1.- Hallar la *longitud* de un grado del paralelo que corresponde a Pekín (116° 30' E, 40° N).

Solución

2.- En la geometría euclídea, los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, pero, en la geometría hiperbólica, desarrollada por Lobachevski, la suma de los lados de un triángulo es siempre menor de 180° y en la geometría de Riemann dicha suma es siempre superior a 180°, como en el caso de un triángulo situado sobre una esfera.

Obtener el *área del triángulo esférico* determinado por: La Coruña (4° 43' O, 43° 22' N), Barcelona (5° 50' E, 41° 24' N) y Las Palmas (11° 44' O, 28° 9' N).

Solución

3.- En cada uno de los siguientes casos, razonar si puede existir al menos un *triángulo esférico* con los elementos dados. En caso afirmativo, calcular los elementos restantes:

a. Tres lados: a = 60° 00'31'', b = 137° 20'40'', c = 116° 00'32''

b. Tres lados: a = 90°, b = 48° 50', c = 67°38',

c. Tres ángulos: A = 70° 00'25'', B = 131° 10'15'', C = 94° 50'53''

d. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

a = 64° 24'03'', b = 42° 30'10'', C = 58° 40'52''

e. Dos ángulos y el lado comprendido entre ellos

c = 116° 12'05'', A = 70° 51'15'', B = 131° 20'26''

f. Dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos

a = 58 °46'22'', b = 137 °02'50'', B = 131° 52'33''

g. Dos ángulos y un lado no comprendido entre ellos

a = 70°, B = 119°, A = 76°

Solución

4.- Hallar los lados a y b de un *triángulo esférico* del que se conoce:

A = 90°, B = 47° 54'54'', a - b = 13° 40'50''

Solución

5.- Resolver, si es posible, los siguientes *triángulos esféricos* rectángulos, siendo A=90°:

a) a=60° 07' 13'', C=59° 00' 12''.

b) b=167° 03' 38'', B=157° 57' 33''.

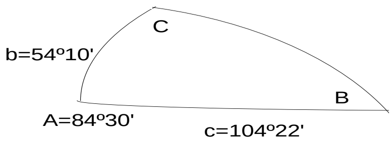
c) a=112° 42' 36'', b=76° 44' 15''.

Solución

6.- Dado el triángulo esférico de lados a=80°, b=40° y c=100°, hallar la *altura esférica* sobre el lado "a" y decir si es interior o exterior al triángulo.

Solución

7.- Calcular los arcos de *circunferencia máxima* correspondientes a:



a) *Altura* sobre el lado c.
b) *Mediana* sobre el lado c.
c) *Bisectriz* del ángulo C.

Solución

8.- Demostrar que en un *triángulo esférico rectángulo* se verifica:

1) Un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.
2) Si los catetos son ambos agudos o ambos obtusos, entonces la hipotenusa es aguda; pero si un cateto es agudo y otro es obtuso, entonces la hipotenusa es obtusa.

Solución

9.- Demostrar que en un *triángulo esférico equilátero* se verifica:

a) cos A = cos a /(1+cos a)
b) sec A - sec a = 1
c) 2 cos (a/2) sen (A/2) =1.

Solución

10.- Un avión vuela de Madrid a Tokio a una altitud de 10 000 m siguiendo un círculo máximo de la esfera terrestre. Sabiendo que las coordenadas de Madrid y Tokio son:
Madrid: latitud: Norte 40° 24'; longitud: Oeste 3° 41'
Tokio latitud: Norte 35° 40'; longitud: Este 139° 45'
y que el radio de la tierra es 6371 km, se pide:
a) ¿Qué *distancia* recorre el avión entre Madrid y Tokio?
b) ¿A qué *distancia* del Polo Norte pasa aproximadamente?
c) Se denomina Círculo Polar Ártico a una *circunferencia menor* sobre la tierra tal que en ella, en el solsticio de verano, el Sol no se pone en todo el día. El Círculo Polar Ártico se encuentra a una *latitud* Norte 60° 30'. ¿Sobrevuela el mencionado avión el Círculo Polar Ártico?

Solución

11.- Un avión se dirige de Madrid a Nueva York con una velocidad de 990 km/h. Hallar las *coordenadas geográficas* del punto donde se encontrará el avión al cabo de 3 horas de vuelo.
Coordenadas geográficas Madrid: 40° 24' latitud N, 3° 41' longitud O
Coordenadas geográficas de Nueva York: 40° 45' latitud N, 74° longitud O Utilizar como radio de la esfera sobre la que se mueve el avión: 6371 km

Solución

12.- Un barco parte del punto A del paralelo de latitud 48°35' Norte con velocidad de 20 nudos. Al mismo tiempo parte otro barco de un punto de la misma longitud que A, pero sobre el paralelo de latitud 36°52' Norte y velocidad de 18 nudos. Ambos barcos siguen su paralelo en dirección Oeste. Encontrar la *distancia* en millas que los separa al cabo de 56 horas de marcha.

NOTA: El arco de un minuto, de longitud 1852 m, se llama milla marina. La velocidad de una milla por hora se llama nudo.

Solución

13.- Un barco que parte del punto A (latitud 36°50' N. y longitud 76°20' O.) y que navega a lo largo de una *circunferencia máxima* corta al Ecuador en un punto cuya longitud es 50° 00' O. Encontrar el *rumbo* inicial y la *distancia* recorrida.

Solución

14.- Resolver el *triángulo esférico* tal que:

A = 68° 39' 07", B = 74° 07' 12", a = 51° 42' 08"

Solución

15.- Un navío parte del punto A y llega hasta el B, recorriendo un arco de *circunferencia máxima*. Las *coordenadas geográficas* de ambos puntos son:

$$A \equiv \begin{cases} \text{Longitud} = 55°48'10'' \text{ E} \\ \text{Latitud} = 55°45'13'' \text{ N} \end{cases} \qquad B \equiv \begin{cases} \text{Longitud} = 20°30'40'' \text{ E} \\ \text{Latitud} = 48°50'02'' \text{ N} \end{cases}$$

Calcular la *distancia* recorrida por el navío y el *rumbo* del mismo.

Nota: Radio de la tierra $R \approx 6371$ km.

Solución

16.- Resolver el *triángulo esférico* de que se conocen los datos:

a=76°00'00"; A=70°00'00"; B=119°00'00"

Solución

17.- Resolver el siguiente *triángulo esférico rectángulo*:

A = 90°, b = 46° 46' 04", B = 57° 28' 03"

Solución

18.- Resolver el *triángulo esférico* rectángulo ($\hat{A}$ = 90°) sabiendo que:

$\hat{B}$ = 157° 57' 33" b = 167° 3' 38"

Solución

19.- Sobre una esfera de radio R = 6370 km se sitúan 3 puntos, A, B y C, vértices de un *triángulo esférico*. Los ángulos en A y B valen respectivamente A = 70° y B = 119°, y el lado opuesto al ángulo A tiene como valor a = 76°.

Se pide calcular la *distancia esférica* (en km) entre el punto A y el lado opuesto, a.

Solución

20.- Dos *triángulos esféricos* tienen en común los elementos siguientes: a=51°42', A=68°39', B=74°07'. Calcular el lado b en ambos triángulos y analizar si ambas soluciones son válidas.

Solución

21. Resolver el siguiente *triángulo esférico*, sabiendo: a = 79° 48', b = 53° 12' y A = 110° 2'

Solución

22.- a) Resolver el *triángulo esférico rectilátero* e *isósceles* tal que b=c=60°00'00''

b) Determinar los *ángulos de un triángulo esférico equilátero* cuya *área* sea igual a la mitad del área encerrada por una *circunferencia máxima*

Solución

23.- Dadas las *coordenadas geográficas* de las siguientes ciudades:

Santiago de Compostela: 42°52' N ; 8°33' O
Madrid : 40°24' N ; 3°41' O
Girona: 41°59' N ; 2°49' E

Y dado el radio de la Tierra de 6371 km

Calcular:

a) *Distancias esféricas* entre estas ciudades

b) *Superficie del triángulo esférico* que tiene por vértices dichas ciudades.

Solución

24.- Un barco ha de salir del puerto A (latitud 20° 31' N, longitud 70° 11' E) y llegar al puerto B (latitud 42° 22' N, longitud 10° 45' W). Calcular:

a) La distancia AB (llamada *distancia ortodrómica*), considerando el radio de la tierra, R=6371 km.

b) El *rumbo* inicial.

c) El *rumbo* final.

Solución

25.- Resolver el *triángulo esférico* rectángulo (A = 90), sabiendo que: a = 143° 21' 58'' y b = 167° 03' 38''.

Solución

26.- Un avión vuela de Madrid a Nueva York a una altitud de 10.000 m. De Madrid sale con rumbo Noroeste y vuela 2.000 km hasta llegar a un punto en el cual vira para dirigirse directamente a Nueva York. Sabiendo que las coordenadas de Madrid y Nueva York son

Madrid: 3° 41' Oeste; 40°24' Norte

Nueva York: 74°00' Oeste; 40°45' Norte

(La Tierra se considera una esfera de radio 6371 km y que el avión recorre *ciclos* de la esfera). Se pide:

a). *Distancia* entre Madrid y Nueva York.

b). *Distancia* recorrida por el avión.

Solución

27.- Un avión parte de un lugar cercano a Nueva York (74° longitud Oeste; 40°45' latitud Norte) con *rumbo* 30°10' (dirección Norte y Oeste). Dar las *coordenadas* del punto de su recorrido más cercano al Polo Norte.

Solución

28.- Resolver el *triángulo esférico rectilátero* a=90°, A=36° 25' 08", c=102° 00' 00", situado sobre una esfera de 5 km de radio. Calcular:

a) La *superficie* que ocupan él y su *triángulo polar*.

b) Hallar la *mediana* esférica del triángulo dado que parte del vértice B.

c) Hallar la *distancia esférica* desde el vértice A al vértice C, así como desde el vértice B al lado b.

Solución

29.- Demostrar que en un *triángulo esférico* rectángulo se verifica:

a) Si A=90°, entonces tgc cosa = senb cotgB.

b) Si A=90°, entonces: $\text{tg}\left(\frac{a+c}{2}\right)\text{tg}\left(\frac{a-c}{2}\right)=\text{tg}^2\frac{b}{2}$.

c) Si C=90°, entonces $\cos^2 A\ \text{sen}^2 c$ = sen (c+a) sen (c-a).

Solución

30.- Demostrar que la *bisectriz* esférica de un ángulo de un *triángulo esférico*, divide al lado opuesto en dos arcos cuyos senos son proporcionales a los senos de los lados contiguos.

Solución

31.- En un *triángulo esférico* se verifica que a+b=180°. Calcular el arco de *ciclo* que es la *mediana* correspondiente al lado c.

Solución

32.- En el *triángulo esférico rectilátero* en el que c=90°; obtener la *altura esférica* correspondiente al lado c en función de los otros dos lados.

Solución

33.- Expresar en función de los lados de un *triángulo esférico* el producto senA senB senC.

Solución

34.- Demostrar que en todo *triángulo esférico* se verifica que:

$$a + b \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 180° \Leftrightarrow A + B \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 180°.$$

Solución

35.- Demostrar que si dos ángulos de un *triángulo esférico* son rectos, los lados opuestos a estos ángulos son cuadrantes y el tercer ángulo está medido por el lado opuesto. Si los tres ángulos de un triángulo esférico son rectos, demuéstrese que la *superficie esférica del triángulo* es un octante de la *esfera*.

Solución

36.- En un *triángulo esférico rectángulo* la suma de los catetos vale 100°, la hipotenusa mide 80°; calcular el valor del cateto más pequeño.

Solución

37.- Si ε es el *exceso esférico* del *triángulo esférico* en el que a=b y C=90°, calcular tgε en función de a

Solución

38.- Calcular la *distancia* mínima en km que hubiera tenido que recorrer las naves de Cristóbal Colon en su primer viaje y descubrimiento de América.Datos: Considérese como punto de salida la ciudad de Santa Cruz de Tenerife y llegada la isla de S. Salvador en las Bahamas

Solución

39.- Calcular el valor del *coseno* del *exceso* esférico del triángulo cuyos lados miden $a=b=\frac{\pi}{3}$ y $c=\frac{\pi}{2}$.

Solución

40.- Calcular el *área del triángulo esférico* y el volumen de la pirámide esférica que determina en una esfera de 6cm de radio un triedro equilátero cuyos diedros miden 100° y cuyo vértice es el centro de dicha esfera.

Solución

41.- De un *triángulo esférico* trazado en una superficie esférica cuyo radio es 10 dm se conocen: A = 71° 20´; B = 119° 25´; C = 60° 45´. Se pide:

a) Resolver el triángulo.

b) Hallar su *área.*

c) Hallar el volumen de la pirámide esférica cuyo vértice es el centro de la esfera y su base el triángulo dado.

Solución

42.- Hallar el *área del pentágono esférico* cuyos ángulos miden 87° 16', 108° 34', 126° 23', 150° y 156° 48' en una esfera de 16 dm de radio.

Solución

43.- En todo *triángulo esférico* isósceles (b=c), se verifican las relaciones siguientes:

$$a)\ \operatorname{sen}\frac{a}{2} = \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

$$b)\ \cos\frac{A}{2} = \operatorname{sen} B \cdot \cos\frac{a}{2}$$

Solución

44.- De un *triángulo esférico* se conocen:

a = 74° 05' 00'', b = 63° 17' 00'', A = 113° 42' 00''

a) Analizar cuántos triángulos esféricos se adaptan a estos datos.

b) Resolver el ó los triángulos, según proceda.

Solución

45.- En un *triángulo esférico* se verifica 2p=a+b+c=180°. Demostrar que cosA+cosB+cosC=1.

Solución

46.- Calcular la *distancia* en km, entre Madrid y Málaga, siendo las coordenadas de Madrid longitud 3° 41' Oeste y latitud 40°24'30'' Norte, y las de Málaga 0°49'55'' Oeste y 36°43'13'' Norte.

Solución

47.- Resolver el *triángulo esférico* conociendo el lado a=120°10'0'', la *altura* h=42°15'0'' y la *mediana* m=62°10'0'' que parten del vértice A.

Solución

48.- Determinar los ángulos A y B de un *triángulo esférico* conocida su diferencia B-A=32°14' y los lados opuestos a=67°25'35'' y b=143°44'46''.

Solución

49.- En un *triángulo esférico* rectángulo (A=90°) la suma de los catetos vale 100° y la hipotenusa 80°, calcular los catetos.

Solución

50.- Un avión parte de un punto de la Tierra de coordenadas 40° N, 3° O. Su rumbo es 78° NE, su altitud de vuelo es de 4.000 m y su velocidad de 610 km/h.

Se pide obtener las *coordenadas* del punto en el que el avión atraviesa el paralelo 30°N y calcular el tiempo que tarda en llegar a dicho lugar, considerando el radio de la tierra de 6373 km.

Solución

51.- En la Tierra, sea el *círculo máximo* que pasa por los puntos A (latitud 0°, longitud 60° O) y B (latitud 60° N, longitud 0°)

Se pide:

a) *Distancia* en kilómetros entre los puntos A y B.

b) Puntos en que dicho círculo máximo corta el Ecuador

c) Puntos en que dicho círculo máximo corta el paralelo 60° N

Nota: Radio de la Tierra R = 6378 km

Solución

52.- Sea el *triángulo esférico*, situado sobre la superficie de la Tierra, cuyos vértices son el Polo Norte y los puntos B y C de coordenadas:

B (longitud: 120° Este, latitud: 40° Norte), C (longitud: 30° Oeste, latitud: 60° Norte)

Se pide:

a) Resolver el triángulo.

b) Calcular la *superficie del triángulo*.

Solución

53.- Un barco navega 2000 km hacia el Este a lo largo del paralelo de latitud 42° ¿Cuál es la *longitud* del punto de llegada?, si:

a) Parte de la longitud 125° O.

b) Parte de la longitud 160° E.

(Tomar como radio de la tierra 6370 km)

Solución

54.- Un barco navega a lo largo de una *circunferencia máxima* desde la localidad de Dutch Harbor (latitud: 53° 53' N, longitud: 166° 35' O) hasta un punto M (latitud: 37° 50' S, longitud: 144° 59' O). Se pide:

a) Calcular la *distancia* y el *rumbo* de salida (ángulo que forma la trayectoria con el meridiano del punto de salida indicando polo y dirección Este u Oeste).

b) Localizar el punto donde la trayectoria corta al Ecuador.

c) Hallar el *área del triángulo esférico* determinado por el Polo Norte y ambos lugares.

Solución

55.- Un avión parte del aeropuerto de Talavera la Real. Encontrar el *rumbo* y la *distancia* para un vuelo a Nueva York. Sabiendo que las coordenadas de Talavera la Real y Nueva York son:

Talavera la Real: 6° 46' 24'' Oeste; 38°52'35" Norte

Nueva York: 74°00' Oeste; 40°45' Norte

(La Tierra se considera una esfera de radio 6371 km y que el avión recorre *ciclos* de la esfera).

Determinar cual es la máxima *latitud* que alcanza dicho vuelo

Solución

56.- Un avión parte de Kopervik (Noruega) hacia Fortaleza (Brasil). Las coordenadas geográficas de dichas ciudades son:

Kopervik (longitud: 5° 18' E, latitud: 59° 17' N)

Fortaleza (longitud: 38° 29' O, latitud: 3° 41' S)

Tomando como radio de la tierra R = 6371 km, hallar:

a) La *distancia* entre ambas ciudades.

b) La *distancia* recorrida por el avión que vuela a 10 km de altura.

c) Las *coordenadas geográficas* del punto H en que la trayectoria corta al ecuador.

Solución

57.- Dado el *triángulo esférico* de ángulos B = 34°49'11" y C = 118°58'36" y siendo c (el lado opuesto al ángulo C), de valor c = 100°. Se pide:

a) Hallar la *altura esférica* sobre el lado a (opuesto al ángulo A) indicando si es interior o exterior al triángulo

b) Resolver el triángulo

Solución

58.- Dado el *triángulo esférico* de lados a=80°, b=40° y c=100°, Calcular los arcos de *circunferencia máxima* correspondientes a:

a) *Mediana* sobre el lado c.

b) *Bisectriz* del ángulo C.

Solución

59.-

a) Hallar la *distancia* entre Puerto Cabello (Venezuela) (10° 29' N, 68° 00' O) y Cádiz (España) (36° 30' N, 6° 20' O).

b) Hallar el *rumbo* inicial y el *rumbo* final de un barco que se dirija de Puerto Cabello a Cádiz.

c) Calcular la *latitud* y *longitud* de la posición del barco cuando haya recorrido 3000 km.

d) Si el barco no parase en Cádiz, sino que siguiera navegando por la *circunferencia máxima* que une ambas ciudades, localizar el punto del recorrido más próximo al polo norte (dar su *latitud* y *longitud*).

Nota: tomar como radio de la tierra 6370 km.

Solución

60.- Un barco realiza un viaje desde Bergen (Noruega) (60° 24' 00"N, 5° 19' 00"E) hasta St. John's (Canadá) (47° 34' 00"N, 52° 41' 00"O). Se pide calcular:

a) La *distancia* entre ambas ciudades.
b) El *rumbo* inicial (ángulo entre el norte del meridiano y la trayectoria medido en sentido de las agujas del reloj).
c) La *distancia* más corta del Polo Norte a la trayectoria.

Solución

61.- Un avión parte de una ciudad A(Cádiz) hacia otra ciudad B(Bristol). Las *coordenadas geográficas* de dichas ciudades son:

A (longitud: 6° 20' O, latitud: 36° 30' N);

B (longitud: 2° 38' O, latitud: 51° 27' N)

a) Calcular la *distancia* entre ambas ciudades d(A B).

b) Sabiendo que las *coordenadas geográficas* de otra ciudad C(Oviedo) son (longitud: 5° 50' O, latitud: 43° 22' N) y conocidas las distancias: d(A, C) = 764.6003 km, d(B, C) = 930.1393 km, hallar la *distancia* aproximada a la que pasa el avión de la ciudad C.

Nota: tomar, en ambos apartados, el radio de la esfera sobre la que realizar los cálculos R = 6370 km.

Solución

62.- Un barco sale de un punto A (38° 3' N, 40° 20' O) con un *rumbo* N 23° 20' E. Tras haber realizado una travesía por una *circunferencia máxima* entra en un punto B con un ángulo de 43° 15' (43° 15' =ángulo ABN). Se pide, calcular:

a) Las *coordenadas* del punto B.

b) La *distancia* entre A y B

Solución

63.- Se va a estudiar la viabilidad de ciertos vuelos desde Boston (EEUU) con dirección a Monrovia (Liberia). Sabiendo que las *coordenadas geográficas* de dichas ciudades son:

Boston (longitud: 71° 03' O, latitud: 43° 23' N)

Monrovia (longitud: 10° 49' O, latitud: 6° 20' N)

a) Calcular la *distancia* entre ambas ciudades.

b) Hallar la *longitud* del punto donde la trayectoria corta al Ecuador.

Solución

64.- Desde un punto M de la Tierra situado sobre el meridiano de Greenwich y con *latitud* 45°N parte un avión hacia otro punto P. Este punto P equidista del Polo Norte, del Punto M y de un punto Q de *coordenadas* (65°31'48.72"° E, 45° N). El avión se ve obligado a aterrizar en un punto A, cuando lleva recorridos 2/3 de su camino, al Este de M. Se considera la Tierra como una esfera 6370 km de radio y que la altitud de vuelo del avión es despreciable frente a esta magnitud. Hallar:

a) Las *coordenadas geográficas* del punto de aterrizaje

b) El tiempo que tardó en efectuar éste si llevó una velocidad constante de 800 km/h

c) El *área* del *triángulo esférico* definido por los puntos M, A y el Polo Norte

Solución

65.- Calcular la *superficie* del *triángulo esférico* que tiene por vértices las siguientes ciudades

Rio de Janeiro (Brasil)	(latitud: 22°54'0" S; longitud: 43°13'59" O)
Atenas (Grecia)	(latitud: 37°58'40" N; longitud: 23°43'40" E)
Kingston (Jamaica)	(latitud: 17°59'0" N; longitud: 76°48'0" O)

Solución

66.- Dadas las *coordenadas* de las siguientes ciudades:

Tokio (Japón): (35°45'50"N; 140°23'30"E)

Tahití (Polinesia Francesa): (17°40'00" S; 157°49'34"O)

Y conocidas las *distancias esféricas* entre Tokio y Honolulu (Hawaii) que es de 6.146,812 km y entre Tahití y Honolulu que es de 4.430,312 km.

Siendo el radio de la Tierra es de 6.373 km.

Se pide:

a) Calcular la *distancia esférica* entre Tokio y Tahití, expresada en km.

b) Calcular la *superficie esférica* del *triángulo* formado por Tokio, Tahití y Honolulu.

Solución

67.- Un avión parte con *rumbo* 30° 10' (ángulo que forma el meridiano con la trayectoria medido en el sentido de las agujas del reloj) desde un punto A de coordenadas

A → longitud 74° 00' 00" O, latitud: 40° 45' 00"N

a) Calcular las *coordenadas geográficas* (latitud y longitud) del punto de la trayectoria más cercano al Polo Norte.

b) Hallar la *distancia* en unidades sexagesimales y en km desde el punto A hasta Madrid → longitud 3° 41' 00" O, latitud: 40° 24' 00"N.

Solución

68.- Tomando como radio de la tierra 6370 km:

a) Hallar la *distancia* entre Puerto Cabello (Venezuela) (10° 29' N, 68° 00' O) y Cádiz (España) (36° 30' N, 6° 20' O).

b) Hallar el *rumbo* de un avión que se dirija de Puerto Cabello a Cádiz.

c) Calcular la *latitud* y *longitud* de la posición del avión cuando haya recorrido 3000 km desde Puerto Cabello.

d) Si el avión no aterrizase en Cádiz, sino que siguiera volando por la *circunferencia máxima* que une ambas ciudades, localizar el punto del recorrido más próximo al polo norte (dar su *latitud* y *longitud*).

Solución

69.- Un barco parte del punto A de *latitud* 58°17' Norte y *longitud* 128°31' Oeste y navega 132 millas con un *rumbo* 243°. Hallar la posición del punto de llegada.

Solución

NOTA: El arco de un minuto, de longitud 1852 m, se llama milla marina. La velocidad de una milla por hora se llama nudo.

70.- Dado el *triángulo esférico rectilátero* a=90°, A=36° 25' 08", c=102° 00' 00" sobre una esfera de radio 5 km, hallar:

a) La *mediana esférica* del triángulo dado que parte del vértice B.

b) *Distancia* del vértice A al vértice C.

c) La *distancia* desde el vértice B al lado

Solución

71.- Un avión despega de Londres (50°N, 0°) con su piloto en estado semiinconsciente, con *rumbo* desconocido (sobre un *círculo máximo* hacia el cuadrante sureste) y vuela una distancia indeterminada hasta que el piloto recupera el uso de sus facultades y gira 90° hacia la derecha. Al cabo de 2400 millas volando sobre un círculo máximo vuelve a cruzar el *meridiano* de Greenwich y, en ese momento, lleva un *rumbo* de 240°. Se pide:

a) ¿Cuál es su *latitud* en ese momento?

b) ¿A qué *distancia* se encuentra de Londres?

c) Si el avión en su recorrido atraviesa el Ecuador, indicar su *longitud*.

d) Obtener la *distancia* en millas que recorre el avión mientras el piloto está inconsciente.

Solución

72.- Se conocen las *coordenadas geográficas* de las dos ciudades siguientes:

$$\text{Ciudad A: Toronto} \begin{cases} \text{Longitud} = 79^\circ\ 24'\ 59''\ \text{O} \\ \text{Latitud} = 43^\circ 42'\ 00''\ \text{N} \end{cases}$$

$$\text{Ciudad B: Pretoria} \begin{cases} \text{Longitud} = 28^\circ\ 35'\ 41''\ \text{E} \\ \text{Latitud} = 30^\circ\ 47'\ 00''\ \text{S} \end{cases}$$

a) Calcular la *distancia* entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km.

b) Un avión se dirige de Toronto a Pretoria siguiendo un *círculo máximo*. Hallar la *latitud* del punto P en el que el avión sobrevuela el *meridiano* de Greenwich, así como el *rumbo* que lleva el avión en ese momento.

c) Si al llegar al mencionado punto P el avión cambiara de *rumbo* y girase hacia el este siguiendo el paralelo de P, ¿qué *distancia* d recorrería hasta sobrevolar el meridiano de Pretoria?

Solución

73.- Sea ABC un triángulo esférico con, al menos, un ángulo *recto* A = 90 ° y a+b=180°. Calcular el valor de B.

Solución

74.- Un avión parte de un lugar A en el hemisferio sur hacia otro punto B en el hemisferio norte siguiendo un arco de *circunferencia máxima*, las *coordenadas geográficas* son:

A (50° O, 20° S) , B (20° E, 30° N)

Considerando que el radio de la circunferencia de la trayectoria es R = 6371 km, se pide obtener:

a) La *distancia* entre las ciudades A y B, y representar gráficamente el triángulo sobre la esfera que se utiliza.
b) *Rumbo* inicial.
c) *Coordenadas* del punto X donde la trayectoria del avión corta al Ecuador, justificando si el avión atraviesa el ecuador antes o después de su paso por el *meridiano* de Greenwich y representar gráficamente el triángulo esférico empleado.

Solución

75.- Se conocen las *coordenadas geográficas* de las dos ciudades siguientes:

Ciudad A: Córdoba $\begin{cases} \text{Longitud} = 4^\circ\ 46'\ 22''\ O \\ \text{Latitud} = 37^\circ 53'\ 30''\ N \end{cases}$

Ciudad B: La Meca $\begin{cases} \text{Longitud} = 39^\circ 49' 32''\ E \\ \text{Latitud} = 21^\circ 25' 36''\ N \end{cases}$

a) Calcular la *distancia* entre ambas ciudades, tomando como radio aproximado de la tierra R = 6371 km.
b) Establecer el *Rumbo* desde Córdoba hacia La Meca.
c) Si un avión se dirige de Córdoba a La Meca siguiendo un *círculo máximo*. Hallar la latitud del punto P en el que el avión sobrevuela el meridiano de Greenwich.

Solución

76.- Dado un triángulo esférico *rectángulo* (B=90°), sabiendo que los ángulos esféricos son: A=111° 59' 26" y C=62° 22' 44".

a) Resolver el triángulo.
b) El *área* del triángulo esférico suponiendo un radio = 1 km.
c) *Altura esférica* sobre el lado b. Indicar si es exterior o interior y hacer un dibujo aproximado.
d) Razona cual sería la altura esférica sobre a y sobre c.

Solución

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver los siguientes *triángulos esféricos*:

1) A=90°, b=38° 17' 46", c=37° 04' 13".
2) A=90°, B=52° 38' 34", C=50° 38' 15".
3) b=114° 31' 18", B=119° 42' 34", C=72° 03' 16".
4) A=112° 24' 32", B=61° 12' 40", a=72° 36' 24".
5) A=161° 16' 32", B=126° 57' 15", a=163° 17' 55".

Solución

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver los siguientes *triángulos esféricos*:

1) A=90°, b=38° 17' 46", c=37° 04' 13".

2) A=90°, B=52° 38' 34", C=50° 38' 15".

3) b=114° 31' 18", B=119° 42' 34", C=72° 03' 16".

4) A=112° 24' 32", B=61° 12' 40", a=72° 36' 24".

5) A=161° 16' 32", B=126° 57' 15", a=163° 17' 55".

Soluciones a los ejercicios propuestos

1) a=51º 13' 46", B=52º 38' 34", C=50º 38' 15".

2) a=51º 13' 46", b=38º 17' 46", c=37º 04' 12".

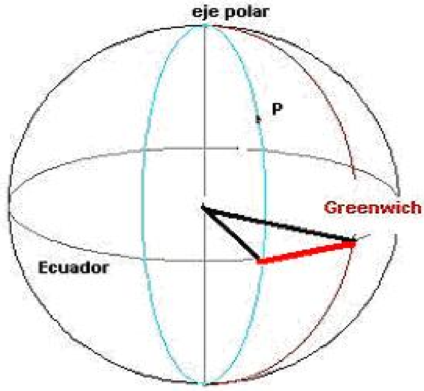
3) $$\begin{cases} a_1 = 65^\circ 31'13'', c_1 = 85^\circ 13'50'', A_1 = 60^\circ 19'27'' \\ a_2 = 46^\circ 24'38'', c_2 = 94^\circ 46'10'', A_2 = 43^\circ 44'35'' \end{cases}$$

4) b=64º 46' 28", c=17º 58' 40", C=17º 23' 54".

5) $$\begin{cases} b_1 = 45^\circ 40'31'', c_1 = 146^\circ 06'26'', C_1 = 141^\circ 28'17'' \\ b_2 = 134^\circ 19'29'', c_2 = 54^\circ 20'33'', C_2 = 114^\circ 49'23'' \end{cases}$$

Longitud

Coordenada de un punto sobre una esfera definida por el ángulo del meridiano que pasa por el punto y el meridiano que se toma como origen.



Área

Superficie comprendida dentro de un perímetro.
Unidad de superficie equivalente a 100 metros cuadrados.

Área o Superficie de un polígono esférico

$$S = \frac{\pi\, r^2}{180^o}\left(A_1 + A_2 + ... + A_n - (n\text{-}2)\cdot 180^o\right)$$

Siendo: A_1, A_2, …,A_n ángulos del polígono. n = nº de lados del polígono

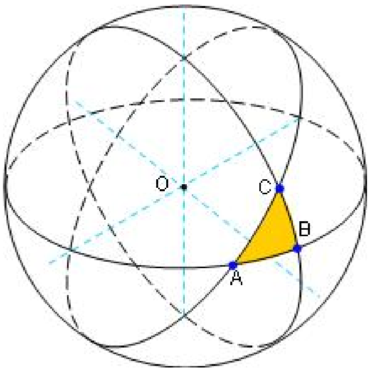
Superficie de un triángulo esférico

$$S \;=\; \frac{\pi\, r^2}{180^o}\left(\alpha + \beta + \gamma - 180^o\right)$$

r = radio de la esfera y α, β, γ = ángulos del Triángulo esférico

Triángulo esférico

Es la porción de superficie esférica comprendida entre tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos. Se puede considerar como la intersección de las caras de un triedro con la esfera de centro el vértice del triedro.



Triángulo esférico polar

Triángulo polar de un triángulo esférico es el que cada vértice es el polo del lado opuesto situado en el mismo hemisferio que el vértice.

Si A, B, C y a, b, c son los seis elementos de un triángulo esférico y Ap, Bp, Cp, ap, bp, cp son los elementos del correspondiente triángulo polar entonces:

$$Ap=180^{o}-a;\ Bp=180^{o}-b;\ Cp=180^{o}-c;$$
$$ap=180^{o}-A;\ bp=180^{o}-B;\ cp=180^{o}-C$$

Altura

Ángulo que forma la visual a un astro con el plano del horizonte, contado a partir de este.

Altura de un triángulo es el segmento que une un vértice con el lado opuesto o su prolongación formando ángulo recto.

Altura de un triángulo esférico es el arco de circunferencia máxima que resulta de unir un vértice con el lado opuesto formando ángulo recto.

Circunferencia máxima o ciclo

Circunferencia máxima o **ciclo:** es la intersección de la esfera con un plano que pasa por su centro, por lo tanto su radio será el de la esfera.

Triángulo Equilátero

Equilátero si tiene los tres lados iguales.

Mediana

Mediana de un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Mediana de un triángulo esférico es el arco de circunferencia máxima que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

En Estadística:
La **mediana** es el valor de la variable que ocupa el lugar central, es decir, que la mitad de la población es menor y la otra mitad es mayor que él.

La **mediana** es un valor **M** tal que F(M)=1/2, se define así como raíz de una ecuación.

Bisectriz

Bisectriz de un ángulo es la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Bisectriz esférica de un ángulo es el arco de circunferencia máxima que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Triángulo Rectángulo

Rectángulo si tiene uno o más ángulos rectos.

Distancia esférica

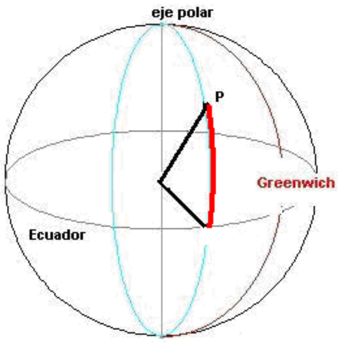
Distancia esférica entre dos puntos de una superficie esférica es la longitud del menor arco de ciclo comprendido entre dos puntos.

Circunferencia menor

Circunferencia menor: es aquella cuyo plano no pasa por el centro de la esfera.

Latitud

Coordenada de un punto sobre una esfera definida por su distancia angular con el ecuador.

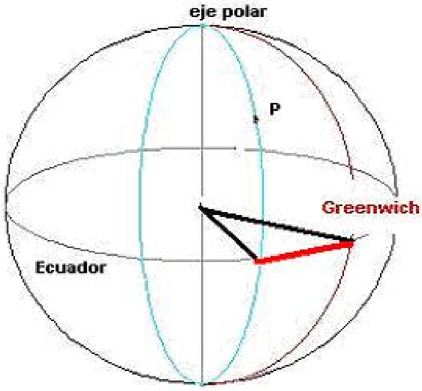


Coordenadas geográficas

El sistema de **coordenadas geográficas** expresa todas las posiciones sobre la Tierra usando dos (longitud y latitud) de las tres coordenadas de un sistema de coordenadas esféricas que esta alineado con el eje de rotación de la Tierra.

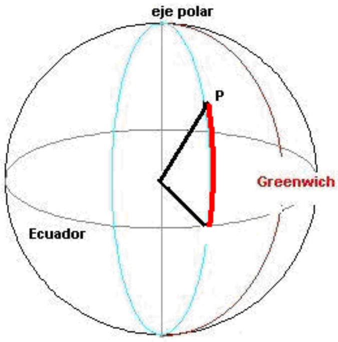
Longitud

Coordenada de un punto sobre una esfera definida por el ángulo del meridiano que pasa por el punto y el meridiano que se toma como origen.



Latitud

Coordenada de un punto sobre una esfera definida por su distancia angular con el ecuador.



Triángulo Rectilátero

Rectilátero si tiene al menos un lado recto.

Triángulo Isósceles

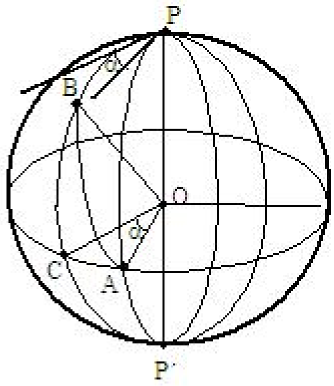
Isósceles si tiene dos lados iguales.

Ángulo

Ángulo figura geométrica constituida por dos semirrectas que tienen en común el origen.

Ángulo esférico

Ángulo esférico de dos ciclos es el formado por las dos tangentes a las semicircunferencias en uno de sus puntos de contacto.

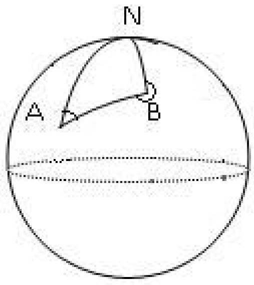


Distancia ortodrómica

La mínima distancia entre dos puntos de la Tierra es el arco de círculo máximo que pasa por esos puntos, conocido como ***línea ortodrómica***, pero tiene el inconveniente de que el ángulo que forma con el meridiano varía a medida que nos desplazamos, por esto se sustituye por la *línea loxodrómica*, que forma un ángulo constante con el meridiano en cada punto

Rumbo

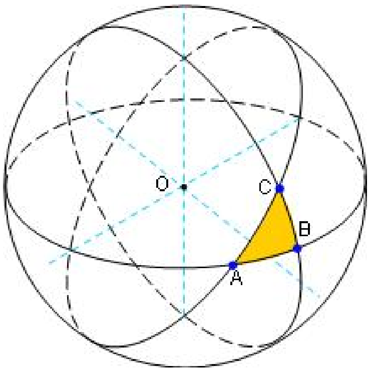
Ángulo acimutal contado en sentido retrogrado desde una dirección determinada, generalmente, desde el norte verdadero.
Ángulo que forma el arco de circunferencia máxima con el meridiano.
En el triángulo esférico que forman los puntos A y B con el polo norte N



El rumbo inicial para ir de A a B se corresponde con el ángulo en A del triángulo esférico. Sin embargo para ir de B a A el rumbo inicial será: 360º-B

Triángulo esférico

Es la porción de superficie esférica comprendida entre tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos. Se puede considerar como la intersección de las caras de un triedro con la esfera de centro el vértice del triedro.



Triángulo esférico polar

Triángulo polar de un triángulo esférico es el que cada vértice es el polo del lado opuesto situado en el mismo hemisferio que el vértice.

Si A, B, C y a, b, c son los seis elementos de un triángulo esférico y Ap, Bp, Cp, ap, bp, cp son los elementos del correspondiente triángulo polar entonces:

Ap=180º-a; Bp=180º-b; Cp=180º-c;

ap=180º-A; bp=180º-B; cp=180º-C

Exceso esférico

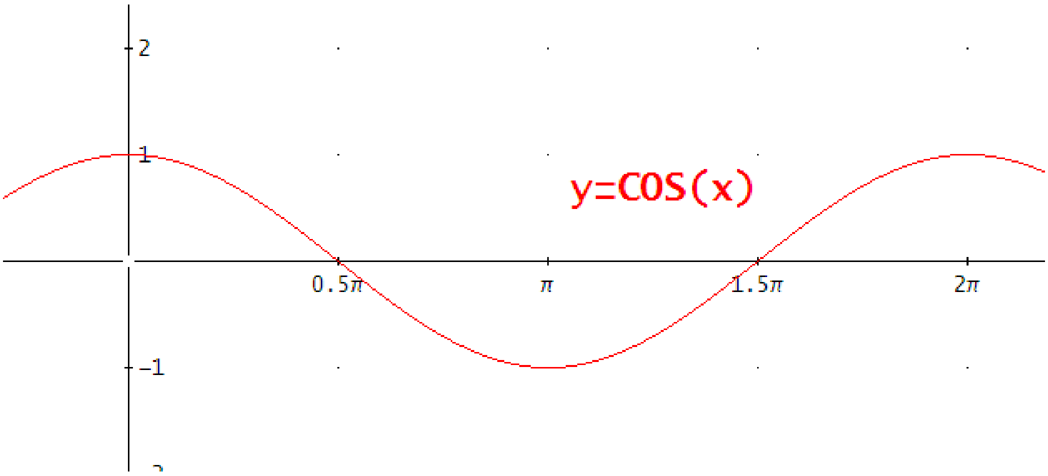
Exceso esférico es la diferencia entre la suma de los ángulos del triángulo esférico y 180º.

$$\varepsilon = A + B + C - 180^{o}.$$

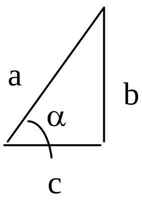
Función coseno

$$y = \cos x$$

Dominio=R; Función par; Recorrido=$\left[-1,1\right]$; Periódica de período 2π



En un triángulo rectángulo:

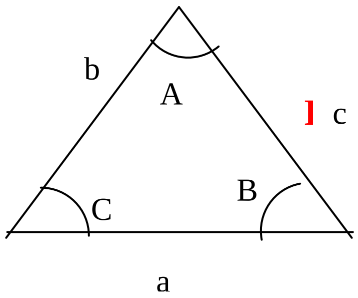


Coseno del ángulo α: $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$;

Área o Superficie de un polígono esférico

$$S = \frac{\pi\, r^2}{180^{\circ}}\left(A_1 + A_2 + ... + A_n - (n\text{-}2)\cdot 180^{\circ}\right)$$

Siendo: A_1, A_2, …,A_n ángulos del polígono. n = nº de lados del polígono



Teorema del seno:

En un triángulo plano, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

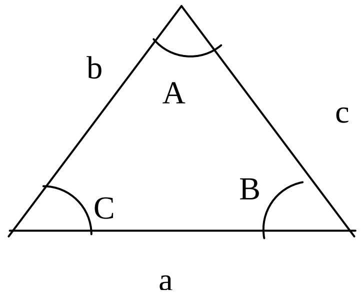
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del seno (1º grupo de Bessel)

En un triángulo esférico, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del coseno:



En un triángulo plano, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Teorema del coseno para ángulos (4º grupo de Bessel)

En un triángulo esférico, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

$$\cos A = -\cos B\cdot\cos C + \operatorname{sen} B\cdot\operatorname{sen} C\cdot\cos a$$
$$\cos B = -\cos A\cdot\cos C + \operatorname{sen} A\cdot\operatorname{sen} C\cdot\cos b$$
$$\cos C = -\cos A\cdot\cos B + \operatorname{sen} A\cdot\operatorname{sen} B\cdot\cos c$$

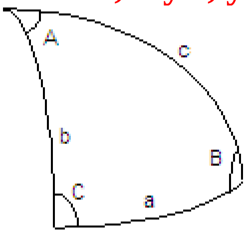
Teorema del coseno para lados (2º grupo de Bessel)

En un triángulo esférico, de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se verifica:

$$\cos a = \cos b\cdot \cos c + \operatorname{sen} b\cdot \operatorname{sen} c\cdot \cos A$$
$$\cos b = \cos a \ \cos c + \operatorname{sen} a \cdot\operatorname{sen} c \ \cos B$$
$$\cos c = \cos a \ \cos b + \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b \ \cos C$$

Analogías de Neper

En un triángulo esférico de lados a, b y c, y ángulos A, B y C, se



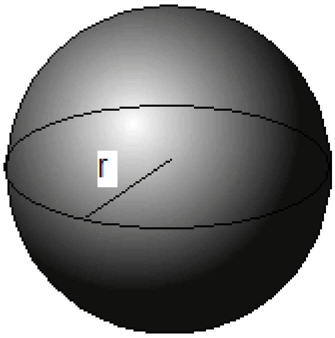
verifica:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot \operatorname{cotg}\frac{C}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cdot \operatorname{cotg}\frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot \operatorname{tg}\frac{c}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}\cdot \operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

Esfera

Esfera: sólido terminado por una superficie curva cuyos puntos equidistan todos de otro interior llamado centro.



$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$