio característico

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda)^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 0 \end{array}} \end{cases}$$

Subespacio propio asociado al valor propio 2 **doble**:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -4-2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z - t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

V_2=<{(1/2,0,1,0), (1/2,0,0,1)}>

Subespacio propio asociado al valor propio -1 **simple**:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -4+1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2+1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

V_{-1}=<{(1,0,0,1)}>

Subespacio propio asociado al valor propio 0 **simple**:

V_0=<{(0,1,-1,0)}> es precisamente el núcleo de f.

c) A es diagonalizable si todos los valores propios son números reales y cada valor propio cumple que su orden de multiplicidad coincide con la dimensión del correspondiente subespacio propio.

La base formada por los vectores propios es:

{(1/2,0,1,0), (1/2,0,0,1), (1,0,0,1), (0,1,-1,0)}

d)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$