

**Prueba de Evaluación Continua** **6-mayo-2020**  
**MATRICES, ESPACIO VECTORIAL, TRANSFORMACIONES LINEALES Y ESPACIO EUCLÍDEO**

1. Dados los s.v.  $E = \{(\alpha + \gamma, \beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$  y

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$ , se pide obtener:

- a) Sendas bases de E, F, E+F, E∩F. **1 punto**
- b) Ecuaciones implícitas de E+F y E∩F. **1 punto**

**Solución:**

a) Para E:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \gamma, \text{ verificándose que } \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ luego } \{(1,0,1), (0,1,1)\} \text{ es una}$$

base de E pues no son proporcionales, luego  $\dim E=2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \text{ son unas ecuaciones paramétricas de E y unas ecuaciones}$$

implícitas se obtienen imponiendo que  $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$  para cualquier  $(x,y,z) \in E$ , luego

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z - x - y = 0, \text{ luego una ecuación implícita de E es } \boxed{x+y-z=0} \Rightarrow$$

$\boxed{\mathbf{B}_E = \{(1,0,1), (0,1,1)\}}$  es una base de E.

En el caso del subespacio F, definido por una ecuación cartesiana o implícita  $\boxed{x-y+2z=0}$  Despejando

$$x=y-2z \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \text{ ecuaciones paramétricas de F.} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \Rightarrow$$

$\boxed{\mathbf{B}_F = \{(1,1,0), (-2,0,1)\}}$  es una base de F y  $\dim F=2$ .

b) Ecuaciones implícitas de  $E \cap F$ :

**Intersección  $E \cap F$ :**

Sus ecuaciones implícitas han de expresar las condiciones de pertenecer a ambos subespacios luego son el sistema determinado por las ecuaciones de E y F

$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right\}$  que, como se ve son independientes y constituyen las ecuaciones implícitas de  $E \cap F$

, luego  $\dim(E \cap F) = \dim(\mathbb{R}^3) - n^\circ \text{ ecuaciones} = 3 - 2 = 1$

Resolviendo el sistema se obtiene  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \alpha \Rightarrow$  una base de  $E \cap F$  es  $\mathbf{B}_{E \cap F} = \{(1, -3, -2)\}$  (en

general es cualquier solución particular del sistema).

$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F = 2 + 2 - 1 = 3$

$E+F = \mathbb{R}^3$ . No tiene ecuaciones cartesianas o implícitas.

La base canónica  $\mathbf{B}_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  es una base de  $E+F$ .

2.- Sea  $f$  una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$ , tal que:

$N(f) \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$  y  $V_{\lambda=1} \equiv x + y + z = 0$ , es el subespacio propio asociado al valor propio

$\lambda=1$ . Se pide:

- c) Justificar que existe una única transformación lineal  $f$  que cumple esas dos condiciones. **0,2 puntos**
- d) Razonar si  $f$  es diagonalizable o no. En caso afirmativo, hallar:  
Una base  $\mathbf{B}^*$  de  $\mathbb{R}^3$  formada por vectores propios de  $f$ .
- e) La matriz asociada a  $f$  respecto de esa base de vectores propios. **0,6 puntos**
- f) Hallar la matriz  $\mathbf{A}$  asociada a  $f$  respecto de la base canónica. **0,8 puntos**
- g) ¿Es  $f$  biyectiva? **0,2 puntos**
- h) Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio de los vectores invariantes por  $f$ . **0,2 puntos**

**Solución:**

- a) Dado que podemos encontrar tres vectores linealmente independientes con sus respectivas imágenes.
- b) De los datos deducimos que  $(3, -3, -1)$  es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda=0$ ; y que  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, -1)$  son dos vectores propios asociados a  $\lambda=1$ .

Una base  $\mathbf{B}^*$  de  $\mathbb{R}^3$  formada por vectores propios de  $f$  es:

$$\mathbf{B}^* = \{(3, -3, -1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

La matriz asociada a  $f$  respecto de esta base  $\mathbf{B}^*$  formada por vectores propios es:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Entre las matrices  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{A}$  existe la relación:  $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ , siendo  $\mathbf{P}$  la matriz de cambio

de base de  $B^*$  a la base canónica,  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- d)  $f$  no es biyectiva, ya que tiene a  $\lambda=0$  como valor propio, o bien,  $|D|=0$   
 e) Los vectores invariantes por  $f$  son los vectores propios asociados al valor propio  $\lambda = 1$ .  
 Luego, unas ecuaciones paramétricas del subespacio de vectores invariantes son:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Opción 2**

**3.- En el espacio afín ordinario, se consideran las referencias:**

$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  y  $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ , donde  $\vec{OO}' = \vec{u} + 3\vec{w}$ ,  $\vec{u}' = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ ,  $\vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ ,

$$\vec{w}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

- 1 punto.** a) Hallar las ecuaciones del cambio de referencia de  $R$  a  $R'$ .  
**0,6 puntos.** b) Si  $A = (1, 1, 1)$  respecto de  $R'$ , hallar las coordenadas de  $A$  respecto de  $R$ .  
**0,4 puntos.** c) Dar las coordenadas del punto  $O$  respecto de  $R'$ .

**Solución:**

a) Ecuaciones del cambio de referencia de  $R'$  a  $R$ .

Supongamos que  $X$  tiene por vectores de posición  $\vec{OX} = (x, y, z)$  y  $\vec{O'X} = (x', y', z')$  respecto de  $R$  y  $R'$  respectivamente, como  $\vec{OO}' + \vec{O'X} = \vec{OX}$ , se verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot [X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de  $R'$  a  $R$ , siendo  $P$  la matriz del cambio de la base  $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$  a la base  $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ .

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

b) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R y sustituyendo  $x'=1; y'=1; z'=1$ , resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = (2, 1, 4)$$

c)

Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo  $x=y=z=0$ , resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow O = (-2, -4, 2)$$

Opción 3

3.- En el espacio afín ordinario, se consideran las referencias:

$$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ y } R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}, \text{ donde } \vec{O'O} = \vec{u}' + 2\vec{v}' + 3\vec{w}', \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}' + \frac{1}{2}\vec{w}',$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}' + \frac{1}{2}\vec{w}', \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u}' + \frac{1}{2}\vec{v}'.$$

- 1 punto.** a) Hallar las ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.
- 0,6 puntos.** b) Si P = (2, 1, 0) respecto de R', hallar las coordenadas de P respecto de R.
- 0,4 puntos.** c) Dar las coordenadas del punto O' respecto de R.

**Solución:**

a) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Supongamos que X tiene por vectores de posición  $\vec{OX} = (x, y, z)$  y  $\vec{O'X} = (x', y', z')$  respecto de R y R' respectivamente, como  $\vec{O'O} + \vec{OX} = \vec{O'X}$ , se verifica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_{R'} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot [X]_R$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R', siendo P la matriz del cambio de la base B = {u, v, w} a la base B' = {u', v', w'}.

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

b) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R y sustituyendo x'=2; y'=1; z'=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \left( \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} \right)$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{O' = (-4, -2, 0)}$$

3.- En el espacio afín ordinario, se consideran las referencias:

$$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ y } R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}, \text{ donde } \vec{OO}' = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u}' = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w},$$

$$\vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}, \vec{w}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

- a) Hallar las ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.
- b) Si P = (2, 1, 0) respecto de R', hallar las coordenadas de P respecto de R.
- c) Dar las coordenadas del punto O respecto de R'.

**Solución:**

a) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Supongamos que X tiene por vectores de posición  $\vec{OX} = (x, y, z)$  y  $\vec{O'X} = (x', y', z')$  respecto de R y R' respectivamente, como  $\vec{OO}' + \vec{O'X} = \vec{OX}$ , se verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot [X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base B' = {u', v', w'} a la base B = {u, v, w}.

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

b) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R y sustituyendo x'=2; y'=1; z'=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo x=y=z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{O = (-4, -2, 0)}$$



2.- Sea  $f$  una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$ , tal que:

$$V_{\lambda=1} \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \text{ es el subespacio propio asociado al valor propio } \lambda=1 \text{ y}$$

$N(f) \equiv x + y + z = 0$ , Se pide:

- Justificar que existe una única transformación lineal  $f$  que cumple esas dos condiciones. **0,2 puntos.**
- Razonar si  $f$  es diagonalizable o no. En caso afirmativo, hallar:  
Una base  $B^*$  de  $\mathbb{R}^3$  formada por vectores propios de  $f$ .  
La matriz asociada a  $f$  respecto de esa base de vectores propios. **0,3 puntos.**
- Hallar la matriz  $A$  asociada a  $f$  respecto de la base canónica. **0,8 puntos.**
- ¿Es  $f$  biyectiva? **0,2 puntos.**
- Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio Núcleo de  $f$ . **0,2 puntos.**

**Solución:**

- Dado que podemos encontrar tres vectores linealmente independientes con sus respectivas imágenes.
- De los datos deducimos que  $(3, -3, -1)$  es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda=1$ ; y que  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, -1)$  son dos vectores propios asociados a  $\lambda=0$ .  
Una base  $B^*$  de  $\mathbb{R}^3$  formada por vectores propios de  $f$  es:  
 $B^* = \{(3, -3, -1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$

La matriz asociada a  $f$  respecto de esta base  $B^*$  formada por vectores propios es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Entre las matrices  $D$  y  $A$  existe la relación:  $D = P^{-1}AP$ , siendo  $P$  la matriz de cambio de base de  $B^*$  a la base canónica,  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $f$  no es biyectiva, ya que tiene a  $\lambda=0$  como valor propio, o bien,  $|D|=0$
- El Núcleo de  $f$  son los vectores propios asociados al valor propio  $\lambda=0$ .

Luego, unas ecuaciones paramétricas del subespacio propio son: 
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3.- En el espacio afín ordinario, se consideran las referencias:

$$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ y } R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}, \text{ donde } \vec{OO}' = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u}' = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w},$$

$$\vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}, \vec{w}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

b) Si P = (2, 1, 0) respecto de R', hallar las coordenadas de P respecto de R.

c) Dar las coordenadas del punto O respecto de R'.

**Solución:**

a) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Supongamos que X tiene por vectores de posición  $\vec{OX} = (x, y, z)$  y  $\vec{O'X} = (x', y', z')$  respecto de R y R' respectivamente, como  $\vec{OO}' + \vec{O'X} = \vec{OX}$ , se verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P \cdot [X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base B' = {u', v', w'} a la base B = {u, v, w}.

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

b) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R y sustituyendo x'=2; y'=1; z'=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

c) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo x=y=z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{O = (-4, -2, 0)}$$

**Prueba de Evaluación Continua mayo-2020**  
**MATRICES, ESPACIO VECTORIAL, TRANSFORMACIONES LINEALES Y ESPACIO EUCLÍDEO**

1.- Dados los s.v.  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$  y  $F = \{(\alpha - 2\beta, \alpha + 2\gamma, \beta + \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ , se pide obtener:

- a) Sendas bases de E, F, E+F,  $E \cap F$ .
- b) Ecuaciones implícitas de E+F y  $E \cap F$ .

**Solución:**

a)

En el caso del subespacio E, definido por una ecuación cartesiana o implícita  $x+y-z=0$  Despejando

$$x=-y+z \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \text{ ecuaciones paramétricas de F} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \Rightarrow$$

$\mathbf{B}_F = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  es una base de F y  $\dim F = 2$ .

Para F:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma, \text{ verificándose que } \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ luego } \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ es}$$

una base de E pues no son proporcionales, luego  $\dim E = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \alpha \\ z = 0 + \beta \end{cases} \text{ son unas ecuaciones paramétricas de E y unas ecuaciones}$$

implícitas se obtienen imponiendo que  $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$  para cualquier  $(x, y, z) \in E$ , luego

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 0, \text{ luego una ecuación implícita de F es } \mathbf{x - y + 2z = 0} \Rightarrow$$

$\mathbf{B}_E = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$  es una base de E.

b) Ecuaciones implícitas de  $E \cap F$  :

**Intersección  $E \cap F$ :**

Sus ecuaciones implícitas han de expresar las condiciones de pertenecer a ambos subespacios luego

son el sistema determinado por las ecuaciones de E y F

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right\} \text{ que, como se ve son independientes y constituyen las ecuaciones implícitas de } E \cap F$$

, luego  $\dim(E \cap F) = \dim(\mathbb{R}^3) - n^\circ \text{ ecuaciones} = 3 - 2 = 1$

Resolviendo el sistema se obtiene  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \alpha \Rightarrow$  una base de  $E \cap F$  es  $\mathbf{B}_{E \cap F} = \{(1, -3, -2)\}$  (en

general es cualquier solución particular del sistema).

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F = 2 + 2 - 1 = 3$$

$E+F = \mathbb{R}^3$ . No tiene ecuaciones cartesianas o implícitas.

La base canónica  $\mathbf{B}_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  es una base de  $E+F$ .