Prueba de Evaluación Continua 6-mayo-2020

MATRICES, ESPACIO VECTORIAL, TRANSFORMACIONES LINEALES Y ESPACIO EUCLÍDEO

1. Dados los s.v. $E=\left\{(\alpha+\gamma,\beta+\gamma,\alpha+\beta+2\gamma)\in R^3,\alpha,\beta,\gamma\in R\right\}$ y $F=\left\{(x,y,z)\in R^3, x-y+2z=0\right\}$, se pide obtener:

a) Sendas bases de E, F, E+F, E∩F.

b) Ecuaciones implícitas de E+F y E∩F.

Solución:

a) Para E:

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\gamma$, verificándose que $rg\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=2$ luego {(1,0,1), (0,1,1)} es una base de E pues no son proporcionales, luego dim E=2

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\beta\Leftrightarrow\left\{\boxed{\begin{array}{l}x=\alpha\\ y=\beta\\ z=\alpha+\beta\end{array}}\right.$ son unas ecuaciones paramétricas de E y unas ecuaciones implícitas se obtienen imponiendo que $rg\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\1&1&z\end{pmatrix}=2$ para cualquier (x,y,z)∈E, luego

$\det\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\1&1&z\end{pmatrix}=0\Rightarrow z-x-y=0$, luego una ecuación implícita de E es $\boxed{\mathbf{x+y-z=0}}$ $\Rightarrow$

$\boxed{\mathbf{B_E=\{(1,0,1),(0,1,1)\}}}$ es una base de E.

En el caso del subespacio F, definido por una ecuación cartesiana o implícita $\boxed{\mathbf{x-y+2z=0}}$ Despejando x=y-2z $\Rightarrow\left\{\boxed{\begin{array}{l}x=\lambda-2\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{array}}\right.$ ecuaciones paramétricas de F.$\Rightarrow\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\mu\Rightarrow$

$\boxed{\mathbf{B_F=\{(1,1,0),(-2,0,1)\}}}$ es una base de F y dim F=2.

b) Ecuaciones implícitas de $E\cap F$ **:**

Intersección E ∩F:

Sus ecuaciones implícitas han de expresar las condiciones de pertenecer a ambos subespacios luego son el sistema determinado por las ecuaciones de E y F

$\boxed{\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right\}}$ que, como se ve son independientes y constituyen las ecuaciones implícitas de E ∩ F , luego dim (E ∩ F) = dim (R^3) – nº ecuaciones = 3-2 = 1

Resolviendo el sistema se obtiene $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\alpha \Rightarrow$ una base de $E \cap F$ es $\boxed{\mathbf{B}_{E\cap F}=\{(1,-3,-2)\}}$ (en general es cualquier solución particular del sistema).

Dim (E+F) = dim E+ dim F - dim $E \cap F$ =2+2-1=3

E+F=R^3. No tiene ecuaciones cartesianas o implícitas.

La base canónica $\boxed{\mathbf{B_c=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}}}$ **es una base de E+F**.

2.- Sea f una transformación lineal de R^3, tal que:

$N(f) \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$ **y** $V_{\lambda=1} \equiv x+y+z=0$**, es el subespacio propio asociado al valor propio λ=1. Se pide:**

a) **Justificar que existe una única transformación lineal f que cumple esas dos condiciones.**
b) **Razonar si f es diagonalizable o no. En caso afirmativo, hallar:**
   Una base B* de R^3 formada por vectores propios de f.
   La matriz asociada a f respecto de esa base de vectores propios.
c) **Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.**
d) **¿Es f biyectiva?**
e) **Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio de los vectores invariantes por f.**

Solución:

a) Dado que podemos encontrar tres vectores linealmente independientes con sus respectivas imágenes.

b) De los datos deducimos que (3,-3,-1) es un vector propio asociado al valor propio λ=0; y que (1,0,-1), (0,1,-1) son dos vectores propios asociados a λ=1.
Una base B* de R^3 formada por vectores propios de f es:
$B^* = \{(3,-3,-1),(1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$

La matriz asociada a f respecto de esta base B' formada por vectores propios es:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Entre las matrices D y A existe la relación: $D = P^{-1}AP$, siendo P la matriz de cambio de base de B* a la base canónica, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A = PDP^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) f no es biyectiva, ya que tiene a λ=0 como valor propio, o bien, $|D| = 0$

e) Los vectores invariantes por f son los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$.
Luego, unas ecuaciones paramétricas del subespacio de vectores invariantes son:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{cases} , \quad \alpha, \beta \in R.$$

3.- En el espacio afín ordinario, se consideran las referencias:
$R = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ **y** $R' = \{O', \vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$**, donde** $\overrightarrow{OO'} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ **,** $\vec{u}' = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$**,**
$\vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{w}' = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

a) Hallar las ecuaciones del cambio de referencia de R a R´.
b) Si P = (2, 1, 0) respecto de R', hallar las coordenadas de P respecto de R.
c) Dar las coordenadas del punto O respecto de R'.

Solución:
a) Ecuaciones del cambio de referencia de R' a R.

Supongamos que X tiene por vectores de posición $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ y $\overrightarrow{O'X} = (x', y', z')$ respecto de R y R' respectivamente, como $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{OX}$, se verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow [X]_R = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + P.[X]_{R'}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R, siendo P la matriz del cambio de la base $B' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\}$ a la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Según el enunciado tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ o bien } \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

a)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Ecuaciones del cambio de referencia de R a R'.

b) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R' a R y sustituyendo x'=2; y'=1; z'=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}\right)}$$

c) Utilizando las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R' y sustituyendo x=y=z=0, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{O = (-4, -2, 0)}$$