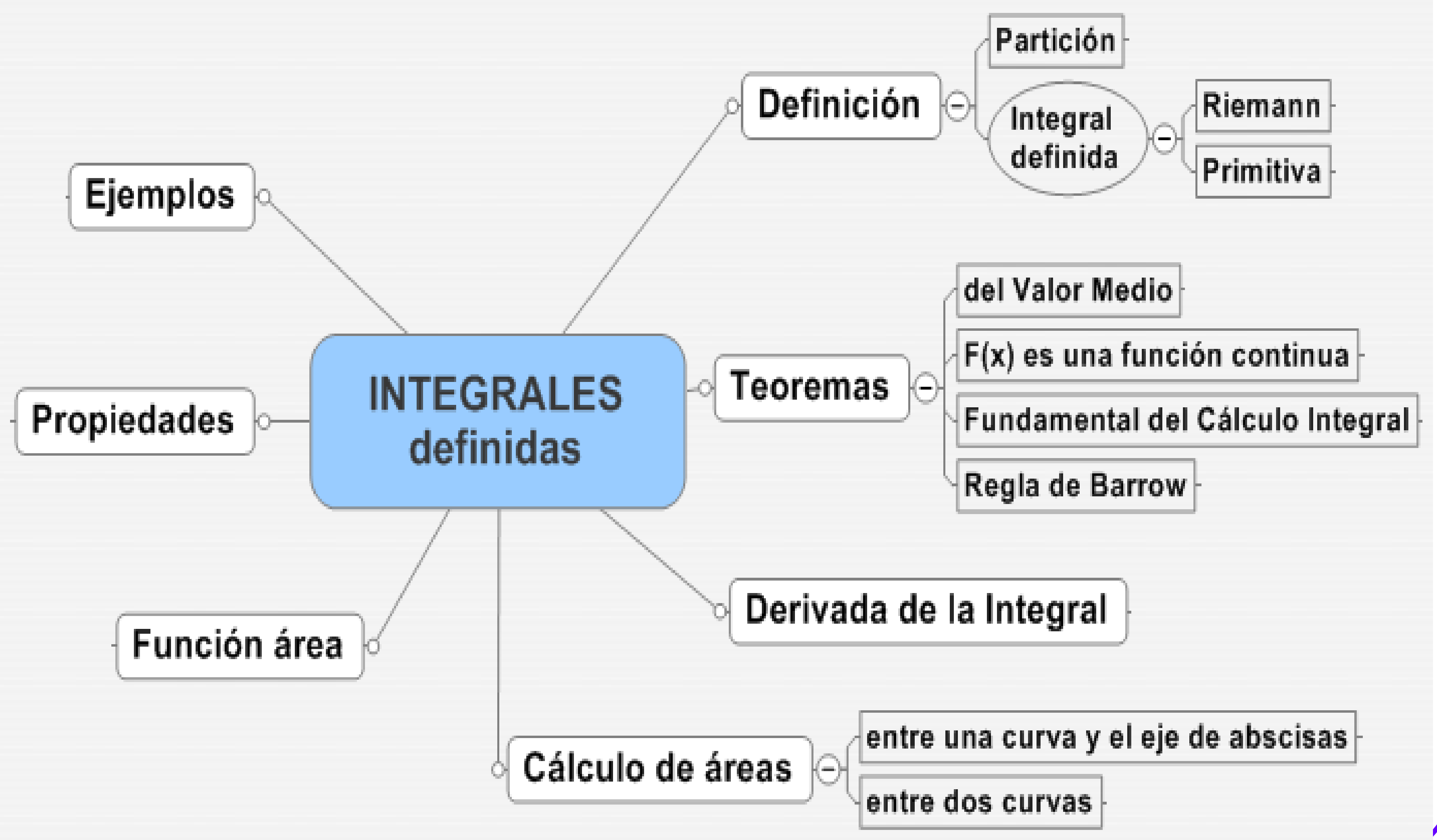
INTEGRALES

Integrales definidas

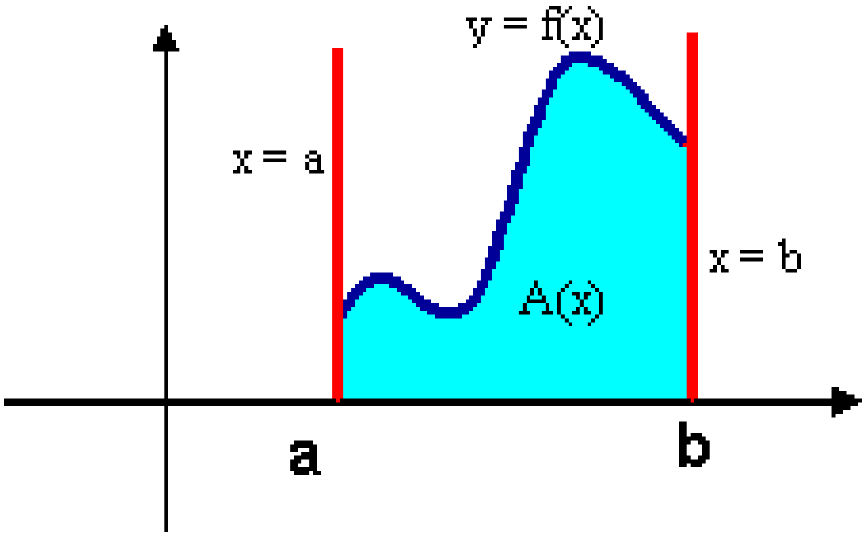
Índice



Salir

Integral definida

Dada una función f(x) continua y positiva en [a, b], se quiere determinar el área limitada por f(x), el eje OX y las rectas x = a y x = b.



Definición: Partición de un intervalo [a, b].

Es un conjunto finito de números reales $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

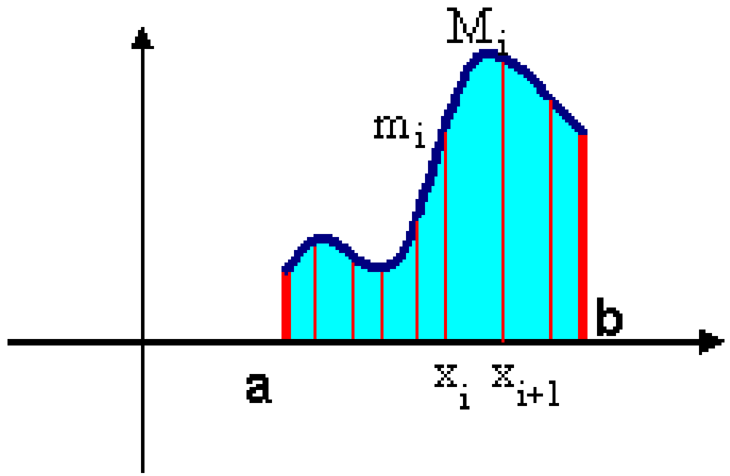
Integral definida: método de Darboux

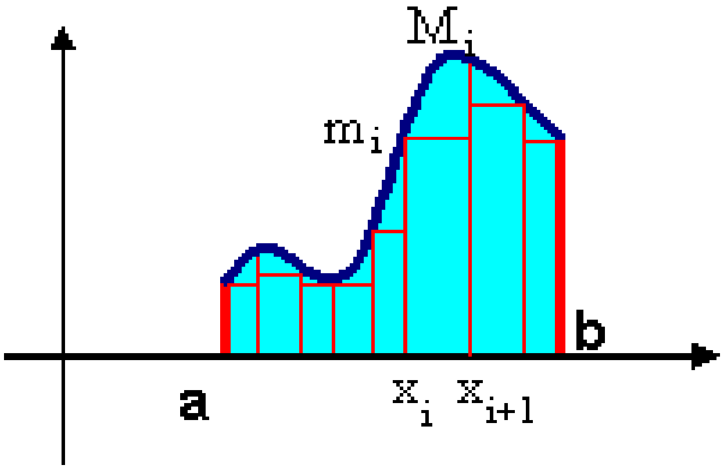
Para calcular una aproximación de dicha área se dará los siguientes pasos:

1. Se realiza una partición del intervalo [a, b] en n partes.
2. La función f(x) es continua en los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ ya que lo es en [a, b]. Por el Teorema de Weierstrass, se puede asegurar que la función f(x) alcanza un máximo, M_i, y un valor mínimo, m_i, en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.
3. Se dibuja los rectángulos inferiores de base $x_{i+1} – x_i$ y de altura m_i.
4. Se dibuja los rectángulos superiores de base $x_{i+1} – x_i$ y de altura M_i.

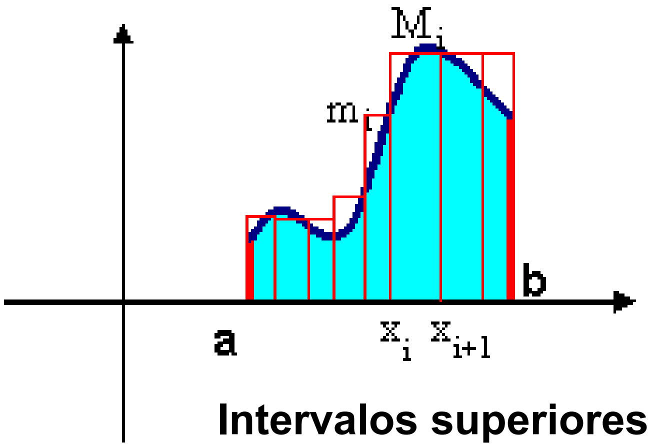
Partición

Partición del intervalo [a, b]:





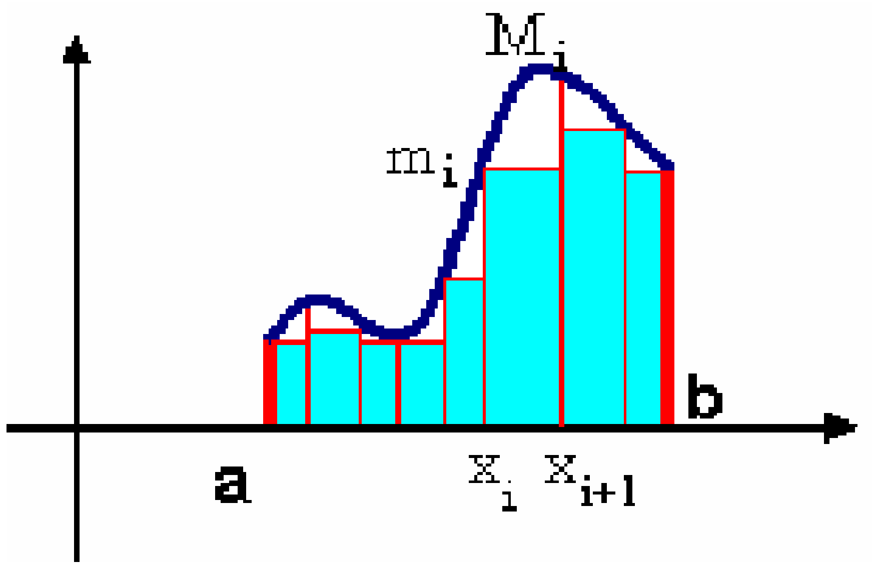
Intervalos inferiores:



Intervalos superiores:

Suma inferior

5. Sumamos el área de los rectángulos inferiores y se obtiene una aproximación del área por defecto.



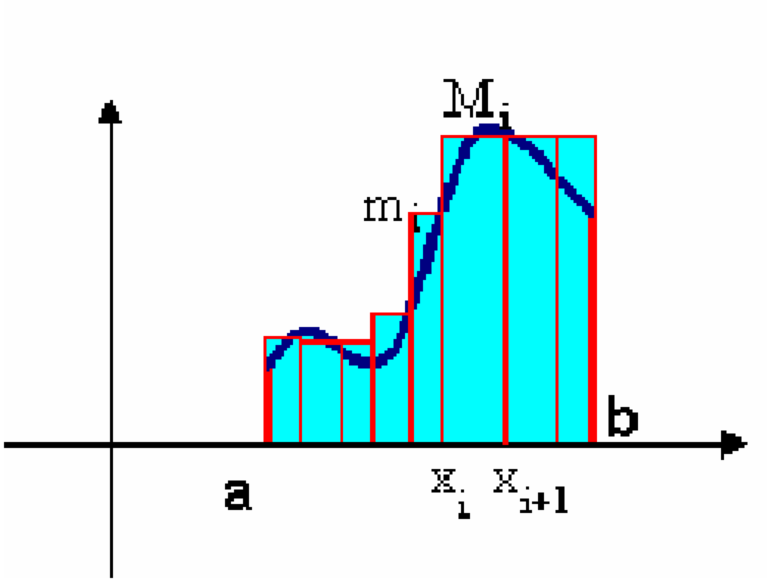
$$s(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

Se define **suma inferior de f para P** y la designamos

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

Suma Superior

5. Sumamos el área de los rectángulos superiores y se obtiene una aproximación del área por exceso.



$$S\,(f,P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Se define **suma superior de f para P** y la designamos

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Integral definida

A medida que **aumentamos** el número de **subdivisiones** en la partición, de manera que **disminuimos** las longitudes de los **subintervalos**, las sumas inferiores van aumentando y las sumas superiores van disminuyendo.

Luego las sumas inferiores dependen del número de particiones que tomemos en [a, b]. Tendremos, entonces, que las sumas inferiores son una sucesión $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ de números reales creciente y acotada superiormente por cualquier suma superior. $s_1 < s_2 < \dots < s_n < S$

Luego esta sucesión tiene límite, que coincide con un valor aproximado por defecto del área bajo una curva si la función es positiva.

Integral definida

Las sumas superiores dependen del número de particiones que tomemos en [a, b]. Tendremos, entonces, que las sumas superiores son una Sucesión $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ de números reales decreciente y acotada inferiormente por cualquier suma Inferior.

$$S_1 > S_2 > \ldots > S_n > s$$

Luego esta sucesión tiene límite y coincide en el caso de las funciones positivas con una aproximación por exceso del área bajo la curva

Teorema:

Sean P_1 y P_2 dos particiones de $\left[a, b\right]$, se cumple que $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$ para cualquier partición P del intervalo $\left[a, b\right] = I$.

Integral Riemann

Integral inferior de f en I$=[a,b]$ como $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \mathrm{Sup}\{s(f,P) / P \in P_n(I)\}$

Integral superior de f en I$=[a,b]$ como $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \mathrm{Ínf}\{S(f,P) / P \in P_n(I)\}$

Podemos asegurar que el área del recinto está comprendida entre las dos aproximaciones.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \text{Área} \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Definición.

Sea $f:[a,b] \to R$ una función **acotada.** Entonces **f es integrable Riemann** si y solo si $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ y se denota $\int_a^b f(x)dx$. (Integral definida sobre $[a,b]$)

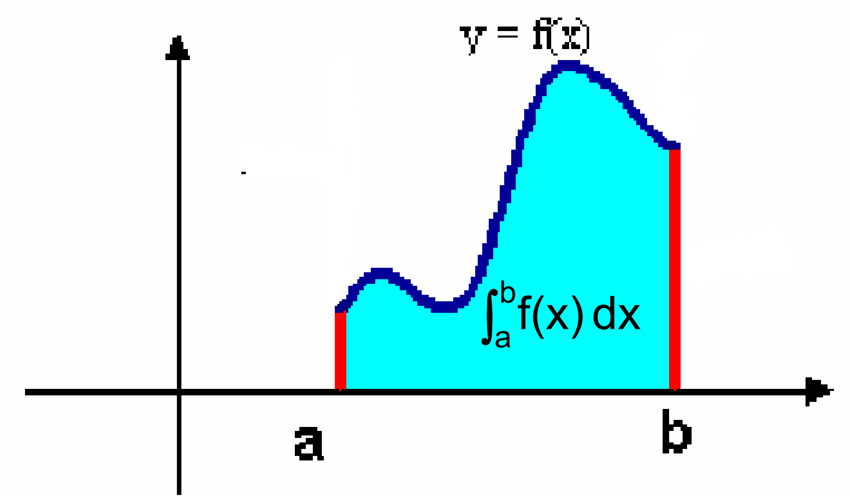
Integral definida

Se define integral definida en [a, b] y se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Se llama a los números:

a: límite inferior de integración
b: límite superior de integración



Nota.
Este proceso es válido para funciones negativas siempre que se entienda que un área negativa nos indica que el recinto que delimita la función queda por debajo del eje OX.

Integral de Riemann

En las condiciones anteriores consideramos:

a) Un punto c_i de cada $[x_i, x_{i+1}]$. Se verifica: $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$

b) Para cada partición, P_n, sumamos las áreas de los rectángulos de base $x_{i+1} - x_i$ y altura $f(c_i)$ que se representa por R_n.

$$R_n = f(c_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

Definimos la integral definida según Riemann en el intervalo [a, b] y se representa por: $\int_a^b f(x)\,dx$

Al límite, cuando n tiende a infinito, de las sumas de los rectángulos R_n

Es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)$

Funciones integrables

Condiciones suficientes para ser funciones integrables:

- **Las funciones continuas en un intervalo [a,b] son integrables en [a,b].**

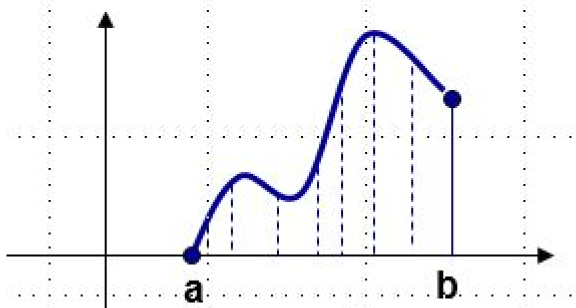
- **Las funciones monótonas en [a,b] son integrables en [a,b].**

- **Las funciones definidas en [a,b] que son continuas salvo en un conjunto finito o infinito numerable de puntos donde presentan saltos finitos, son integrables en [a,b].**

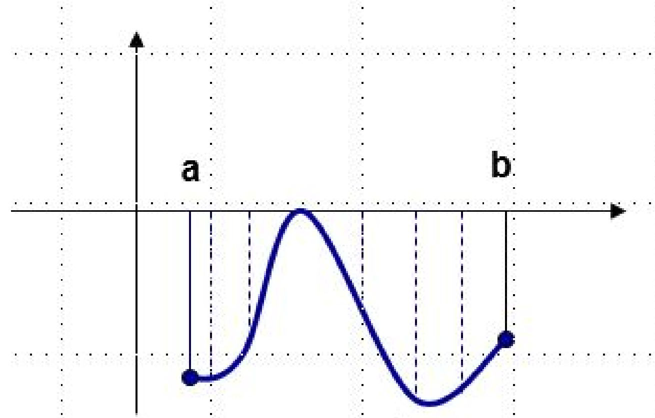
- **Si f es integrable en $[a,b]$, entonces |f(x)| también lo es, y además** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Propiedades de las integrales definidas

Si f(x) es integrable y f (x)≥ 0 en [a,b] ⇒ $\int_a^b f(x)dx$ **= Área sombreada.**



$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$



$$\text{Área} = -\int_a^b f(x)dx$$

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0 \;\; ; \text{ por convenio}$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Sigue →

Propiedades de las integrales definidas

3. Linealidad. **Si f(x) y g(x) son integrables en [a,b], se verifica:**

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \ \lambda \in R$$

4. Aditividad respecto del intervalo de integración

Si f es integrable en [a,b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

para cada c $\in$ **[a,b]**

5. Monotonía

Si f(x) $\geq$ **0 se verifica que la** $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ **; por tanto:**

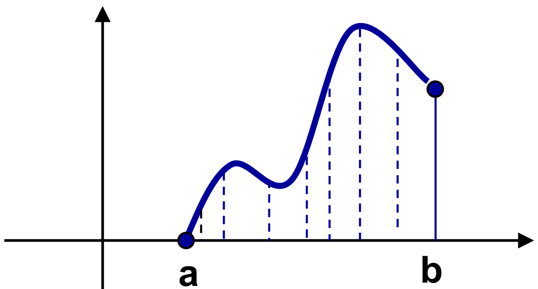
Si f (x)$\geq$ **g(x) también** $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Sigue

Propiedades de las integrales definidas

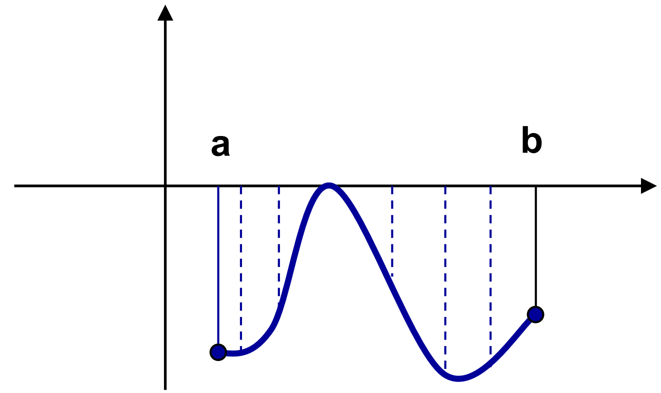
6. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

I)



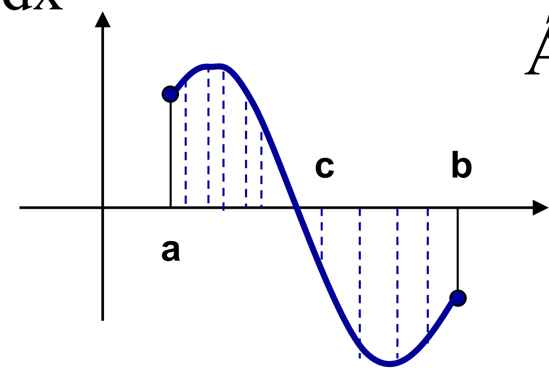
$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

II)



$$\text{Área} = -\int_a^b f(x)dx$$

III)

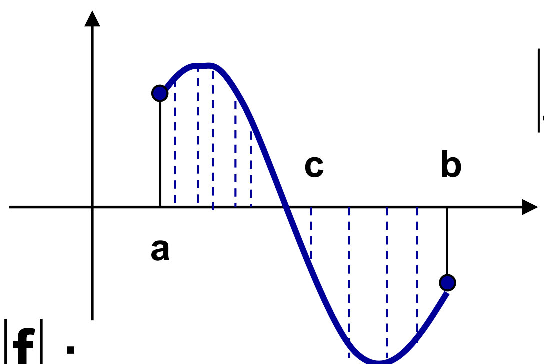


$$\text{Área} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Sigue

Propiedades de las integrales definidas

6. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

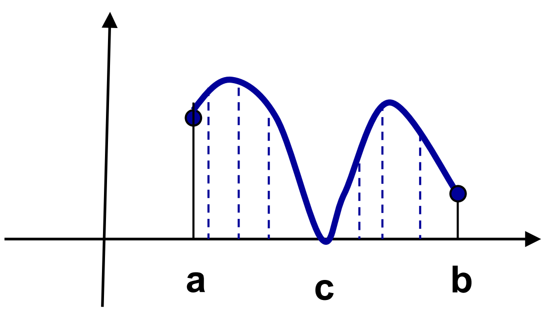


$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$+$ $-$

Se haría la resta y si el resultado es negativo se convierte en positivo.

$|f|$:



$$\int_a^b |f(x)|dx$$

En este caso los dos sumandos Son positivos

Teoremas de funciones integrables en el sentido de Riemann

1. Teorema del valor Medio

2. Teorema (acotada e integrable $\Rightarrow$ continua)

3. Teorema fundamental del cálculo integral

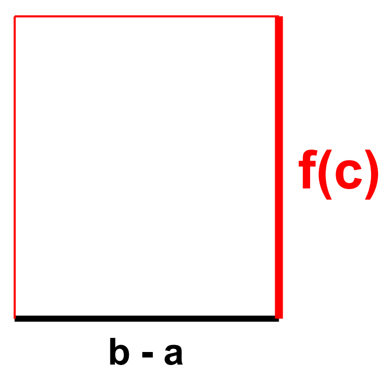
4. Regla de Barrow

Teorema del valor medio

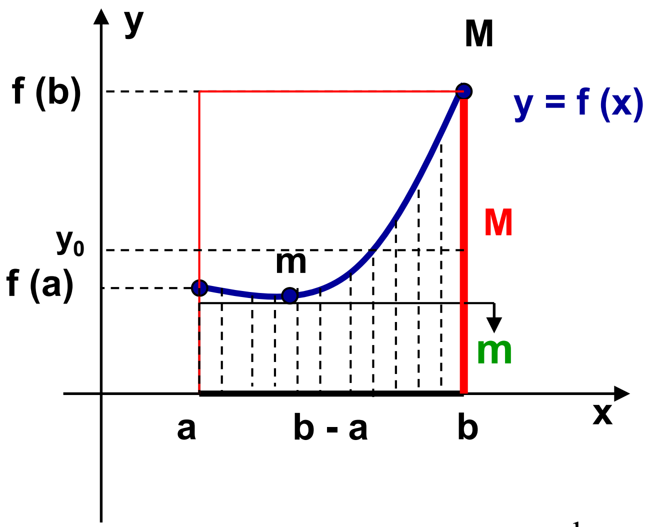
Sea f una función continua en un intervalo [a,b]. Existe al menos un $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\left(b - a\right)$$

Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, dicho teorema tiene un significado intuitivo claro: el área del rectángulo de base (b – a) y altura $f(x_0)$ es igual al área del recinto determinado por f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$



Demostración del teorema del valor medio



Teorema Weierstrass:

Si M = máximo valor de f(x) en [a,b] y

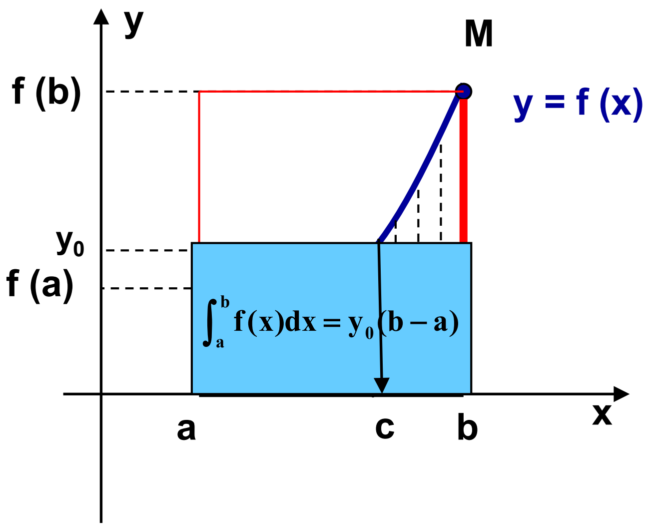
Si m = mínimo valor de f(x) en [a,b],

Sabemos:

$$\underbrace{m\,(b-a)}_{\text{Área del rectángulo pequeño}} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{M\,(b-a)}_{\text{Área del rectángulo grande}}$$

Entonces tomando $y_0 = \dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **se tiene que** $y_0 \in [m,M]$**.**

Demostración del teorema del valor medio



Teorema Valores intermedios:

Como f es continua en un intervalo cerrado, toma todo valor comprendido entre el mínimo y el máximo. Por tanto:

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = y_0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)$$

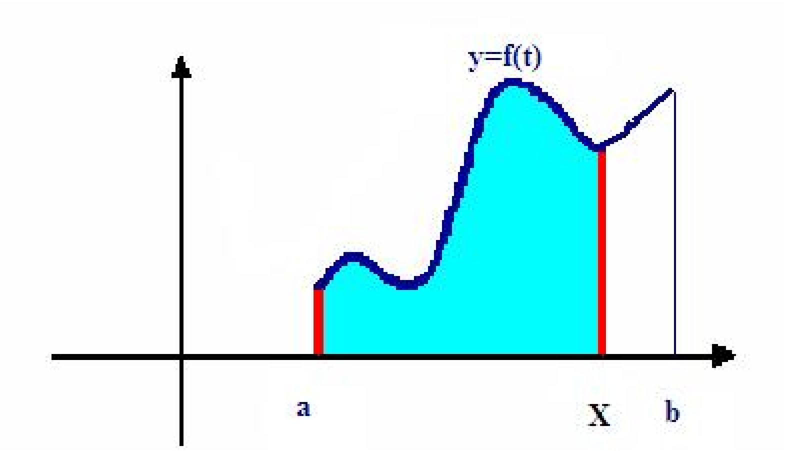
Función área

<u>Definición de Función área</u>

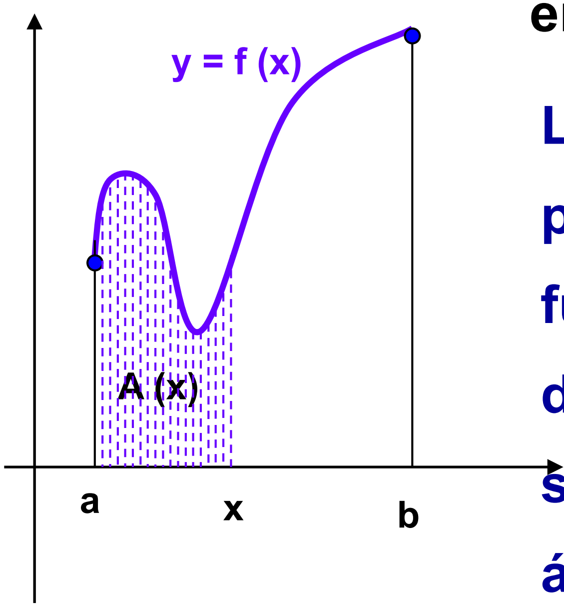
Sea f(x) una función continua en [a, b]. Llamamos **función área o función integral** a la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Esta función nos da el área del recinto delimitado por la función f en todo intervalo [a, x], siendo x∈[a, b].



Función primitiva



Dada la función f(x) continua y positiva en un intervalo [a,b]

La curva y = f(x) barre un área a partir del punto "a" con lo que se define una nueva función $x \rightarrow A(x)$ que asigna a cada valor de x el área del recinto correspondiente siendo el resultado final de este barrido el área A(b) de la superficie sombreada.

Por tanto:

LA FUNCIÓN ÁREA A(x) ES UNA PRIMITIVA DE f(x) EN EL INTERVALO [a,b].

Sigue

Teorema

Sea f (x) una función acotada e integrable en [a, b] y sea

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ una función definida en el intervalo [a, b] $\Rightarrow$

F (x) es una función continua en el intervalo [a, b]

<u>Demostración</u>

Se quiere demostrar que F (x) es continua es decir :

$$\lim_{h \to 0} \Delta F = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left(F(x+h) - F(x) \right) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

En primer lugar se va a calcular Δ F = F (x + h) – F (x)

Sigue

Demostración del Teorema (continuación)

Cálculo de F (x) y F (x+h):

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \\ \\ F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por estar acotada en [a, b] $\Rightarrow$

$$\forall\ x \in [a, b] \text{ se tiene que } |f(x)| < M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M$$

Como es integrable, aplicando el Teorema del valor medio se tiene:

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = y_0\,(x + h - x)$$

Es una constante ya que f (x) está acotada $c \in [x, x+h] \subset [a, b]$

$$\lim_{h\to 0^+} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0^+} y_0 \cdot h = y_0 \cdot 0 = 0$$

Nota: Análogamente si h < 0

Teorema Fundamental del cálculo integral

Sea f (x) una función continua en [a, b], entonces la función

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in [a, b]$ es derivable y su derivada

es $F'(x) = f(x)$

<u>Demostración</u>

F (x) derivable en [a, b] $\Leftrightarrow$ $\forall\ x \in [a, b]$ $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta F}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

Cálculo de:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \\ \\ F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Sigue

Teorema Fundamental del cálculo integral (continuación)

Entonces sustituyendo nos queda:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \overset{\text{T. V.M}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} \text{, siendo } c \in [x, x+h] \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = x + \theta \cdot h$ siendo $0 < \theta < 1$

Luego:

$F'(x) = f(x + \theta \cdot 0) = f(x)$ c.q.d

Es decir: $\boxed{F'(x) = f(x)}$

Regla de Barrow

Si f(x) es una función continua en [a,b] se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

siendo F(x) una primitiva cualquiera de f(x) en [a,b]

Demostración

f (x) continua en [a, b] $\Rightarrow$ G (x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ es una función primitiva de f (x) en [a, b], si F (x) es primitiva de f (x) se verifica:

F (x) = G (x) + C $\Leftrightarrow$ F '(x) = G '(x) + 0 = f (x). Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C \\ F(a) = \int_a^a f(x)\,dx + C = 0 + C \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{F(b) - F(a)} = \int_a^b f(x)\,dx + C - C = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Cálculo de áreas

Cálculo de un área entre una curva, el eje OX y las rectas x=a, x = b

Se darán los siguientes pasos:

1. Se calcula las raíces f(x) = 0
2. Se tienen en cuenta las que están en [a, b]
3. Aplicamos la regla de Barrow a cada uno de los nuevos intervalos.

$$\text{Área} = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \left|\int_d^b f(x)\,dx\right|$$

Cálculo de áreas

Cálculo del área entre dos curvas

Se darán los siguientes pasos:

1. Se calcula las abscisas de los puntos de corte de las dos curva.

   Para ello, se resuelve la ecuación: $f(x) = g(x)$

2. Si solo hay dos puntos de corte:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right|$$

3. Si hay varios puntos de corte:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right| + \left| \int_b^c \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right| + \left| \int_c^d \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right|$$

Integral definida

Definición:

Integral definida de una función continua y positiva en [a, b]

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$ **siendo F (x) una primitiva cualquiera de f (x)**

Nota: Caso de no saber calcular una primitiva

En las funciones del tipo $f(x) = e^{-x^2}$, no sabemos calcular una primitiva, aunque la función área $A(x) = \int_{-1}^{x} e^{-t^2} dt$ exista no podemos calcular su valor en un punto concreto A(1). En estos casos tenemos que recurrir <u>a la integración aproximada</u>.

Derivada de la Integral

Dada la función F(x) = $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ dt$

La derivada es $F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$

Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen} t^2\, dt \quad \Rightarrow F'(x) = \operatorname{sen} x^2$

b) $F(x) = \int_a^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt \quad \Rightarrow F'(x) = \operatorname{sen} (x^2)^2 \cdot 2x = 2x \operatorname{sen} x^4$

c) $F(x) = \int_x^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt \quad \Rightarrow F'(x) = \operatorname{sen} (x^2) \cdot 2x - \operatorname{sen} x \cdot 1$