1.- En cada uno de los siguientes casos, razonar si puede existir al menos un triángulo esférico con los elementos dados. En caso afirmativo, calcular los elementos restantes:

a) Tres lados: a = 60º 00’31’’, b = 137º 20’40’’, c = 116º 00’32’’.

Solución:

b) Tres lados: a = 90º, b = 48º 50’, c = 67º38’,

Solución:

c) Tres ángulos: A = 70º 00’25’’, B = 131º 10’15’’, C = 94º 50’53’’

Solución:

d) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

a = 64º 24’03’’, b = 42º 30’10’’, C = 58º 40’52’’

Solución:

e) Dos ángulos y el lado comprendido entre ellos

c = 116º 12’05’’, A = 70º 51’15’’, B = 131º 20’26’’

Solución:

f) Dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos

a = 58 º46’22’’, b = 137 º02’50’’, B = 131º 52’33’’

Solución:

g) Dos ángulos y un lado no comprendido entre ellos

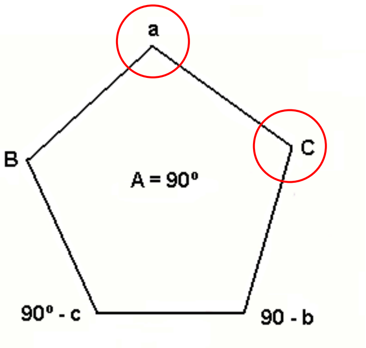
a = 70º, B = 119º, A = 76º

Solución:

2.- Resolver, si es posible, los siguientes triángulos esféricos rectángulos, siendo A=90º:

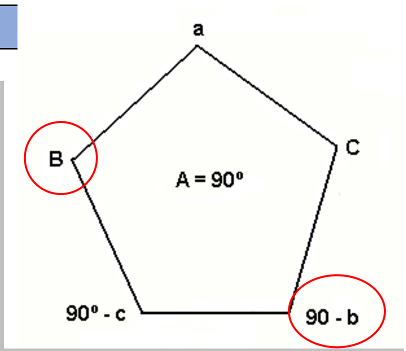
a) a=60º 07' 13", C=59º 00' 12".

***Solución*:**



b) b=167º 03’ 38”, B=157º 57’ 33”.

Solución:



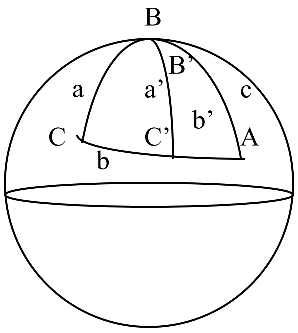
c) a=112º 42’ 36”, b=76º 44’ 15”.

Solución:

3.- Un avión se dirige de Madrid a Nueva York con una velocidad de 990 km/h. Hallar las *coordenadas geográficas* del punto donde se encontrará el avión al cabo de 3 horas de vuelo.
Coordenadas geográficas de Madrid: 40º 24’ latitud N, 3º 41’ longitud O.
Coordenadas geográficas de Nueva York: 40º 45’ latitud N, 76º longitud O.
Utilizar como radio de la esfera sobre la que se mueve el avión: 6371 km.

Solución:

Sea A = Madrid, B = Polo Norte, C = Nueva York, C’ = Punto donde se encuentra el avión al cabo de tres horas de vuelo. En el triángulo esférico ABC:



c =

a =

B =

Teorema del coseno en ABC para hallar b:

Teorema del coseno de nuevo, para calcular A:

Del triángulo AB’C’, se conocen:

$A = 64^\circ\ 15'\ 42''$, c = 49º 36’ y puede calcularse fácilmente b’ pues es la distancia recorrida por el avión en tres horas de vuelo: $b' = 990\ \text{km/h} \cdot 3\text{h} = 2970\ \text{km}$.

En unidades angulares, resulta ser:

Se aplica el teorema del coseno al triángulo AB'C', para obtener el lado a', que corresponde a la colatitud de C':

Latitud del punto C' =

Se aplica el teorema del seno al triángulo AB'C', para obtener el ángulo B':

$$\frac{\text{sen } b'}{\text{sen } B'} = \frac{\text{sen } a'}{\text{sen } A} \Rightarrow \text{sen } B' = \frac{\text{sen } b' \cdot \text{sen } A}{\text{sen } a'} = 0.5902060918 \Rightarrow B' = 36^{\circ}\ 10'\ 17''$$

Nótese que B' ha de ser agudo por ser B'< B.

Longitud el punto C' =

4.- Se conocen las coordenadas geográficas de las dos ciudades siguientes:

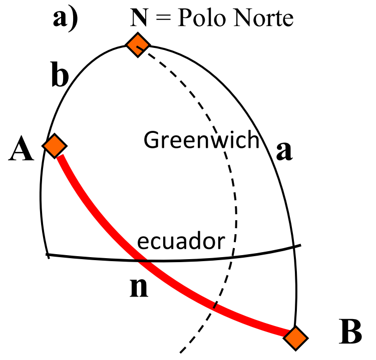
Ciudad A: Toronto $\begin{cases} \text{Longitud} = 79^{\circ}\ 24'\ 59''\ \text{O} \\ \text{Latitud} = 43^{\circ} 42'\ 00''\ \text{N} \end{cases}$

Ciudad B: Pretoria $\begin{cases} \text{Longitud} = 28^{\circ}\ 35'\ 41''\ \text{E} \\ \text{Latitud} = 30^{\circ}\ 47'\ 00''\ \text{S} \end{cases}$

a) Calcular la distancia entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km.

Solución:

a)



En el triángulo esférico NAB:

Conocemos NA (90º – Latitud de A):

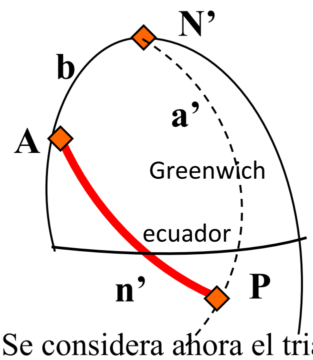
Conocemos NB: (90º + Latitud de B):

Conocemos el ángulo N =

Queremos calcular AB es decir n. Para ello aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABN:

b) Un avión se dirige de Toronto a Pretoria siguiendo un círculo máximo. Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich, así como el rumbo que lleva el avión en ese momento.

b) ***Solución:***



Se considera ahora el triángulo esférico de vértices AN'P. Llamamos A, N' y P a los ángulos de este triángulo y a', n' y b serán los respectivos lados opuestos.

En el triángulo AN'P, se conocen entonces dos ángulos A y N' y el lado comprendido b. Mediante el teorema del coseno para los ángulos, se obtiene el tercer ángulo:

Ya puede calcularse el lado a' mediante el teorema del coseno para los ángulos,

$$\cos A = -\cos P \cos N' + \operatorname{sen} P \operatorname{sen} N' \cos a' \Rightarrow$$

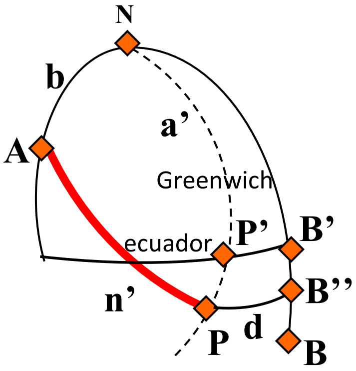
Por tanto, la latitud pedida del punto P es

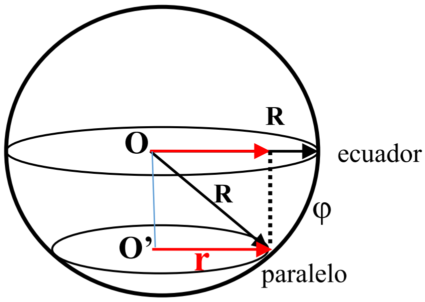
Y el rumbo del avión en ese momento es:

c) Si al llegar al mencionado punto P el avión cambiara de rumbo y girase hacia el este siguiendo el paralelo de P, ¿qué distancia d recorrería hasta sobrevolar el meridiano de Pretoria?

Solución:

c)





Llamando P’ y B’ a los puntos de corte con el ecuador de los meridianos de P (el de Greenwich) y de B (el de Pretoria), y B’’ al punto de corte del paralelo de P con el meridiano de Pretoria, se observa que:

El arco P’B’ mide la longitud de B

Por tanto, en unidades lineales es P

Sabiendo que la longitud del arco P’B’ sobre el ecuador es la longitud del arco PB’’ sobre el paralelo dividida entre el coseno del ángulo que mide la latitud de dicho paralelo, se tiene que: d = Longitud del arco PB’’=