Sistemas, matrices y determinantes

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las *matrices*

a) $B = (A + I)\left((A - I)^{-1}\right)$, b) $C = (I - A)^3$.

Solución

2.- Comprobar que cualquier *matriz cuadrada* se puede expresar de forma única como suma de dos matrices, una *simétrica* y otra *antisimétrica*.

Solución

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, averiguar para qué valores del *parámetro* λ la matriz A tiene *inversa*.

Solución

4.- Si la dimensión de las matrices A, B, C, y D son 3x3, 2x2, 3x2 y 3x2 respectivamente. Calcúlese la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales:

a) [1] $AXB+C=D$. [2] $A^tX=CB$. [3] $XA=DD^t+2CC^t$.

b) Hallar el valor de X en los apartados anteriores siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

5.- Hallar dos *matrices* X e Y de dimensión 2x3 tales que $\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases}$.

La misma cuestión para el caso concreto $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución

6.- a) Hallar A^3, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \operatorname{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Hallar una *matriz* B tal que $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & 38 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

c) Hallar C^n, $n \in N$, donde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

7.- Estudiar la *compatibilidad* o *incompatibilidad* del siguiente sistema, según los valores del *parámetro* a resolviéndolo cuando sea posible:

$$\begin{cases} -6x - 6y + (11-a)z + 12 = 0 \\ 3x + (2\text{-}a)y\text{-}6z + 3 = 0 \\ (2-a)x + 3y\text{-}6z + 21 = 0 \end{cases}$$

Solución

8.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 3 & \lambda + 2 & 2\lambda + 1 & 3\lambda \\ 3 & 2\lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$.

Solución

9.- Usa el *teorema de Rouché* para explicar qué tipo de sistema de *ecuaciones lineales*:

a) Constituyen las ecuaciones de tres rectas en el plano que determinen un triángulo.

b) Constituyen las ecuaciones de tres planos en el espacio que determinen un tetraedro.

Solución

10.- La matriz A, cuadrada de orden tres verifica la ecuación $A^3 + A = B$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿se puede asegurar que la matriz A es *regular*?

Solución

11.- ¿Existe alguna *matriz regular* de orden impar tal que $A^t = -A^3$?

Solución

12.- Calcúlese el *rango* de las siguientes matrices mediante el método de los *menores*. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

13.- Sean A, B $\in M_4(R)$, con $|A| = 4$ y $|B| = -3$. Calcular los *determinantes* siguientes: $|AB|$, $|A^{-1}|$, $|5A|$, $|A^3|$, $|B^t|$ y $|-B|$.

Solución

14.- Sean B y $(B - I)$ matrices de orden tres *inversibles*.

a) Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} BX + Y = 2B \\ B^3X + BY = 0 \end{cases}$.

b) Hallar X e Y para el caso concreto $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución

15.- Sean X, C y D tres matrices de orden 3. Suponiendo que la matriz A-2I es *inversible*, despejar X en la ecuación: $2X + C - A^t = D + (X^tA^t - A)^t$.

Solución

16.- Hallar la *inversa* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y escribir A como producto de *matrices elementales*.

Solución

17.- ¿La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ es invertible?

Solución

18.- Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Solución

19.- Estudiar si existe alguna matriz A de dimensión 3x2 talque $AA^t = I$, donde I es la *matriz unidad* de orden 3.

Solución

20.- Comprobar que el valor de un *determinante de Vandermonde* es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & p \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & p^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (b-a)(c-a)\dots(p-a)\cdot \\ \cdot(c-b)\dots(p-b)\cdot \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Solución

21.- Discutir, en función del *parámetro* a, el siguiente sistema de *ecuaciones lineales*
$$\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ 2x+y+3z = -4 \\ x-y+(a+2)z = -3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z = -3a^2-8 \end{cases}$$

Solución

22.- a) Resolver el sistema lineal siguiente $AX = B$ mediante el *método de Gauss*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b) Hallar $C \in M_3(R)$ tal que CA sea una *matriz triangular superior* equivalente por filas a A.

Solución

23.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1-a \\ a & ab & 2 \end{pmatrix}$; se pide:

a) Estudiar el *rango* de A en función de los parámetros reales a y b.

b) Para b = 4, consideremos el sistema de *ecuaciones lineales* AX = B, donde $B = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$. Discutir el sistema según los valores del *parámetro* a y resolverlo para a = 0.

c) Calcular la *inversa* de A-2I para a=b=3.

Solución

24.- Sean A y B *matrices cuadradas* de orden n. Probar que si I-AB es *invertible*, entonces I-BA también es invertible y que $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$. Nota: I es la *matriz unidad* de orden n.

Solución

25.- Sea A una *matriz cuadrada* de orden n tal que $A^2 + 2A + I = 0$. Entonces A es *invertible*.

Solución

26.- Encontrar el conjunto de matrices que *conmutan* con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

27.- Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verifica la relación:

$A^n = 3^{n-1}A,\ n \in \mathbb{N}$.

Solución

28.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar $A^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Solución

29.- Hallar p y q para que se verifique la ecuación: $A^2 + pA + qI = (0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

30.- Resolver la siguiente ecuación matricial C+AX=DB-EX siendo $|A + E| \neq 0$.

Solución

31.- Hallar las *matrices inversas* de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

32.- Probar que AA^t y A^tA son siempre *matrices simétricas*. ¿Es *conmutativo* el producto anterior? Mostrar también que $A + A^t$ es simétrica, si A es *cuadrada*; ¿qué sucede con $A - A^t$?

Solución

33.- a) Si B es una *matriz antisimétrica*, ¿qué se puede decir de $C=A^tBA$?
b) Si A y B son *matrices simétricas*, ¿qué se puede decir de AB-BA?

Solución

34.- a) Hallar la *inversa* de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ b) Escribir A como producto de *matrices elementales*.

Solución

35.- Sabiendo que las matrices A, X e Y son de orden 7 y que el *determinante* de A es igual a $k \neq 0$, se pide:

a) Calcular los *determinantes* de A^2, $4A$, A^{-1}, $2A^2A^{-1}$, $A+A$.

b) Suponiendo que $A-I$ sea invertible, resolver el sistema: $\begin{cases} AX + Y = 2A \\ A^3X + AY = (0) \end{cases}$

c) Resolver la siguiente ecuación matricial siendo B, C matrices de orden7: $XA^2 - XA + CA = (X + B)A^2 + 3XA$

Solución

36.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^2, A^3 y dar la expresión general de A^n.

b) Comprobar que $A^3 - 3A^2 + 3A = I$.

c) Obtener A^{-1}.

Solución

37.- Sea A una *matriz ortogonal* ($A^{-1}=A^t$). Se pide:

a) Estudiar si A^{-1} y A^t son también matrices ortogonales.

b) Hallar $|A|$.

c) Si B es otra *matriz ortogonal* del mismo orden que A, estudiar si AB es ortogonal.

Solución

38.- Discutir, según los valores de los *parámetros* a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. Resolverlo para a = b = 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad -3x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad\qquad + 2x_5 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + a\,x_4 + x_5 = b \end{cases}$$

Solución

39.-a) Resolver el sistema matricial siguiente:

$$\begin{cases} 3AX + 4Y = I_3 \\ 3X + 2Y = O_3 \end{cases}$$

¿Qué condición ha de cumplirse para que el sistema anterior sea *compatible*?

b) La matriz solución X ¿puede verificar $|X| = 0$?

c) Resolver el sistema de *ecuaciones lineales*:

$$\begin{cases} 2x + 0y + 3z + t = 0 \\ 0x + 0y + z - t = 0 \\ x + 0y + 0z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solución

40.- a) Estudiar el *rango* de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & a & b \end{pmatrix}$ según los valores de a y b.

b) Resolver el sistema de *ecuaciones lineales* cuya matriz ampliada es M en los casos en que sea *compatible*.

Solución

41.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ hallar:

a) En función de los valores p y q, una matriz X tal que $AX = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

b) Una matriz Y tal que $A^2Y + AY = A$.

c) Un valor de λ tal que $|A - \lambda I| = 0$.

d) El valor de los *determinantes* siguientes:

$$|A^5|,\quad |5A|,\quad |A^{-1}|,\quad |-A|,\quad |A \cdot A^t|,\quad |A + A^t|.$$

Solución

42.- Sean A, B, X, e $Y \in M_n(R)$ matrices *inversibles* que verifican el sistema:

$$\begin{cases} 2AX^{-1} + Y = 0 \\ -3A - YX = (AB)^{-1} X \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar X eY.

b) Resolverlo para el caso concreto: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

43.- a) Calcular las *matrices cuadradas* de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes: $2X + Y = B$

$$X - 2Y = C$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcular, en función de B y C, la matriz Z definida por:

$$Z = (2X + Y)\,X - (2X + Y)(2Y)$$

Solución

44.- Sabiendo que las matrices X e Y son de *dimensión* 2x3 y verifican el sistema $\left.\begin{array}{l} 5X - 2Y = A \\ 3X^t + 2Y^t = B \end{array}\right\}$ en el que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, hallar dichas matrices X e Y.

Solución

45.- Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a. Hallar el *rango* de B para los distintos valores de h

b. Calcular para qué valores de h existe la *matriz inversa* de B.

c. ¿Para qué valores de h la matriz B es *ortogonal*?

d. Para el valor h = 2, resolver el sistema matricial siguiente: $\begin{cases} BX + Y = 2B \\ B^2X + BY = I \end{cases}$

Solución

46.- a) Demostrar que $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, siendo A y B matrices *inversibles* del mismo orden.

b) Consideremos la ecuación matricial $[I-(BA)^t]X-(C-I)^{-1}=DX-A^tB^tX$, siendo A,B,C,D matrices cuadradas de orden n e I la *matriz unidad* del mismo orden.

i) Despejar X.

ii) ¿Qué condición ha sido necesaria para poder despejar X?

iii) Hallar X, si es posible, en cada uno de los siguientes casos.

1) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

47.- a) Discutir el siguiente sistema según los distintos valores de *a*:

$$\begin{cases} (1-a)x + (1+2a)y + 2(a+1)z = a \\ ax + ay = 2(a+1) \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z = a^2 - 2a + 9 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema para el valor de *a* que hace al *sistema compatible indeterminado*.

c) Para el valor de *a* del apartado anterior razonar cuál es el mínimo número de *ecuaciones linealmente independientes* y qué ecuación o ecuaciones son *combinación lineal* del resto. ¿Hay alguna solución en la cual $x = \frac{2}{\sqrt{11}}$?

Solución

48.- Sean A, B, C, X matrices cuadradas de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X: $(A + B^t X^t)^t - (A^{-1} B^t)^t = (C - 2X)B - (A^t B^{-1})^{-1}$

Solución

49.- a) Discutir y resolver, según los valores de *m*, el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \\ 3x + my + z = m - 2 \end{cases}$$

b) Hallar, para *m* = 2, la *solución particular* tal que *y* =1.

Solución

50.- Dado el sistema

$$\begin{aligned} ax + y + z + t &= 1 \\ x + ay + z + t &= b \\ x + y + az + t &= b^2 \\ x + y + z + t &= b^3 \end{aligned}$$

Se pide:

1) Discutirlo según los valores de a y b.

2) Resolverlo cuando sea *compatible*.

Solución

51. a) Dada la ecuación matricial B (X A - D)= C+ X A, donde A, B, C, D y X son matrices cuadradas de orden n, obtener la *matriz* X, sabiendo que A, B y (B-I) tienen inversa. Siendo I la *matriz identidad* de orden n.

b) Hallar dos matrices X e Y de *dimensión* 2x3 tales que cumplan que

$$\begin{cases} X + Y = A \\ 4X + \frac{2}{3}Y = B \end{cases}$$

siendo A y B dos matrices cualesquiera de la misma *dimensión* 2x3.

c) Dado el *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} nx + 2y + z = 1 \\ -2x - ny + z = 1 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases}$ se pide, estudiar las soluciones del sistema en función del parámetro n.

Solución

52.- a) En el siguiente sistema de ecuaciones matriciales formado por matrices cuadradas de orden 3, se pide obtener las matrices X e Y

$$\begin{cases} 3AX + 4Y = I \\ 3X + 2Y = O \end{cases}$$

Siendo I la *matriz identidad* de orden 3 y 0 la *matriz nula* de orden 3.

b) Dada la ecuación matricial B(XA+D)=-C+3BXA , donde las matrices A,B,C y D son matrices cuadradas inversibles, se pide obtener la matriz X.

c) Dado el *sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ -2x - ay + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Discutir las soluciones del sistema en función de los valores del parámetro a.

Solución

53.- La *matriz* A es *nilpotente* de orden 3 ($A^3=0$) y la matriz B = I + A. Demostrar que $B^{-1} = I - A + A^2$.

Solución

54.- Dada la ecuación matricial X A = A^t+X, donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, obtener la *matriz* X.

Solución

55.- Probar que si I-AB es *inversible*, entonces la *matriz* I-BA también lo es y verifica:

$$(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$$

Solución

56.- Sean A, B, C, X *matrices cuadradas* de orden n. Se pide resolver la siguiente ecuación matricial indicando, cuando sea preciso, las condiciones que deben cumplir las matrices que vayan surgiendo para poder despejar la incógnita X:

$$(A + XB) - (A^{-1} B) = (C - 2X)B - (B^{-1}A)^{-1}$$

Solución

Matriz.

Una **matriz** es un conjunto de elementos de un cuerpo K ordenados en filas y columnas.

Si la matriz tiene m filas y n columnas, se escribe así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Matriz cuadrada

Una **matriz** es **cuadrada** cuando su número de filas coincide con el número de columnas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

Matriz inversa de una matriz cuadrada

Sea $A \in M_n(K)$. **Matriz inversa de A** es la matriz $A^{-1} \in M_n(K)$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, siempre que dicha matriz exista.

Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde los **coeficientes** $\mathbf{a_{ij}}$, i=1,...,m, j=1,...,n, y los **términos independientes** $\mathbf{b_i}$, i=1,...,m, son escalares de un cuerpo K y $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ son las **incógnitas**.

Matriz nilpotente

Una **matriz** $A \in M_n(K)$ es: **nilpotente** si para algún número natural k, $A^k = 0$.
La matriz A es un divisor de cero.

Compatible

- **Ecuación compatible** es aquella que tiene alguna solución. Puede ser, a su vez, **compatible determinada** cuando tiene una única solución, y **compatible indeterminada** cuando tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas soluciones).
- **Sistema compatible** es aquél que tiene alguna solución. Puede ser, a su vez, **compatible determinado** cuando tiene una única solución, y **compatible indeterminado** cuando tiene más de una solución (en este caso tendrá infinitas soluciones).

Matriz unidad

La **matriz unidad de orden n** tiene nulos todos sus elementos excepto los de la diagonal principal que son unos; se denota por $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Dimensión

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se dice que la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tiene **dimensión** $m \times n$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Solución general

La **solución general** (ó simplemente la solución) de una ecuación es el conjunto formado por todas las soluciones particulares.
La **solución general** (ó simplemente la solución) de un sistema es el conjunto formado por todas las soluciones particulares.

Solución particular

Una **solución particular** de una ecuación lineal es una n-upla de escalares $(c_1, c_2, ..., c_n)$ tal que $a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b$.
Una **solución particular** de un sistema de ecuaciones lineales es una n-upla de escalares $(c_1, c_2, ..., c_n)$ que sea solución de cada una de las m ecuaciones del sistema.

Matriz nula

La **matriz nula** de dimensión m $\times$ n es la que tiene nulos todos sus elementos.

Rango de un sistema de vectores

Rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Rango de una aplicación lineal

Rango de la aplicación lineal f es la dimensión del subespacio Imagen de f.

Rango de una matriz

Rango de la matriz A es el orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

En Estadística

Rango o recorrido de una variable estadística

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

Matriz Ortogonal

Una matriz $A \in M_n$ es **ortogonal** cuando su inversa coincide con su traspuesta, es decir, $A^{-1} = A^t$.

Linealmente independientes

Sean f_1, $f_2,\dots,f_k$ filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, $f_2,\dots,f_k$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0)=\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = 0,\ \forall i$.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1,\dots,\vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1,\dots,\vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{\mathbf{0}}=\lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1+\dots+\lambda_n\vec{\mathbf{a}}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=\mathbf{0},\ \forall \mathbf{i}$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Combinación lineal

Sean $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos **combinación lineal** *d*e los vectores $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1+...+\lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$.

Ecuación lineal

Se llama **ecuación lineal** a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$, así como el término independiente b, son escalares de un cuerpo conmutativo K, y $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2.

El **determinante de la matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$ es el escalar $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; se escribe así: $|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3.

El **determinante de la matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$ es el escalar: $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$; se escribe:

$$|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden n

Si $A \in M_n(K)$, se define el **determinante de A**, y se denota como antes, a la suma de los productos de los elementos de la primera fila de A por sus correspondientes adjuntos (que serán determinantes de orden n-1).

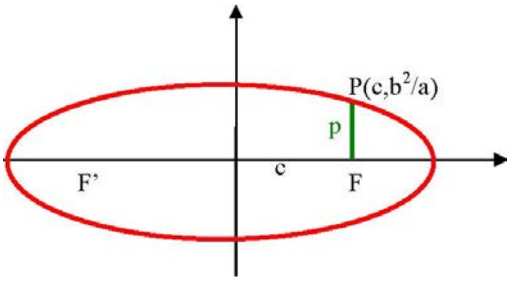
i) $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$, **desarrollo del determinante de A por los elementos de la fila i-ésima**.

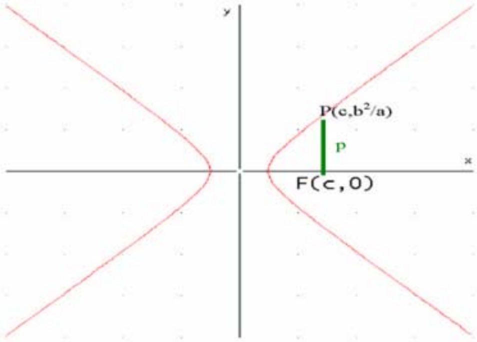
ii) $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$, **desarrollo del determinante de A por los elementos de la columna j-ésima**.

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Matriz elemental

Una **matriz elemental** es la que se obtiene efectuando operaciones elementales en las filas de la matriz unidad. Estas operaciones elementales son:

(1) Intercambiar entre sí las filas i y j: $I(i,j)= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & i & j \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$

(2) Multiplicar la fila i por un escalar α no nulo: $I(\alpha\, i)= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$

(3) Sumar a la fila i, la fila j multiplicada por un escalar α no nulo:

$$I(i+\alpha j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & i & j \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

matrices elementales que se obtienen al aplicar a la matriz unidad las operaciones elementales (1), (2) y (3), respectivamente.

Nota: Las operaciones elementales entre las columnas de una matriz $A \in \mathbf{M}_n$, se pueden expresar de manera análoga, como producto, a la derecha de A, por matrices elementales, las cuales se obtienen aplicando a la matriz identidad I_n la operación elemental correspondiente.

Matriz simétrica

Una **matriz** cuadrada es **simétrica** cuando $A^t = A$, es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, siendo i,j=1, 2, ..., n.

Matriz antisimétrica

Una **matriz** cuadrada es **antisimétrica** cuando $A^t = -A$, es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, i,j=1, 2, ..., n.

Método de Gauss-Jordan

Se trata de transformar un sistema de ecuaciones lineales S, mediante operaciones elementales y siempre que sea posible, en un sistema S' de la siguiente forma que denominaremos **diagonal**:

$$S' \equiv \begin{cases} x_1 & = b'_1 \\ \quad x_2 & = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \qquad\quad x_n & = b'_n \end{cases}$$

Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa

Sea $A \in M_n(K)$ invertible. Si encontramos $E_1, E_2, \dots, E_m$ matrices elementales tales que $E_m \dots E_2\, E_1\, A = I$, entonces, $E_m \dots E_2\, E_1\, A\, A^{-1} = I\, A^{-1}$ y, por tanto, $E_m \dots E_2\, E_1\, I = A^{-1}$.

Luego, efectuando en las filas de la matriz unidad las mismas operaciones elementales que efectuadas sobre las filas de A nos la transforman en la matriz unidad, obtenemos la matriz inversa de A. En esto consiste precisamente el método de Gauss cuya forma práctica de realización viene dada por el siguiente esquema:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} \dots \rightarrow (I|A^{-1})$$

Método de Gauss para la resolución de sistemas.

Sea S un sistema de ecuaciones lineales, el método de Gauss consiste en transformar S, mediante operaciones elementales, en un sistema S' de forma escalonada o triangular cuya resolución es inmediata o sea evidente que sea incompatible.

Matriz triangular inferior

Matriz triangular inferior es la que tiene nulos todos los elementos por encima de la diagonal principal.

Matriz triangular superior

Matriz triangular superior es la que tiene nulos todos los elementos por debajo de la diagonal principal.

Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Se puede generalizar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & c & \ldots & p \\ a^2 & b^2 & c^2 & \ldots & p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \ldots & p^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (b-a)(c-a)\ldots(p-a)\cdot \\ \cdot(c-b)\ldots(p-b)\cdot \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Incompatible

- **Ecuación incompatible** es aquella que no tiene ninguna solución:

$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c$, con $c \neq 0$.

Sistema incompatible es aquél que no tiene ninguna solución

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $S \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$ un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, siendo A la matriz de los coeficientes y A^* la matriz ampliada ($A^* = A \mid B$). Bajo estas hipótesis se verifica que:

1) S es compatible si y sólo si $r(A)=r(A^*)$.
2) Si, $r(A)=r(A^*)=n$ entonces S es compatible determinado.
3) Si $r(A)=r(A^*)<n$ entonces S es compatible indeterminado.

Matriz regular

Una **matriz** $A \in M_n(K)$ es: **Regular** cuando $|A| \neq 0$.

Menor complementario del elemento a_{ij}

Si $A=(a_{ij})\in M_3(K)$, **menor complementario del elemento a_{ij}**, se le denota por α_{ij}, y es el determinante de la submatriz de orden dos de A que se obtiene eliminando la fila **i** y la columna **j**.

Menor de orden h de A

Sea la matriz $A\in M_{m\times n}(K)$. Un **menor de orden h de A** es el determinante de una submatriz cuadrada de orden h de A. Evidentemente, ha de ser $h\leq m,n$.

Conmutativa

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por "+" $V \xrightarrow{+} V$

Conmutativa: A+B=B+A para cualesquiera $A, B \in V$.

Sea V un conjunto donde hemos una operación interna, que designaremos por "." $V \xrightarrow{\cdot} V$

Conmutativa: A.B=B.A para cualesquiera $A, B \in V$.

Escalar

Cada elemento de un cuerpo K, generalmente el de los números reales. Constituyen las coordenadas de un vector respecto de una base de un espacio vectorial.
Los escalares $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tales que $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$ son las **coordenadas del vector** $\vec{v}$ **respecto de la base** $B = \{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.