

1.- En cada uno de los siguientes casos, razonar si puede existir al menos un triángulo esférico con los elementos dados. En caso afirmativo, calcular los elementos restantes:

a) Tres lados: $a = 60^\circ 00' 31''$, $b = 137^\circ 20' 40''$, $c = 116^\circ 00' 32''$.

Solución:

a) Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 0,2912659729 \Rightarrow$$

$$A = 73^\circ 03' 58''.$$

Análogamente:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = -0,6632204119 \Rightarrow$$

$$B = 131^\circ 32' 45''$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = -0,1207886561 \Rightarrow$$

$$C = 96^\circ 56' 15''$$

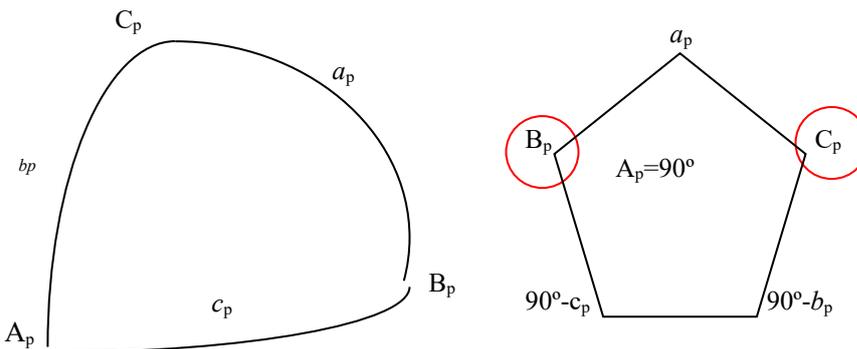
b) Tres lados: $a = 90^\circ$, $b = 48^\circ 50'$, $c = 67^\circ 38'$,

Solución:

b) Se trata de un triángulo rectilátero en $a = 90^\circ$ luego su polar es rectángulo en $A_p = 90^\circ$ y los elementos conocidos de dicho polar son:

$$A_p = 180^\circ - a = 90^\circ; \quad B_p = 180^\circ - b = 131^\circ 10'; \quad C_p = 180^\circ - c = 112^\circ 22'$$

Aplicamos las reglas del pentágono de Neper al triángulo polar:



$$\cos a_p = \cotg B_p \cotg C_p = \frac{1}{\operatorname{tg}(B_p) \operatorname{tg}(C_p)} = 0,3598094492 \Rightarrow a_p = 68^\circ 54' 41.42''$$

$$\cos B_p = \operatorname{sen}(90^\circ - b_p) \operatorname{sen} C_p = \cos b_p \operatorname{sen} C_p \Rightarrow \cos b_p = \frac{\cos B_p}{\operatorname{sen}(C_p)} = -0,7118022192$$

$$\Rightarrow b_p = 135^\circ 22' 54.2''$$

$$\cos C_p = \operatorname{sen}(90^\circ - c_p) \operatorname{sen} B_p = \cos c_p \operatorname{sen} B_p \Rightarrow \cos c_p = \frac{\cos C_p}{\operatorname{sen}(B_p)} = -0,5054907662.$$

$$\Rightarrow c_p = 120^\circ 21' 50.1''$$

Comprobamos con el teorema del seno la validez de estos datos

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = 0,9330258; \quad \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = 0,9330260; \quad \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} = 0,9330259$$

Y ahora calculamos los datos del triángulo dado que nos faltaban:

$$A = 180^\circ - a_p = 111^\circ 5' 18.58'' \quad (\text{si queremos dar solo hasta los minutos } A \approx 111^\circ 5')$$

$$B = 180^\circ - b_p = 44^\circ 37' 5.8'' \quad (\text{si queremos dar solo hasta los minutos } B \approx 44^\circ 37')$$

$$C = 180^\circ - c_p = 59^\circ 38' 9.9'' \quad (\text{si queremos dar solo hasta los minutos } C \approx 59^\circ 38')$$

c) Tres ángulos: $A = 70^\circ 00' 25''$, $B = 131^\circ 10' 15''$, $C = 94^\circ 50' 53''$

Solución:

c) Aplicando el teorema del coseno para ángulos:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \Rightarrow \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} = 0,530015814$$

$$\Rightarrow \mathbf{a=57^\circ 59' 37''}$$
 Análogamente,

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b \Rightarrow \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C} = -0,733898576$$

$$\Rightarrow \mathbf{b=137^\circ 12' 51''}$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c \Rightarrow \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} = -0,437657969$$

$$\mathbf{c=115^\circ 57' 16''}$$

d) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

$$\mathbf{a = 64^\circ 24' 03''}, \mathbf{b = 42^\circ 30' 10''}, \mathbf{C = 58^\circ 40' 52''}$$

Solución:

d) Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C = 0,6352607851 \Rightarrow \mathbf{c = 50^\circ 33' 38.42''}$$

Y ahora, con este dato incorporado, aplicamos de nuevo el teorema del coseno para calcular A y B:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = -0,06951367 \Rightarrow \mathbf{A = 93^\circ 59' 9.8''}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} = 0,6644274671 \Rightarrow \mathbf{B = 48^\circ 21' 41.7''}$$

e) Dos ángulos y el lado comprendido entre ellos

$$\mathbf{c = 116^\circ 12' 05''}, \mathbf{A = 70^\circ 51' 15''}, \mathbf{B = 131^\circ 20' 26''}$$

Solución:

e) Aplicando el teorema del coseno para ángulos:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c = -0,0965239 \Rightarrow \mathbf{C = 95^\circ 32' 21''}$$

Y ahora teorema del coseno para los ángulos de nuevo para calcular a y b :

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} = 0,5242012028 \Rightarrow \mathbf{a = 58^\circ 23' 7.86''}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C} = -0,7361569118 \Rightarrow \mathbf{b = 137^\circ 24' 18.2''}$$

f) Dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos

$$\mathbf{a = 58^\circ 46' 22''}, \mathbf{b = 137^\circ 02' 50''}, \mathbf{B = 131^\circ 52' 33''}$$

Solución:

f) Por el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} A = 0,934428211 \Rightarrow \begin{cases} A = 69^\circ 08' 09'' < B \Leftrightarrow a < b \\ A = 110^\circ 51' 51'' < B \Leftrightarrow a < b \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas pues no contradicen ninguna propiedad, tenemos por tanto dos soluciones. Resolvemos ahora dos triángulos esféricos:

Uno para $A_1=69^\circ 08' 09''$ y otro para $A_2=110^\circ 51' 51''$

Datos conocidos del 1º triángulo: $\mathbf{A_1=69^\circ 08' 09''}$, \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{B}

Aplicando las analogías de Neper:

$$\operatorname{tg} \frac{c_1}{2} = \frac{\cos \frac{A_1 + B}{2}}{\cos \frac{A_1 - B}{2}} \operatorname{tg} \frac{a + b}{2} = 1,5370151 \Rightarrow \frac{c_1}{2} = 56^\circ 57' 5.92'' \Rightarrow \mathbf{c_1 = 113^\circ 54' 12''}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{A_1+B}{2}} = 1,04520437 \Rightarrow \frac{C_1}{2} = 46^\circ 15' 58.25'' \Rightarrow C_1 = 92^\circ 31' 57''$$

Datos conocidos del 2º triángulo: $A_2 = 110^\circ 51' 51''$, a, b, B

Aplicando las analogías de Neper:

$$\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} = \frac{\cos \frac{A_2+B}{2}}{\cos \frac{A_2-B}{2}} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 3,810561712 \Rightarrow \frac{c_2}{2} = 75^\circ 17' 13.2'' \Rightarrow c_2 = 150^\circ 35' 27.8''$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{A_2+B}{2}} = 3,436280124 \Rightarrow \frac{C_2}{2} = 73^\circ 46' 27.66'' \Rightarrow C_2 = 147^\circ 32' 55.3''$$

g) Dos ángulos y un lado no comprendido entre ellos

$a = 70^\circ, B = 119^\circ, A = 76^\circ$

Solución:

g) Por el teorema del seno:

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 119^\circ}{\operatorname{sen} 76^\circ} = 0,8470342211 \Rightarrow b = \begin{cases} b_1 = 57^\circ 53' 26'' \\ b_2 = 180^\circ - 57^\circ 53' 26'' = 122^\circ 6' 34'' \end{cases}$$

pero al ser $B > A$ ha de verificarse que $b > a = 70^\circ$, luego, en este caso $b = b_2 = 122^\circ 6' 34''$ y solo hay una solución válida.

Aplicando las analogías de Neper:

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 1,322596405 \Rightarrow \frac{c}{2} = 52^\circ 54' 27'' \Rightarrow c = 105^\circ 48' 53.9''$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = 1,121304997 \Rightarrow \frac{C}{2} = 48^\circ 16' 22.24'' \Rightarrow C = 96^\circ 32' 44.49''$$

2.- Resolver, si es posible, los siguientes triángulos esféricos rectángulos, siendo $A=90^\circ$:

a) $a=60^\circ 07' 13''$, $C=59^\circ 00' 12''$.

Solución:

a) $\cos(90^\circ - c) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C = 0,743252702177866$

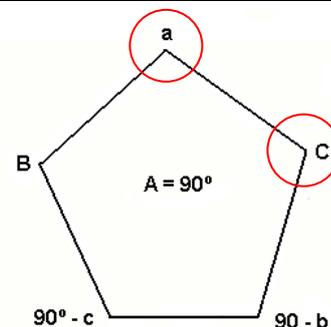
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 48^\circ 00' 33'' < a \Leftrightarrow C < A \\ 131^\circ 59' 27'' \end{cases} \Rightarrow c = 48^\circ 00' 33''$$

$$\operatorname{cosec} a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \Rightarrow \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{cosec} a \operatorname{tg} C} = 1,205950365$$

$$\Rightarrow B = 50^\circ 20' 1.49''$$

$$\operatorname{cosec} C = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} b = \operatorname{tga} \operatorname{cosec} C = 0,8963258673 \Rightarrow b = 41^\circ 52' 14''$$



b) $b=167^{\circ} 03' 38''$, $B=157^{\circ} 57' 33''$.

Solución:

b) $\text{sen} a = \text{sen} b / \text{sen} B = 0,5966976997$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 36^{\circ} 38' 02'' < b \Leftrightarrow A < B \\ a_2 = 143^{\circ} 21' 58'' < b \Leftrightarrow A < B \end{cases}$

No podemos rechazar ninguno de los valores obtenidos luego:

Existen dos soluciones de tal forma que b es obtuso:

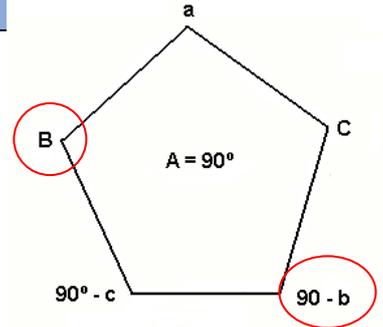
$\text{sen} c = \frac{\text{tg} b}{\text{tg} B} = 0,5649939 \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 34^{\circ} 34' 34'' \\ c_1 = 145^{\circ} 25' 26'' \end{cases}$, ya que al ser a_1 aguda, c_1 y b han de ser ambos

obtusos.

$\text{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b} = 0,95106682 \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 72^{\circ} 00' 07'' \\ C_1 = 107^{\circ} 59' 53'' \end{cases}$, ya que al ser a_1 aguda, C_1 y B han de ser ambos

obtusos.

Recuerda que a catetos obtusos corresponden ángulos obtusos e hipotenusa aguda.



c) $a=112^{\circ} 42' 36''$, $b=76^{\circ} 44' 15''$.

Solución:

c) Por el teorema del seno:

$\text{sen} B = \frac{\text{sen} b \text{sen} A}{\text{sen} a} = \frac{\text{sen} 76^{\circ} 44' 15'' \text{sen} 90^{\circ}}{\text{sen} 112^{\circ} 42' 36''} = 1,0551$ No existe un triángulo esférico con los datos dados.

3.- Un avión se dirige de Madrid a Nueva York con una velocidad de 990 km/h. Hallar las *coordenadas geográficas* del punto donde se encontrará el avión al cabo de 3 horas de vuelo.

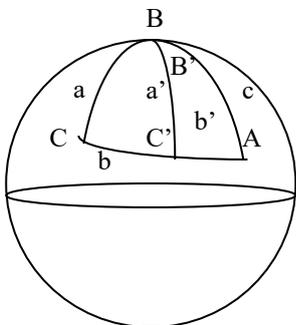
Coordenadas geográficas de Madrid: $40^{\circ} 24'$ latitud N, $3^{\circ} 41'$ longitud O.

Coordenadas geográficas de Nueva York: $40^{\circ} 45'$ latitud N, 76° longitud O.

Utilizar como radio de la esfera sobre la que se mueve el avión: 6371 km.

Solución:

Sea $A =$ Madrid, $B =$ Polo Norte, $C =$ Nueva York, $C' =$ Punto donde se encuentra el avión al cabo de tres horas de vuelo. En el triángulo esférico ABC:



$c = 90^{\circ} - 40^{\circ} 24' = 49^{\circ} 36'$

$a = 90^{\circ} - 40^{\circ} 45' = 49^{\circ} 15'$

$B = 76^{\circ} - 3^{\circ} 41' = 72^{\circ} 19'$.

Teorema del coseno en ABC para hallar b:

$\cos b = \cos a \cos c + \text{sen} a \text{sen} c \cos B = 0,5936860994 \Rightarrow$

$b = 53^{\circ} 15' 04''.51$

Teorema del coseno de nuevo, para calcular A:

$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen} b \text{sen} c \cos A$

$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen} b \text{sen} c} = 0,4342620360 \Rightarrow A = 64^{\circ} 15' 42''$

Del triángulo $AB'C'$, se conocen:

$A = 64^{\circ} 15' 42''$, $c = 49^{\circ} 36'$ y puede calcularse fácilmente b' pues es la distancia recorrida por el avión en tres horas de vuelo: $b' = 990 \text{ km/h} \cdot 3\text{h} = 2970 \text{ km}$.

En unidades angulares, resulta ser: $\left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot 6371 \text{ km} \rightarrow 360^{\circ} \\ 2970 \text{ km} \rightarrow b' \end{array} \right\} \Rightarrow b' = 26^{\circ} 42' 35''.46$.

Se aplica el teorema del coseno al triángulo AB'C', para obtener el lado a', que corresponde a la colatitud de C':

$$\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos A = 0.7276055101 \Rightarrow a' = 43^\circ 18' 50''$$

$$\text{Latitud del punto } C' = 90^\circ - 43^\circ 18' 50'' = \mathbf{46^\circ 41' 10'' \text{ N.}}$$

Se aplica el teorema del seno al triángulo AB'C', para obtener el ángulo B':

$$\frac{\sin b'}{\sin B'} = \frac{\sin a'}{\sin A} \Rightarrow \sin B' = \frac{\sin b' \cdot \sin A}{\sin a'} = 0.5902060918 \Rightarrow B' = 36^\circ 10' 17''$$

Nótese que B' ha de ser agudo por ser $B' < B$.

$$\text{Longitud el punto } C' = 36^\circ 10' 17'' + 3^\circ 41' = \mathbf{39^\circ 51' 17'' \text{ O}}$$

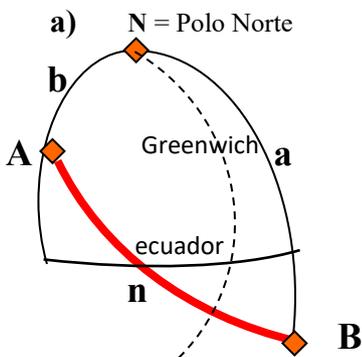
4.- Se conocen las coordenadas geográficas de las dos ciudades siguientes:

$$\text{Ciudad A: Toronto} \begin{cases} \text{Longitud} = 79^\circ 24' 59'' \text{ O} \\ \text{Latitud} = 43^\circ 42' 00'' \text{ N} \end{cases}$$

$$\text{Ciudad B: Pretoria} \begin{cases} \text{Longitud} = 28^\circ 35' 41'' \text{ E} \\ \text{Latitud} = 30^\circ 47' 00'' \text{ S} \end{cases}$$

a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra $R = 6371 \text{ km}$.

Solución:



En el triángulo esférico NAB:

$$\text{Conocemos NA (} 90^\circ - \text{Latitud de A): } b = 90^\circ - 43^\circ 42' 00'' = 46^\circ 18' 00''$$

$$\text{Conocemos NB: (} 90^\circ + \text{Latitud de B): } a = 90^\circ + 30^\circ 47' 00'' = 120^\circ 47' 00''$$

$$\text{Conocemos el ángulo N = } 79^\circ 24' 59'' + 28^\circ 35' 41'' = 108^\circ 00' 40''$$

Queremos calcular AB es decir n. Para ello aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABN:

$$\cos n = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos N =$$

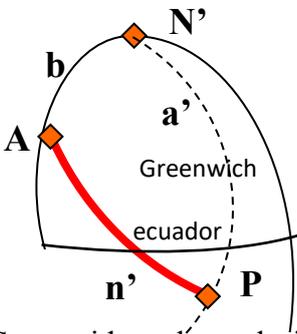
$$= \cos 120^\circ 47' \cos 46^\circ 18' + \sin 120^\circ 47' \sin 46^\circ 18' \cos 108^\circ 00' 40'' = -0.545630742,$$

obteniéndose: $n = 123^\circ 04' 5.31''$. Pasando esta medida del lado n a unidades lineales, la distancia

$$\text{entre ambas ciudades es: } L = \frac{2\pi R}{360^\circ} n = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360^\circ} 123^\circ 04' 5.31'' = \mathbf{13684.55 \text{ km.}}$$

b) Un avión se dirige de Toronto a Pretoria siguiendo un círculo máximo. Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich, así como el rumbo que lleva el avión en ese momento.

b) *Solución:*



Se considera ahora el triángulo esférico de vértices AN'P. Llamamos A, N' y P a los ángulos de este triángulo y a', n' y b serán los respectivos lados opuestos.

$$N' = \text{Long de A} = 79^\circ 24' 59''$$

El ángulo A se calcula en el triángulo ANB mediante el teorema del coseno,

$$\cos a = \cos a \cos n + \text{sen } a \text{ sen } n \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos n}{\text{sen } b \text{ sen } n} =$$

$$= (\cos(120^\circ 47') - (\cos(46^\circ 18') \cos(123^\circ 4' 5.31'')))/(\text{sen}(46^\circ 18') \text{sen}(123^\circ 4' 5.31'')), \quad \text{obteniéndose:}$$

$$A = 102^\circ 51' 27.64''$$

En el triángulo AN'P, se conocen entonces dos ángulos A y N' y el lado comprendido b. Mediante el teorema del coseno para los ángulos, se obtiene el tercer ángulo:

$$\cos P = -\cos A \cos N' + \text{sen } A \text{ sen } N' \cos b = -\cos 102^\circ 51' 27.64'' \cos 79^\circ 24' 59'' + \text{sen } 102^\circ 51' 27.64'' \text{sen } 79^\circ 24' 59'' \cos 46^\circ 18' = 0.7029726067 \Rightarrow P = 45^\circ 20' 2.45''$$

Ya puede calcularse el lado a' mediante el teorema del coseno para los ángulos,

$$\cos A = -\cos P \cos N' + \text{sen } P \text{ sen } N' \cos a' \Rightarrow$$

$$\cos a' = \frac{\cos A + \cos P \cos N'}{\text{sen } P \text{ sen } N'} = (\cos 102^\circ 51' 27.64'' + \cos 45^\circ 20' 2.45'' \cos 79^\circ 24' 59'')/(\text{sen } 45^\circ 20' 2.45'' \text{sen } 79^\circ 24' 59'') = -0.1336183225, \text{ resultando ser: } a' = 97^\circ 40' 43.43''$$

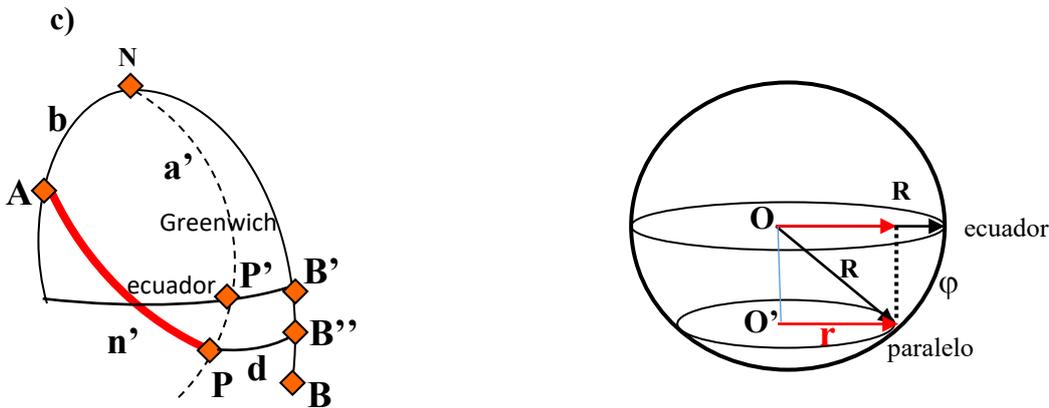
$$\text{sen } 79^\circ 24' 59'' = -0.1336183225, \text{ resultando ser: } a' = 97^\circ 40' 43.43''$$

Por tanto, la latitud pedida del punto P es $97^\circ 40' 43.43'' - 90^\circ = 7^\circ 40' 43.43'' \text{ S}$

Y el rumbo del avión en ese momento es: $180^\circ - P = 180^\circ - 45^\circ 20' 2.45'' = 134^\circ 39' 57.55''$

c) Si al llegar al mencionado punto P el avión cambiara de rumbo y girase hacia el este siguiendo el paralelo de P, ¿qué distancia d recorrería hasta sobrevolar el meridiano de Pretoria?

Solución:



Llamando P' y B' a los puntos de corte con el ecuador de los meridianos de P (el de Greenwich) y de B (el de Pretoria), y B'' al punto de corte del paralelo de P con el meridiano de Pretoria, se observa que:

El arco P'B' mide la longitud de B ($28^{\circ} 35' 41''$); el arco B'B'' mide la latitud de P ($7^{\circ} 40' 43.43''$).

Por tanto, en unidades lineales es $P'B' = \frac{2\pi R}{360^{\circ}} P = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360^{\circ}} 28^{\circ} 35' 41'' = 3179.59 \text{ km}$.

Sabiendo que la longitud del arco P'B' sobre el ecuador es la longitud del arco PB'' sobre el paralelo dividida entre el coseno del ángulo que mide la latitud de dicho paralelo, se tiene que: $d = \text{Longitud del arco PB''}$

$$\text{arco PB''} = 3179.59 \cdot \cos(7^{\circ} 40' 43.43'') = \mathbf{3151.08 \text{ km}}$$